Revista Transmutare
ISSN: 2525-6475

https://periodicos.utfpr.edu.br/rtr

II Encontro Paranaense do PROFMAT

APRESENTAÇÃO

Em outubro de 2019, nos dias 11 e 12, ocorreu na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Câmpus Curitiba, o II Encontro Paranaense do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. O evento teve como objetivo promover a integração e a cooperação das Instituições de Ensino Superior que ofertam o PROFMAT no Paraná com as Secretarias Municipal e Estadual de Educação, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, as escolas da rede pública, a Associação Nacional dos Professores de Matemática da Educação Básica e as demais entidades envolvidas, em concordância com os critérios de avaliação do PROFMAT. O evento contou com palestras, mesas-redondas, comunicações orais, minicursos, oficinas e apresentação de pôsteres.

Esta seção da Revista Transmutare compõe-se de trabalhos apresentados durante o evento, sendo eles: cinco oficinas, nove pôsteres e quinze comunicações orais. A publicação desses trabalhos pela revista amplia a divulgação das atividades, estudos e pesquisas que vêm sendo desenvolvidas nos cursos de formação de professores da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Equicomposição com o Tangram e com o Cubo-Tangram

Flavia Mescko Fernandes
flavia_m_f@yahoo.com.br
Editora Positivo, Curitiba, Paraná, Brasil

Rudimar Luiz Nós
rudimarnos@utfpr.edu.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

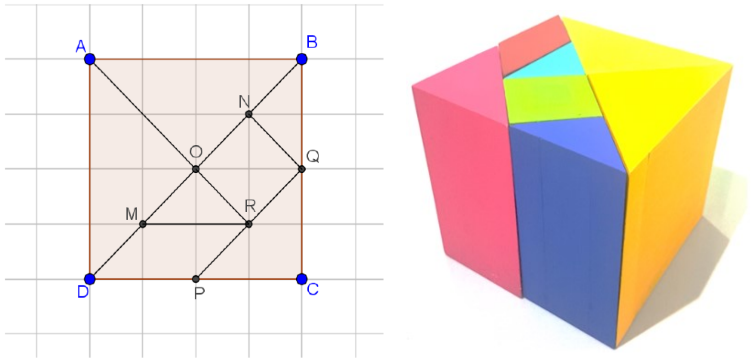
Apresentamos neste trabalho o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien e o terceiro problema de Hilbert para abordar a equicomposição em duas e em três dimensões. Empregamos o Tangram e o Cubo-Tangram para calcular áreas e volumes em atividades de equicomposição. Concluímos que a equicomposição é uma excelente metodologia para estabelecer estratégias na resolução de problemas envolvendo o cálculo de áreas e de volumes.

PALAVRAS-CHAVE: O teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. O terceiro problema de Hilbert. Área. Volume. Resolução de problemas.

INTRODUÇÃO

O Tangram é um quebra-cabeça chinês de sete peças poligonais que compõem um quadrado, enquanto o Cubo-Tangram é um cubo particionado em sete prismas retos cujas bases são as peças do Tangram. As figuras formadas com todas as peças do Tangram têm a mesma área e são equidecomponíveis. Já as figuras formadas com todas as peças do Cubo-Tangram têm o mesmo volume e são equidecomponíveis. A Figura 1 ilustra o Tangram e o Cubo-Tangram, este último em uma versão proposta por Fernandes (2018).

Figura 1 - (a) Tangram; (b) Cubo-Tangram



(a) (b)

Fonte: Fernandes (2018).

A equicomposição pode ser generalizada, isto é, dois polígonos que têm a mesma área ou dois poliedros que têm o mesmo volume são sempre equidecomponíveis? Para responder a estas perguntas, apresentamos o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien e o terceiro problema de Hilbert (FERNANDES, 2018; (NÓS; FERNANDES, 2018).

ATIVIDADES DE EQUICOMPOSIÇÃO

Segundo Boltianski (1981, p. 9), “duas figuras são equicompostas (ou equidecomponíveis) se é possível decompor uma das figuras em um número finito de partes e, por meio de um rearranjo dessas partes, compor a outra figura”. No plano, empregamos o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien e o Tangram para propor problemas de equicomposição envolvendo o cálculo de áreas. No espaço tridimensional, usamos o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, o terceiro problema de Hilbert e o Cubo-Tangram para propor problemas de equicomposição envolvendo o cálculo de volumes. Nas atividades propostas construímos e utilizamos *puzzles* e materiais manipulativos para aprimorar as concepções geométricas na resolução de problemas envolvendo a equicomposição em duas e em três dimensões.

CONCLUSÃO

Empregando o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien e o terceiro problema de Hilbert, apresentamos propostas didáticas para a sala de aula sobre equicomposição no cálculo de áreas e de volumes. As atividades propostas aprimoram a concepção geométrica, principalmente a espacial, e contribuem à educação matemática no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

BOLTIANSKI, V. G. **Figuras equivalentes y equicompuestas**. Moscou: MIR, 1981.

FERNANDES, F. M. **Polígonos e poliedros equidecomponíveis**. Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, 2018.

FERNANDES, F. M.; NÓS, R. L. **Áreas e volumes por equicomposição**. Artigo selecionado pela SBM para o PROEB-CAPES 2019, 2018.

NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Equicomposição de polígonos e o cálculo de áreas. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 2, p. 010272-1 – 010272-7, 2018. DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0272.

Conceitos de geometria e de teoria dos números via paradoxos geométricos

Francielle Gonçalves Sentone
fran.sentone@gmail.com
Escola Estadual Professora Abigail dos Santos Corrêa, Matinhos, Paraná, Brasil

Rudimar Luiz Nós
rudimarnos@utfpr.edu.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

Empregamos neste trabalho os paradoxos geométricos do Tangram, de Curry e de Hooper para explorar em atividades recreativas conceitos de geometria plana, de geometria analítica e de teoria dos números. Concluímos que a Matemática Recreativa é uma excelente metodologia para motivar a aprendizagem e verificar a assimilação de conceitos matemáticos.

PALAVRAS-CHAVE: Paradoxo do Tangram. Paradoxo de Curry. Paradoxo de Hooper. Matemática Recreativa.

INTRODUÇÃO

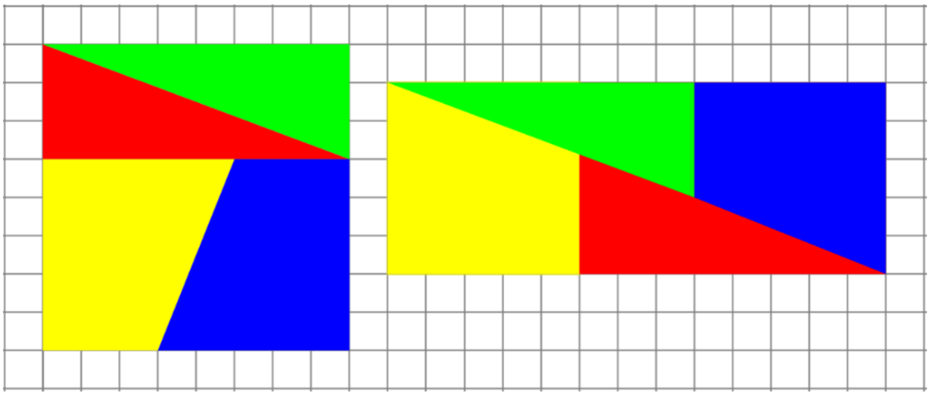
Um paradoxo é uma declaração que vai contra o senso comum, expectativas ou definições; é uma proposição que, apesar de aparentar um raciocínio coerente, demonstra falta de lógica. A palavra paradoxo provém do grego paradoksos: o prefixo para significa contrário a, ou oposto de, e o sufixo doxo, opinião. No latim, paradoxum é uma sentença que se opõe à opinião comum. Segundo Farlow (2014), os melhores paradoxos são os mais fáceis de afirmar e os mais difíceis de resolver. Então, solucionar um paradoxo seria como desvendar um truque? Seria mágica? Poderíamos, enquanto estudantes e/ou professores de matemática, empregar paradoxos de forma recreativa para introduzir/investigar conceitos matemáticos, principalmente geométricos?

Inspirados principalmente por Gardner (1956), autor de várias obras de Matemática Recreativa, dentre elas o clássico Mathematics, magic and mystery, investigamos inicialmente dois paradoxos lógicos, o paradoxo do mentiroso e o paradoxo do altruísta, e, em seguida, três paradoxos geométricos: o paradoxo do Tangram, o paradoxo de Curry e o paradoxo de Hooper. Em seguida, exploramos em atividades recreativas conceitos de geometria plana, como área, semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras, de geometria analítica, como a declividade da reta, e de teoria de números, como a sequência de Fibonacci, para explicar/desvendar os paradoxos geométricos investigados.

ATIVIDADES RECREATIVAS

Nas atividades propostas, empregamos papel milimetrado e também o GeoGebra. A Figura 1 ilustra o paradoxo de Hooper, com o qual podemos explorar os conceitos de área e de declividade da reta.

Figura 1 - Paradoxo de Hooper: 64=65?



Fonte: Sentone (2017); Nós e Sentone (2017); Nós e Sentone (2018).

CONCLUSÃO

As atividades recreativas que propomos elucidam os paradoxos geométricos investigados, instigam a curiosidade e promovem a discussão de conceitos matemáticos e o trabalho em grupo.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

FARLOW, S. J. **Paradoxes in mathematics**. New York: Dover, 2014.

GARDNER, M. **Mathematics, magic and mystery**. New York: Dover, 1956.

NÓS, R. L.; SENTONE, F. G. Paradoxos geométricos nas aulas de geometria. **Revista Ciências Exatas e Naturais**, v. 19, n. 2, p. 134-151, 2017. DOI: 10.5935/RECEN.2017.02.02.

NÓS, R. L.; SENTONE, F. G. Explorando paradoxos geométricos nas aulas de geometria. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 1, p. 010365-1 – 010365-7, 2018. DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0365.

SENTONE, F. G. **Paradoxos geométricos em sala de aula**. Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, 2017.

Manual de uso do teodolito nas aulas de matemática

Cassiano H. M. C. Ramos
cassiano@gmail.com
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

Márcio R. Adames
marcioadames@utfpr.edu.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

Neste resumo apresentamos uma atividade prática do uso do teodolito nas aulas de matemática. A atividade foi selecionada na dissertação do primeiro autor e do produto associado desenvolvido. Buscamos fornecer uma alternativa de contextualização da geometria e trigonometria do triângulo retângulo, vistos no primeiro ano do Ensino Médio, aplicando a topografia, mostrando ao aluno que esses conteúdos têm aplicações práticas e reais muito úteis nas áreas de engenharia.

PALAVRAS-CHAVE: Contextualização. Topografia. Matemática. Trigonometria. Geometria.

INTRODUÇÃO

O propósito da atividade desenvolvida, e das outras, que podem ser vistas em maior número e detalhe na dissertação, é servir como um guia prático para o professor da Educação Básica que deseje explorar temáticas da geometria no contexto da topografia utilizando o teodolito didático. Aqui exploramos uma atividade envolvendo a relação trigonométrica da tangente. Buscamos produzir uma referência rápida para permitir intervenções pontuais ligando os conceitos estudados na escola a aplicações práticas da matemática no mundo real, que foram de grande importância na navegação e na cartografia e que estão implícitas em muitas técnicas modernas.

ATIVIDADE PRÁTICA SOBRE RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Nesta atividade prática calculamos a altura de um objeto (árvore, prédio, caixa d'água, etc), utilizando apenas uma trena e o teodolito didático. Indicamos o procedimento de explicar aos alunos que para medir essa altura os mesmos utilizam a definição de tangente e que para tanto precisam apenas de uma medida de distância horizontal e que o objeto esteja na vertical. Explicar ainda que, ao final do cálculo, devem adicionar a altura do teodolito.

O procedimento de leitura de dados é:

1. instalar e nivelar o teodolito didático no ponto A de forma que seja possível visualizar sem obstáculo o objeto e, zerando o ângulo vertical, determinar um ponto B no objeto;
2. levantar a luneta do teodolito até visualizar o ponto C do objeto, acima de B, e anotar o ângulo vertical α;
3. medir a distância horizontal AB de A até o ponto B com uma trena;
4. medir a altura do teodolito didático, que chamamos de i.

Fazendo com cuidado os procedimentos acima garantimos um triângulo retângulo *ABC*, com ângulo reto em *B*, a medida de um cateto (*AB*) e um ângulo agudo α, conforme a Figura 1.

Figura 1 - Medindo a altura de uma árvore com um teodolito

Fonte: Ramos e Adames (2019).

Da definição de tangente em α, temos que $BC = AB.tan\alpha$ e que a altura do objeto é

$$BC = AB.tan\alpha + i.$$

CONCLUSÃO

O trabalho apresenta uma atividade prática que pode ser realizada com um teodolito didático e que pode ser acrescentada às aulas tradicionais sobre o tema.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

RAMOS, C. H. M. C. **Geometria e trigonometria aplicadas na topografia**: uma alternativa para a interdisciplinaridade e a contextualização. Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, 2018.

RAMOS, C. H. M. C.; ADAMES, M. R. **Manual de uso do teodolito nas aulas de matemática**. Preprint, 2019.

Os jogos de blocos de montar e as transformações geométricas

Frederico Braida
frederico.braida@ufjf.edu.br
UTFPR, Toledo, Paraná, Brasil

Rodolfo Eduardo Vertuan
rodolfovertuan@utfpr.edu.br
UTFPR, Toledo, Paraná, Brasil

Rodrigo Manoel Dias Andrade
rodrigomandrade@utfpr.edu.br
UTFPR, Toledo, Paraná, Brasil

RESUMO

Este trabalho aborda o ensino da Geometria na Educação Básica, tomando como premissa que a conformação de cenários lúdicos pode favorecer um maior engajamento dos alunos. A principal questão motivadora é: quais estratégias de ensino podem ser utilizadas para o desenvolvimento das habilidades e competências relacionadas ao tópico de "transformações geométricas"? Metodologicamente, parte-se de uma revisão desse conteúdo presente na Base Nacional Comum Curricular e da sua articulação com a teoria da Gramática da Forma. Ao final, evidencia-se que os jogos de blocos de montar podem ser adotados como material didático concreto e lúdico para a exploração das transformações geométricas.

PALAVRAS-CHAVE: Transformações geométricas. Blocos de montar. Geometria.

INTRODUÇÃO

Diversos autores, tal como relatado por Rossi (2009, p. 20), mencionam que o ensino da Geometria na Educação Básica encontra muitas dificuldades, sobretudo em função da adoção "de uma prática pedagógica baseada unicamente na memorização de conteúdos e, tendo o quadro verde e giz como única ferramenta pedagógica utilizada". É nesse sentido que a autora afirma que "os professores se sentem desafiados a buscar novas estratégias de ensino que despertem o interesse dos alunos [...]" (ROSSI, 2009, p. 20).

Diante desse contexto, este artigo se debruça sobre a seguinte questão: quais estratégias de ensino podem ser utilizadas para o desenvolvimento das habilidades e competências relacionados ao tópico de "transformações geométricas"? O principal objetivo deste trabalho é apresentar os jogos de blocos de montar associados à teoria da Gramática da Forma como uma alternativa para a criação de cenários lúdicos para o ensino das transformações geométricas.

AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E OS BLOCOS DE MONTAR

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe que o tópico das transformações geométricas deve estar presente no Ensino Fundamental, sobretudo ao que diz respeito ao estudo das simetrias, o qual "deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de softwares de geometria dinâmica" (BRASIL, 2017, p. 271 e 272). Com relação à BNCC do Ensino Médio, as transformações geométricas aparecem nos pares de ideias fundamentais intitulado "Movimento e posição" e "Relações e inter-relações" (BRASIL, 2018, p. 521) e também estão relacionadas à seguinte habilidade vinculada à Competência Específica 1: "(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras" (BRASIL, 2018, p. 525).

Como se vê, a Geometria contribui diretamente para o desenvolvimento da percepção espacial e do julgamento estético e, mais especificamente, as transformações geométricas podem fornecer um lastro lógico-criativo-pragmático para a produção de artefatos humanos. Portanto, esses conceitos não devem ser negligenciados na Educação Básica, devendo ser explorados em contextos variados, para além da mera exposição teórica desassociada das incursões empíricas.

É nesse sentido que a adoção dos jogos de blocos de montar associados à teoria da Gramática da Forma apresenta-se como uma possibilidade para criação de cenários lúdicos e para fomentarem um maior engajamento dos alunos no processo de ensino-aprendizagem das transformações geométricas. Ressalta-se que essa associação se mostra pertinente, pois, por um lado, a Gramática da Forma pode ser considerada como um método formalista para a geração e análise de composições geométricas e, por outro, o uso dos blocos de montar, como recurso didático manipulável, conecta os alunos ao mundo real e palpável. Assim, o ensino das transformações pode se apoiar tanto nos aspectos teóricos quanto na experimentação e manipulação dos jogos dentro de um contexto divertido.

CONCLUSÃO

Buscamos evidenciar, neste trabalho, que o tópico "transformações geométricas", de acordo com a BNCC, está presente tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio e que o seu estudo contribui para a produção dos artefatos humanos. Assim, é dentro dessa perspectiva que se vislumbra a adoção da Gramática da Forma associada ao uso dos blocos de montar para que os conceitos relativos às transformações geométricas sejam explorados tanto sob um viés teórico quanto de uma experimentação de materiais concretos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** 2017. Disponível em: https://bit.ly/2uLz78O. Acesso em: 10 maio 2019.

BRASIL. Ministério da Educação**. Base nacional comum curricular**: Ensino Médio. 2018. Disponível em: https://bit.ly/2IYzVzE. Acesso em: 10 maio 2019.

ROSSI, G. da R. **O ensino e aprendizagem de polígonos e transformações geométricas no plano:** relacionando a arte e matemática por meio dos frisos e dos ladrilhos. Dissertação de Mestrado, Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2009.

Uso do GeoGebra na determinação do volume do Sólido de Escher

Ederson Marcelino da Silva
edersonmarcelinodasilva@gmail.com
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

Olga Harumi Saito
ohsaito@gmail.com
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

Nesse trabalho apresentamos uma possibilidade de aliar a arte e a tecnologia através da obra do artista gráfico Maurits Cornelis Escher, Cascata, e o uso do GeoGebra. Utilizamos esse software como ferramenta de apoio e construímos um dodecaedro rômbico estrelado, conhecido como Sólido de Escher, e determinamos uma fórmula para o cálculo de seu volume, o que nos permitiu concluir que o volume desse sólido equivale ao de quatro hexaedros regulares.

PALAVRAS-CHAVE: Recurso digital. Dodecaedro rômbico. Ensino e aprendizagem.

INTRODUÇÃO

Quando falamos em aula de geometria espacial, podemos considerar que a representação gráfica é fundamental. De acordo com Segadas, Silva e Moutinho (2004), essa área da Matemática é considerada difícil de entender e pode se tornar uma barreira no aprendizado dos discentes. Um dos motivos, segundo as autoras, é a baixa capacidade de visualização espacial apresentada por eles.

Diante dessa situação, procuramos uma maneira de contribuir na promoção do ensino e aprendizagem do tema poliedros e apresentamos uma forma de associar a arte de Escher e o recurso digital GeoGebra.

DESENVOLVIMENTO

Em seus trabalhos Escher buscou trabalhar com as formas geométricas e, dentre suas obras destacamos a Cascata, de 1961. Na gravura aparecem dois poliedros, o da direita um dodecaedro rômbico estrelado, que ficou conhecido como Sólido de Escher (SE), Figura 1.

Figura 1 - Litogravura Cascata, de 1961

Fonte: Silva (2018).

O SE é uma estrelação (técnica difundida por Kepler e Poinsot) do dodecaedro rômbico (Sólido de Catalan), que é dual do cuboctaedro (Sólido de Arquimedes), obtido do truncamento de um hexaedro regular ou um octaedro regular (Sólidos de Platão). Ele possui dois tipos de arestas, sendo a maior delas utilizada para o cálculo de seu volume, que denominamos 2a.

O volume do SE (V_{SE}) pode ser definido como $V_{SE} = V_{DR} + 12V_P$, onde V_{DR} é o volume do dodecaedro rômbico e V_P o volume de cada uma das doze pirâmides formadas em sua estrelação. Com ajuda do GeoGebra, podemos concluir que $V_{DR} = 2a^3$, $V_P = \frac{a^3}{6}$ e, temos que o $V_{SE} = 4a^3$, ou seja, equivale ao volume de quatro hexaedros regulares de aresta a (SILVA, 2016). Também podemos chegar a esse resultado por meio dos tradicionais cálculos algébricos ou utilizando um material didático manipulável (SILVA, 2018).

CONCLUSÃO

O uso do GeoGebra possibilitou a determinação de uma fórmula para o cálculo do volume do Sólido de Escher, permitindo observar e compreender as suas características durante a sua construção.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

SEGADAS, C.; SILVA, F. R.; MOUTINHO, M. **Explorando atividades de visualização e representação de figuras no espaço**. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, Universidade de Pernambuco, Pernambuco, 2004. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/02/MC81955154791.pdf. Acesso em: 19 jul. 2019.

SILVA, E. M. **Volume dos sólidos de Platão – Oficina de matemática – IFPR**, 2016. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=c_Xree0sOcA. Acesso em: 19. jul. 2019.

SILVA, E. M. **Poliedros de Arquimedes, Catalan, Kepler-Poinsot, Platão e o sólido de Escher**: contribuições para o ensino e aprendizagem de poliedros. Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, 2018.

O GeoGebra 3D como recurso para o cálculo do volume de poliedros por (de)composição

Victoria Mazotti Rodrigues da Silva
victoriamazotti@gmail.com
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

Rudimar Luiz Nós
rudimarnos@utfpr.edu.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

Apresentamos neste trabalho estratégias de composição/decomposição de poliedros convexos empregando o aplicativo gratuito de geometria dinâmica GeoGebra 3D. As atividades de composição/decomposição permitem estabelecer o volume de um poliedro convexo a partir de volumes conhecidos, como o volume de prismas e de pirâmides. Concluímos que o GeoGebra 3D é um excelente aplicativo para ser explorado no cálculo do volume de poliedros convexos na Licenciatura em Matemática e também no Profmat.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Dinâmica. Rombicuboctaedro. Volume.

INTRODUÇÃO

Por se tratar de uma tarefa muitas vezes complexa e “um tema pertinente à formação geométrica do Professor de Matemática” (SILVA; NÓS, 2018), o cálculo do volume de poliedros convexos é um tópico que deve ser explorado no Ensino Médio, na Licenciatura em Matemática e no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat. Assim, o cálculo do volume de um poliedro convexo pode ser abordado basicamente sob duas perspectivas: “decompor o poliedro em poliedros com volume conhecido, como prismas e pirâmides” (NÓS; SILVA, 2019), como, por exemplo, dividir o octaedro regular em duas pirâmides de base quadrangular; “eliminar poliedros de volume conhecido, como prismas e pirâmides, de um poliedro de volume também conhecido” (NÓS; SILVA, 2019), como, por exemplo, eliminar pirâmides de base pentagonal de cada vértice do icosaedro regular a fim de se obter o icosaedro truncado. Nessas de(composições), utilizamos o software de geometria dinâmica GeoGebra 3D (GEOGEBRA, 2019).

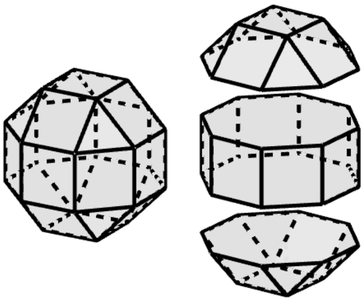
A (DE)COMPOSIÇÃO DE POLIEDROS

Como é possível “transformar poliedros removendo, acoplando ou girando poliedros” (SILVA; NÓS, 2018), obtemos novos poliedros a partir de operações sobre poliedros já existentes. Logo, o cálculo do volume desses novos poliedros se dá por meio da soma, ou subtração, do volume de poliedros conhecidos. Para uma melhor visualização do poliedro, podemos construí-lo por meio de sua planificação em papel ou por meio de softwares computacionais.

Sendo um software livre, que pode ser usado de forma online ou offline (por meio de download) gratuitamente, optamos pelo GeoGebra 3D para construir poliedros, seccioná-los e aplicar operações tais como afastar, acoplar ou girar.

Para ilustrar o uso do software, escolhemos o rombicuboctaedro, um poliedro Arquimediano obtido a partir da expansão do cubo. Podemos também compor o rombicuboctaedro unindo duas cúpulas quadradas e um prisma regular de base octogonal, como ilustra a Figura 1.

Figura 1 - (De)composição do rombicuboctaedro



Fonte: Os autores.

O volume do rombicuboctaedro pode ser determinado pela soma dos volumes dos poliedros que o compõem. O volume V_c da cúpula quadrada é calculado de forma detalhada em Silva e Nós (2018), enquanto o volume V_p do prisma regular é dado pelo produto da área do octógono regular pela altura do prisma. Dessa forma, adotando a como a medida da aresta do rombicuboctaedro, temos que o volume V_r do rombicuboctaedro é igual a

$$V_r = 2V_c + V_p = \frac{4\sqrt{2}+6}{3}a^3 + 2(\sqrt{2}+1)a^3 = \frac{2}{3}(5\sqrt{2}+6)a^3.$$

CONCLUSÃO

Apresentamos nesse trabalho a (de)composição dinâmica de poliedros convexos com o GeoGebra 3D para estabelecer estratégias para o cálculo do volume. Ilustramos compondo/decompondo o rombicuboctaedro, um poliedro Arquimediano. Esperamos dessa maneira motivar os professores da Educação Básica, do Ensino Superior e também das Pós-Graduação a empregarem softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra 3D, no cálculo do volume de poliedros convexos.

REFERÊNCIAS

GEOGEBRA. **GeoGebra 3D graphing calculator.** 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/3d?lang=pt-BR. Acesso em: 14 jul. 2019.

NÓS, R. L.; SILVA, V. M. R. Compondo/decompondo poliedros convexos com o GeoGebra 3D. In: **CNMAC 2019 XXXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, 2019, Uberlândia-MG.

SILVA, V. M. R.; NÓS, R. L. **Calculando o volume de poliedros convexos.** Curitiba: CRV, 2018.

O problema que tornou Euler famoso

Jairo Gayo
jairogayo@yahoo.com.br
SENAI, Blumenau, Santa Catarina, Brasil

Roy Wilhelm Probst
rwprobst@gmail.com
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

Este trabalho apresenta o Problema da Basileia, cuja resposta tornou Leonhard Euler famoso. A prova de Euler, que por muito tempo continha uma passagem tida como incorreta, foi aceita após o Teorema da Fatoração de Weierstrass. O trabalho discute também, por meio desse problema, a importância da História da Matemática para as aulas de matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Problema da Basileia. Leonhard Euler. História da Matemática.

INTRODUÇÃO

Uma das principais vantagens da utilização da História da Matemática no ensino é que o estudante passa a entender a Matemática como um conhecimento dinâmico, fruto de uma evolução, e percebe que ela está aberta a avanços. Tais avanços podem ocorrer com a resolução de problemas em aberto. Ao longo da história foram diversos os problemas que estiveram em aberto por muitos anos, e muitos ainda permanecem assim. Matemáticos que conseguem resolver um destes problemas entram para a História e o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) alcançou notoriedade após resolver o Problema da Basileia. Euler é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes da História, não apenas por ter resolvido tal problema, mas principalmente por ter contribuído com a Matemática em diversas áreas com mais de 850 trabalhos (SIMMONS, 2002), muitos de extrema importância.

O PROBLEMA DA BASILEIA

Em 1644 este problema foi proposto pelo matemático italiano Pietro Mengoli (1625-1686), mas apesar dos esforços dos maiores matemáticos da época, sua solução não surgia (SZPIRO, 2008). Nascia em torno dele um enigma similar ao do Último Teorema de Fermat. Johann Bernoulli (1667-1748), professor de Euler na Universidade da Basileia (BOYER, 2003), provavelmente foi quem apresentou esse problema a ele. Após resolver o problema, Euler passou a chamar a atenção da comunidade acadêmica da época. O problema consistia em apresentar o resultado da soma dos inversos dos quadrados perfeitos, ou seja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

A SOLUÇÃO DE EULER E SUA INVALIDADE

Na solução apresentada por Euler em 1740, a soma é $\pi^2/6$. O resultado, correto, surpreendeu a todos, pois envolvia π como resposta de uma série que não parecia estar relacionada com circunferências e trigonometria. No entanto, apesar da belíssima demonstração, existia uma passagem não muito bem explicada. Essa prova permaneceu inválida até 1885, quando o matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) provou o Teorema da Fatoração de Weierstrass. Assim, uma das passagens de sua resolução que fora questionada por quase 150 anos foi justificada. Os detalhes dessa e outras demonstrações podem ser encontrados em Gayo (2015).

CONCLUSÃO

A História da Matemática não deveria ser contada por meio de uma maçante bibliografia, mas sim mostrando como um tema surge, se desenvolve e ganha importância ao longo do tempo. Um exemplo disso é a prova de Euler para o Problema da Basileia, que parecia ter um equívoco, o que não tirava sua beleza, afinal o resultado estava certo. Neste ponto o raciocínio e a criatividade são tão importantes na Matemática quanto seu rigor e formalismo. O equívoco ocorre na utilização de uma propriedade que hoje seria possível justificar com o Teorema de Weierstrass. Assim, nota-se que no desenvolvimento da Matemática a intuição vem à frente do formalismo. Percebe-se que a Matemática não se desenvolve linearmente, tal como está em um livro didático: sua evolução é dinâmica e partes que compõem um mesmo tema surgem e se desenvolvem em tempos, lugares e com finalidades diferentes.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

GAYO, J.; PROBST, R. W. O problema que tornou Euler famoso. **Ciência e Natura**, v. 37, p. 342-355, 2015.

SIMMONS, J. C. **Os 100 maiores cientistas da História**: uma classificação dos cientistas mais influentes do passado e do presente. Rio de Janeiro: DIFEL, 2002.

SZPIRO, G. G**. A vida secreta dos números**. Rio de Janeiro: DIFEL, 2008.

Demonstrando o volume da esfera

Maria Carla F. P. Tavares
maria_carla24@yahoo.com.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

Rudimar Luiz Nós
rudimarnos@utfpr.edu.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

Empregamos neste trabalho diversas estratégias para calcular o volume da esfera. Dentre elas, destacamos a inscrição da esfera em um cilindro equilátero, isto é, o teorema de Arquimedes, e a decomposição da esfera em pirâmides. Concluímos que há métodos relativamente simples que podem ser utilizadas pelo professor de matemática do Ensino Médio para justificar a relação para o cálculo do volume da esfera.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Espacial. Teorema de Arquimedes. Cilindro. Cone. Tronco de cone de bases paralelas.

INTRODUÇÃO

Segundo Muniz Neto (2013):

> [...] a apresentação cuidadosa da Geometria nos ciclos Fundamental e Médio reveste-se de extraordinária importância, pelo simples fato de se configurar em uma das melhores instâncias para expor os alunos, de maneira sistemática, à argumentação lógico-dedutiva que caracteriza a Matemática como corpo de conhecimento (MUNIZ NETO, 2013, p. XI).

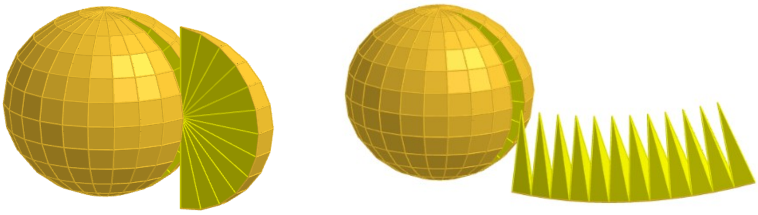
Dessa forma, investigamos diferentes técnicas para comprovar a relação para o cálculo do volume da esfera e que podem ser empregadas pelo professor de matemática em sala de aula no Ensino Médio. O objetivo é substituir a mera apresentação da relação para os estudantes por atividades que conduzem à comprovação da relação.

O VOLUME DA ESFERA

Teorema 1. O volume da esfera de raio r é dado por $\frac{4}{3}\pi r^3$.

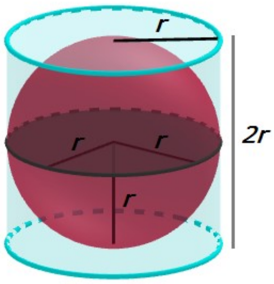
Há muitas formas de se provar o Teorema 1. As Figuras 1 e 2 ilustram, respectivamente, a decomposição da esfera em pirâmides e a inscrição da esfera em um cilindro equilátero. Esta última é a essência do teorema de Arquimedes. Além dessas estratégias, também é possível empregar o Princípio de Cavalieri (LIMA, 2011) e a decomposição da esfera em cilindros e em troncos de cone retos de bases paralelas.

Figura 1 - Esfera decomposta em pirâmides



Fonte: Or (2019).

Figura 2 - Esfera inscrita no cilindro equilátero



Fonte: Os autores.

CONCLUSÃO

Apresentamos vários métodos para calcular o volume da esfera. Esperamos que o presente trabalho motive os professores de matemática do Ensino Médio a organizar atividades para comprovar relações matemáticas, especialmente aquelas para o cálculo de volumes, em substituição à mera apresentação dessas relações.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

OR, A. **Surface area of spheres**, 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/vn4daAZ4. Acesso em: 22 jul. 2019.

O uso da mecânica quântica para o ensino de matrizes

Rudnei Machado
rudneimachado@gmail.com
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

André Fabiano Steklain Lisbôa
steklain@utfpr.edu.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

Dar novas roupagens ao ensino de matrizes, correlacionando o tema matrizes com outras áreas do conhecimento, como física e química por exemplo, permite que mostremos a importância do estudo de matrizes. Nesse campo de estudo, a física quântica se mostrou um valoroso instrumento de ensino e, ao mesmo tempo, uma importante forma de promover o interesse dos alunos. O uso do conceito de spin, sistemas de dois níveis, os postulados da mecânica quântica e as matrizes envolvidas foram usados juntamente com um software livre, simulando o experimento de Stern-Gerlach e, escrevendo a matriz coluna associada a cada spin.

PALAVRAS-CHAVE: Matrizes. Mecânica Quântica. Spin.

INTRODUÇÃO

O tema física moderna, principalmente a mecânica quântica, tem sido abordado na atualidade com grande ênfase nas HQ, nas grandes produções cinematográficas que levam as HQ para o cinema e, também na nova literatura de ficção. E o público que mais consome esse tipo de mídia é o público representado pelos alunos do Ensino Médio. Por isso, o tema física quântica é sempre tão atrativo aos jovens. Não é nosso objetivo aqui verificar a veracidade de todas as informações apresentadas nessas mídias. Mas sim aproveitar o interesse dos alunos por esse assunto, para abordar o tema matriz dentro desse contexto.

Estudos têm demonstrado que o uso didático de softwares quando bem utilizados trazem resultados satisfatórios no processo de ensino aprendizagem, embora o uso desse tipo de recurso ainda cause dúvidas entre profissionais da educação, conforme nos relata Costa (2017, p. 24):

> Segundo Valente (2003 apud Miranda e Camossa 2010), a educação escolar e o professor não têm um referencial de mundo que se compatibilize com a realidade do estudante e com seus possíveis avanços no processo de ensino aprendizagem, pois as escolas procuram avançar tecnologicamente, aderindo ao uso de mídias eletrônicas que facilitem o processo de conhecimento por parte dos alunos, mas o fazem lentamente. Embora os benefícios da aprendizagem móvel estejam bem documentados, os educadores ainda estão relutantes em implementar iniciativas de aprendizagem com tecnologia no seu método de ensino (ALRASHEEDI; CAPRETZ, 2015).

DESENVOLVIMENTO

Segundo Veen e Vrakking (2009), a atual geração já cresceu inserida no mundo da tecnologia, na sociedade da informação. O jovem utiliza os recursos tecnológicos disponíveis para quase tudo em sua vida, o que tem provocado grande mudança na maneira de consumo e de acesso à informação.

A atividade didática faz uso de software livre e trabalha o experimento de Stern-Gerlach e em conjunto a noção de spin e a correlação direta com o conceito de matriz. Sobre a importância desse experimento, Gomes e Pietrocola (2011, p. 2604-3) diz:

> De maneira geral, o conceito de spin aparece no universo escolar na disciplina de química no Ensino Médio, quando do estudo da distribuição eletrônica nos átomos. Mas é no ensino universitário básico que o spin é estudado de modo um pouco mais aprofundado. Para aqueles que seguem aos cursos universitários nas áreas de "ciências experimentais e engenharia", este conceito reaparece ao final do ciclo básico no estudo, costumeiramente chamado "introdução à física moderna". Para os estudantes que até ali chegam, e até mesmo para a maioria dos docentes desses cursos, esse conceito se associa a uma experiência que supostamente "provou" a sua existência: o experimento de Stern-Gerlach (SG).

Todo o arcabouço de física quântica foi estabelecido com base na obra de Feynman, Leighton e Sands (1965).

CONCLUSÃO

Uma abordagem mais simplificada envolvendo o conceito de matrizes torna-se relevante. A possibilidade de "matematizar" o pensamento quântico por meio de matrizes e conseguir demonstrar aplicações da mecânica quântica, como os sistemas de dois níveis, faz com que conceitos tidos como "estranhos" possam se tornar mais compreensíveis aos alunos. Na mesma via, o ensino da mecânica quântica pode fomentar o interesse deles por matrizes.

REFERÊNCIAS

COSTA, J. M. **Software interativo como ferramenta para a otimização do ensino de biologia celular**. Dissertação de Mestrado, UTFPR, Ponta Grossa, 2017.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The Feynman - Lectures on Physics**: Quantum Mechanics. v. 1. Massachusetts: Addison-Wesley, 1965.

GOMES, G. G.; PIETROCOLA, M. O experimento de Stern-Gerlach e o spin do elétron: um exemplo de quasi-história. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 33, n. 2, 2011. ISSN 1806-1117.

VEEN, W.; VRAKKING, B. **Homo Zappiens**: educando na era digital. Porto Alegre: Artmed, 2009.

Origami e o Método de Aproximação de Fujimoto para 1/n

Scheila Odisi Fleischmann
scheilaflei@hotmail.com
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

Olga Harumi Saito
harumi@utfpr.edu.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma técnica para ensino de frações do tipo $\frac{1}{\mathrm{n}}$ utilizando a arte do origami e números binários, o Método de Aproximação de Fujimoto. Utilizamos uma tira de papel para mostrar esse procedimento contribuindo para o entendimento desse conteúdo.

PALAVRAS-CHAVE: Dobradura. Números binários. Ensino e aprendizagem.

INTRODUÇÃO

O origami é uma arte milenar que faz uso de papéis e dobras e pode ser empregado como ferramenta auxiliar durante o processo ensino-aprendizagem na Matemática. Diante das dificuldades apresentadas pelos estudantes no aprendizado sobre frações, com as dobraduras é possível aprimorar os estudos de divisões e de frações, como representar números do tipo $\frac{1}{\mathrm{n}}$ a partir de uma tira de papel (SILVA, 2009).

A TÉCNICA DE FUJIMOTO PARA A CONSTRUÇÃO DE 1/n

O japonês Shuzo Fujimoto, desenvolveu em 1970 um método para dividir uma tira de papel em n-partes, aproximadamente congruentes. A técnica mostra como representar 1/n a partir de uma tira de papel através de dobraduras. Após determinados cálculos realizados, os resultados são definidos nessa tira e a cada etapa do processo obtemos uma maior exatidão da parte desejada. Essa técnica ficou conhecida como "Método de Aproximação de Fujimoto" (HULL, 2012).

Utilizamos a base 2 e devemos determinar uma fração x , tal que $0 < x < 1$ e $x = \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{4} + \frac{i_3}{8} + \frac{i_4}{16} + \frac{i_5}{32} + \frac{i_6}{64} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i_j}{2^j}$, onde $i_j = 0$ ou 1.

Para $n = 5$, escrevemos $\frac{1}{5}$ na base 2**:**

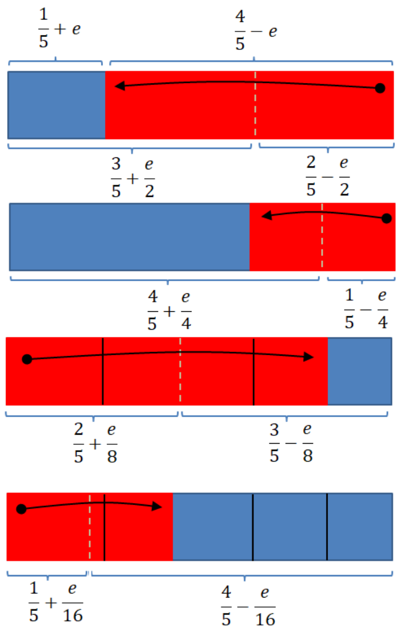
$$\frac{1}{5} = \frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{0}{32} + \frac{0}{64} + \cdots = (0.\overline{0011})_2. \tag{1}$$

A representação binária (1) indica qual parte da tira de papel devemos dobrar, ou seja, o número $\mathbf{1}$ indica dobrar o lado direito e o $\mathbf{0}$, indica dobrar o lado esquerdo:

$$(direita\ \times 2)(esquerda \times 2)(direita\ \times 2)(esquerda\ \times 2).$$

A Figura 1 ilustra a aplicação da técnica para $\frac{1}{5} = (0.\overline{0011})_2$. Fazemos o primeiro vinco, supondo uma posição que represente a fração do lado esquerdo da tira de papel. Então, fazemos as demais dobras como indicado no método.

Figura 1 - Esquema do Método de Fujimoto



Fonte: Autoria própria.

De forma análoga, generalizamos para outros valores de n (LANG, 2009).

CONCLUSÃO

Empregando o Método de Aproximação de Fujimoto, os alunos podem visualizar durante o processo o uso da base 2 associado às operações básicas de potenciação e frações.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

HULL, T. **Project Origami**: Activities for exploring mathematics. [S.l.]: Taylor & Francis, 2012.

LANG, R. J. **Origami 4**: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathemathics and Education. Massachusetts: A. K. Peters, 2009

SILVA, G. N. **Origamática**: o origami no ensino-aprendizagem de matemática. Dissertação de Mestrado, UFRS, Porto Alegre, 2009.

Quanto custa completar o álbum de figurinhas da Copa do Mundo?

Guilherme Miguel Rosa
gui.miguelrosa@gmail.com
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

Roy Wilhelm Probst
rwprobst@gmail.com
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

Este trabalho visa determinar o custo médio para completar o álbum de figurinhas oficial da Copa do Mundo de futebol de 2018. Para isso, apresenta-se um estudo sobre O Problema do Colecionador de Cupons considerando-se diferentes cenários, como a colaboração entre colecionadores trocando as figurinhas repetidas. As soluções obtidas são validadas com algoritmos que simulam o processo de coleção das figurinhas.

PALAVRAS-CHAVE: Probabilidade. Valor esperado. Problema do Colecionador de Cupons.

INTRODUÇÃO

É popular em todo ano de Copa do Mundo a coleção das figurinhas do álbum oficial da competição. O desafio consiste em conseguir todas as figurinhas do álbum comprando pacotes com figurinhas aleatórias. Determinar quantas figurinhas são necessárias comprar em média para completar a coleção é o problema de interesse. Ele ficou conhecido na matemática como O Problema do Colecionador de Cupons: considere uma pessoa que coleciona objetos (cupons) e suponha que existe um número finito de objetos (cupons) diferentes para serem colecionados. Adquirindo-se aleatoriamente um por vez, quantas aquisições são necessárias em média para completar uma coleção? De acordo com Ferrante e Saltalamacchia (2014) o problema surgiu em 1708 com De Moivre na obra *De Mensura Sortis*. Com o passar do tempo, diversas variações e abordagens distintas já foram exploradas, e neste trabalho considera-se a versão clássica e mais simples, onde todos os objetos são equiprováveis e adquire-se um por vez.

RESULTADOS NUMÉRICOS

A quantidade esperada de figurinhas compradas para completar *m* álbuns de *n* figurinhas é dada por (NEWMAN; SHEPP, 1960):

$$E_m(n) = n\int_0^{\infty}\left[1-\left(1-\frac{1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}}{e^t}\right)^n\right]dt.$$

Supondo que um grupo de amigos deseja completar *m* álbuns trocando as figurinhas repetidas entre si, a quantidade média de figurinhas que cada amigo precisa para completar seu álbum é $E_m(n)/m$. No álbum oficial da Copa do Mundo de 2018, do grupo Panini, existem 682 figurinhas para colecionar. Elas são vendidas em pacotes com cinco unidades por R$ 2,00, custando R$ 0,40 cada uma. Obtidos por meio de integração numérica no software Octave, os resultados para $n = 682$ e alguns valores de *m* estão na Tabela 1.

Tabela 1 - Quantidade esperada de figurinhas por álbum/amigo

Álbuns/amigos	Figurinhas	Custo por pessoa
1 (sozinho)	4844	R$ 1937,60
2	3219	R$ 1287,60
5	2050	R$ 820,00
10	1563	R$ 625,20
20	1262	R$ 504,80
50	1025	R$ 410,00

Fonte: Os autores.

Para simular o processo de coleção das figurinhas, o algoritmo deve gerar aleatoriamente números inteiros maiores ou iguais a 1 e menores ou iguais a 682, computando a quantidade necessária de números gerados até cada um aparecer pelo menos *m* vezes. Dividindo a quantidade total de números gerados por *m*, tem-se em média quantos números foi necessário para completar cada um dos *m* conjuntos. A implementação foi realizada no software Octave, e os resultados obtidos com 100 simulações estão na Tabela 2.

Tabela 2 - Quantidade esperada x Média das simulações

Álbuns/amigos	Quantidade esperada	Média das simulações
1 (sozinho)	4844	4940
2	3219	3217
5	2050	2075
10	1563	1556
20	1262	1265
50	1025	1023

Fonte: Os autores.

CONCLUSÃO

Completar o álbum de figurinhas da Copa do Mundo sem trocar as figurinhas repetidas requer a compra de quase cinco mil figurinhas em média. Com trocas, esse número cai para menos da metade em um grupo com cinco amigos e já reduz a aproximadamente um quarto com vinte amigos. As simulações comprovam a intuição e o que diz a teoria: é melhor trocar as figurinhas repetidas com os amigos.

REFERÊNCIAS

FERRANTE, M.; SALTALAMACCHIA, M. The coupon collector's problem. **MATerials MATemàtics,** 2014.

NEWMAN, D. J.; SHEPP, L. The double dixie cup problem. **The American Mathematical Monthly,** v. 67, n.1, p. 58-61, 1960.

RTr
Revista Transmutare

Os teoremas de Pappus para os sólidos de revolução

Robson Raulino Rautenberg
robson.rautenberg@ifsc.edu.br
IFSC, Gaspar, Santa Catarina, Brasil

Roy Wilhelm Probst
rwprobst@gmail.com
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

A partir dos teoremas encontrados na publicação *Geometriae Pars Universalis* de 1668, são apresentadas, pela primeira vez em português, as demonstrações dos teoremas de Pappus para os sólidos de revolução. Essa publicação, escrita originalmente em latim, foi feita pelo matemático escocês James Gregory (1638-1675) e é anterior ao desenvolvimento do Cálculo.

PALAVRAS-CHAVE: História da Matemática, Sólidos de Revolução, Teoremas de Pappus.

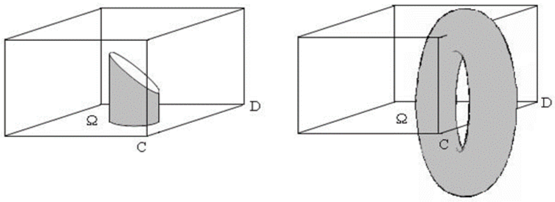
INTRODUÇÃO

Embora possam ser encontrados na maioria dos livros de Cálculo, os teoremas de Pappus para os sólidos de revolução eram conhecidos muito antes da criação desse importante ramo da Matemática. Pappus de Alexandria viveu na época do reinado de Diocleciano (284-305), tendo como um dos seus trabalhos mais importantes uma publicação conhecida como Coleção ou *Synagoge*, escrita no ano 320. Em 1668 o matemático James Gregory publica *Geometriae Pars Universalis*, com mais de 70 teoremas. A partir de alguns desses teoremas, baseado nos trabalhos de Leahy (2009), é possível demonstrar os teoremas de Pappus.

A DEMONSTRAÇÃO DE JAMES GREGORY

No livro VII da *Coleção*, Pappus de Alexandria escreveu o que, em linguagem atual, pode ser interpretado da seguinte forma: a razão entre os volumes de dois sólidos de revolução é dada pela razão obtida por meio da multiplicação entre a razão das áreas das figuras que rotacionam em torno dos seus eixos de rotação e a razão entre as distâncias dos seus respectivos centros de gravidade ao eixo de rotação. Grande parte do trabalho da prova do teorema está em estabelecer uma relação entre o volume do tronco e o volume do cilindro, assim como uma relação entre o volume do tronco e o volume do sólido de revolução. A Figura 1 mostra, além de um eixo de rotação *CD*, um tronco de cilindro e um sólido de revolução obtidos a partir de uma figura plana circular *Ω*.

Figura 1 - Tronco de cilindro e sólido de revolução



Fonte: Rautenberg (2013).

Utilizando conceitos de geometria, de centro de gravidade e os princípios de Arquimedes e de Cavalieri é possível mostrar a relação descrita por Pappus:

$$\frac{Rev(\Omega)}{Rev(\Phi)} = \frac{Área(\Omega)}{Área(\Phi)}\frac{Raio(A)}{Raio(E)}.$$

A partir dessa relação, considerando Φ como uma figura de área e centro de gravidade E conhecidos, mostra-se que $Rev(\Omega) = Área(\Omega)Circ(A)$. Dessa forma, fica demonstrado o seguinte teorema: se uma figura plana é rotacionada em torno de um eixo que não a intersecta, então o volume do sólido de revolução gerado é dado pelo produto entre a área da figura rotacionada e o comprimento da circunferência cujo raio é a distância entre o centro de gravidade dessa figura e o eixo de rotação, ou seja, $V=2\pi dA$. Utilizando argumentos semelhantes pode-se demonstrar o teorema de Pappus para a área de uma superfície de revolução, conhecido por $A = 2\pi dL$.

CONCLUSÃO

Obteve-se, como resultado desse trabalho, um resgate histórico que trouxe a demonstração de James Gregory como tema central, não só pela clareza e relativa simplicidade nos conceitos utilizados, mas também como uma elegante alternativa em relação às demonstrações apresentadas em livros de Cálculo.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

LEAHY, A. **James Gregory and the Pappus – Guldin Theorem**. 2009. Disponível em: http://mathdl.maa.org/mathDL. Acesso em: 19 dez. 2012.

RAUTENBERG, R. R. **Os teoremas de Pappus para os sólidos de revolução**. Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, 2013.

Jogo Rouba Monte Geométrico: facilitando a aprendizagem de Geometria Espacial

Lidiane Lara da Luz
lidi_luz@hotmail.com
UEPG, Ponta Grossa, Paraná, Brasil

Marciano Pereira
marcianope@gmail.com
UEPG, Ponta Grossa, Paraná, Brasil

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo estimular o gosto pela disciplina de Matemática especialmente pelo conteúdo de Geometria Espacial. Para isso, buscou-se trabalhar a Geometria Espacial por meio de um jogo denominado Rouba Monte Geométrico. O trabalho aconteceu com duas turmas de 6° anos, com a aplicação do jogo em apenas uma delas. Com o término do conteúdo uma avaliação foi realizada com as duas turmas e os resultados foram analisados. Verificou-se que na turma onde o jogo foi aplicado, as notas foram melhores, mostrando dessa forma a importância do trabalho lúdico em sala de aula para a aprendizagem.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática. Geometria Espacial. Jogos. Jogo Rouba Monte Geométrico.

INTRODUÇÃO

A Matemática sempre foi uma matéria temida pela maioria dos alunos por ser uma disciplina com muitos conceitos abstratos, fórmulas e demonstrações algébricas. Além do alto grau de dificuldade na aprendizagem da Matemática, fatores como aulas desinteressantes e descontextualizadas, falta de qualificação específica para os professores e escassez de recursos materiais acabam refletindo o baixo rendimento na disciplina.

Entre os diversos conteúdos da disciplina de Matemática, optou-se pelo trabalho com a Geometria Espacial por se tratar de um conteúdo interessante, mas que apresenta bastante resistência por parte dos alunos. A Geometria é muito importante e faz parte do cotidiano dos alunos, por esse motivo faz-se necessário a busca por metodologias diferenciadas para atrair a atenção e instigar a curiosidade do aluno. Uma alternativa é o trabalho com a utilização dos jogos educativos. Segundo Borin (1996):

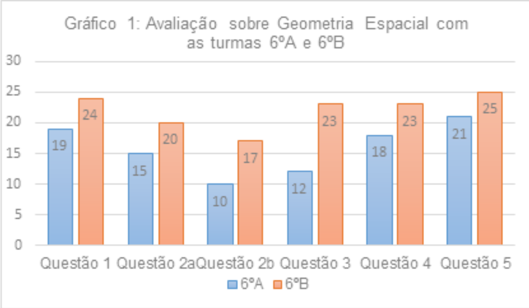
> Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. (BORIN, 1996, p.9).

Desse modo, buscando alternativas adequadas para minimizar ou superar os problemas de aprendizagem no conteúdo de Geometria Espacial, um jogo denominado Rouba Monte Geométrico foi desenvolvido. O jogo foi utilizado em uma turma de 6° ano de um colégio estadual, com o intuito de fixar melhor os conceitos, nomes, elementos e características de alguns sólidos geométricos.

ANÁLISE DE RESULTADOS

Após a avaliação aplicada nas duas turmas, os dados foram tabulados e originou-se a Figura 1 que apresenta o resultado da avaliação sobre Geometria Espacial com as duas turmas.

Figura 1 - Resultada da avaliação sobre Geometria Espacial



Fonte: A autora.

Pode-se perceber claramente que na turma B, onde foi aplicado o jogo, o desempenho foi superior ao da turma A, onde não foi trabalhado o conteúdo de forma lúdica, pois todos os alunos da turma B acertaram mais de 70% das questões da avaliação. Diferentemente da outra turma, onde as notas foram menores.

CONCLUSÃO

O jogo pode e deve ser utilizado como um instrumento facilitador na aprendizagem de estruturas matemáticas, muitas vezes de difícil assimilação. O jogo permite desenvolvimento do pensamento lógico, da autonomia, além de aumentar a criatividade e originalidade, memória, autoconfiança, sociabilidade e organização metódica e estratégica. Também tem papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração, necessárias para a aprendizagem de Matemática. Como Moura (1994) afirma, o jogo não se trata apenas de uma possibilidade vislumbrada, mas é uma grande possibilidade de explorar determinados conceitos matemáticos de maneira lúdica. Acredita-se que a experiência foi válida e pode-se perceber que o conteúdo trabalhado dessa maneira fez com que os alunos participassem mais das aulas, sentissem interesse pelo conteúdo.

REFERÊNCIAS

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP, 1996.

MOURA, M. O de. A séria busca no jogo: do lúdico na matemática. **A educação matemática em revista**, n. 03, 1994.

Sobre o método Vieta Jumping: cuidado para não errar o pulo e cair numa descida infinita!

Marcia Eni Voelz
marciavoelz@yahoo.com.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

Ronie Peterson Dario
ronie@utfpr.edu.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

Vieta Jumping (a.k.a. root flipping) é o nome de um método em geral utilizado para resolver problemas de divisibilidade de números inteiros e é baseado no Princípio da Descida Infinita de Fermat. Ficou muito famoso após a Questão 6 da prova da Olímpiada Internacional de Matemática de 1988 (IMO-1998) apresentar um dificílimo problema só resolvido por alguns estudantes que conseguiram utilizá-lo, conscientemente ou não. No nosso trabalho tentamos facilitar a utilização do método, estruturando os conceitos, analisando quando pode ser usado e apresentando aplicações. O objetivo é que estudantes e professores envolvidos com olimpíadas de matemática possam, diante um desafio de divisibilidade, escolher a direção correta e pular com consciência e segurança para a solução.

PALAVRAS-CHAVE: Método Vieta Jumping. Olimpíadas de Matemática. IMO 1998.

INTRODUÇÃO

Pierre de Fermat, o mais famoso matemático amador de todos os tempos, desenvolveu uma técnica conhecida em outros contextos desde a época de Euclides e aplicou-a a certas equações diofantinas. Trata-se da **Descida Infinita de Fermat**, que resumidamente é um tipo particular de demonstração por contradição cujo princípio básico, o **Princípio da Descida Infinita** diz que uma sequência decrescente de números naturais tem um valor (um número natural) mínimo. Equivalente ao mais badalado Princípio da Boa Ordem do conjunto dos números naturais. Uma variação do método de Fermat ficou conhecido como Vieta Jumping, por fazer uso das Fórmulas de Viète, conhecidas como Fórmulas da Soma e Produto, no caso particular das raízes da equação quadrática. Para saber mais sobre a Descida Infinita de Fermat veja (CARNEIRO, 2019) e para uma versão completa deste trabalho veja (VOELZ, 2018).

FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA DO MÉTODO VIETA JUMPING PARA PROBLEMAS DE DIVISIBILIDADE NOS INTEIROS

Considere um problema de divisibilidade de números inteiros cujo enunciado é uma afirmação $A(x, y)$ que, possivelmente após alguma manipulação algébrica, possa ser apresentado envolvendo uma função racional do segundo grau, isto é,

$$f(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}, \qquad \partial p(x,y) \leq 2, \qquad \partial q(x,y) \leq 2.$$

E ainda, de tal forma que existam números inteiros a, b tais que $A(a, \mathrm{b})$ seja verdadeira. Fixando uma das variáveis, digamos $y = b$, obtêm-se uma equação quadrática $f(x, b) = k$ na variável x. Uma das raízes desta equação é $x_1 = a$. A outra raiz x_2 é determinada utilizando as Fórmulas de Viète. O próximo passo é mostrar que $A(x_1, x_2)$ é verdadeira e que $0 < x_2 < b$. Pelo Princípio da Descida Infinita ou assumindo alguma condição de minimalidade sobre a solução inicial (a, b), obtêm-se uma contradição.

APLICAÇÃO À LENDÁRIA QUESTÃO 6 DA IMO 1988

Problema (Questão 6 – IMO 1988) Sejam a e b inteiros positivos tal que $ab+1$ divide a^2+b^2. Mostre que $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ é um quadrado perfeito. **Solução** Seja k a fração no enunciado e suponha que k não é um quadrado perfeito. Para este valor de k, seja (a, b) a solução para esta equação que minimize o valor de $a+b$. Sem perda de generalidade, assumiremos $a \leq b$. Fazendo a substituição $x = a$ chegamos à equação quadrática $x^2 - kbx + (b^2 - k) = 0$. Uma raiz desta equação é $x_1 = a$ pois (a, b) é uma solução. Pelas Fórmulas de Viète, a outra raiz x_2 pode ser calculada de duas formas: $x_2 = kb - a$ e $x_2 = \frac{b^2-k}{a}$, de tal forma que x_2 é um inteiro positivo, uma vez que k não é um quadrado perfeito. Finalmente, $a \leq b$ implica que que $x_2 = \frac{b^2-k}{a} < \frac{b^2}{a} <$ a. Portanto, (x_2, b) é uma solução, com $x_2 + b < a + b$, que contradiz a minimalidade de $a+b$.

CONCLUSÃO

Explicitar a técnica, explicar a utilização e apresentar exemplos são, no caso do Método de Vieta Jumping, ferramentas eficazes de abordagem de problemas de Olimpíadas de Matemática envolvendo divisibilidade e que muito provavelmente não seriam solúveis por outros meios, a menos de hercúleos esforços.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

CARNEIRO, J. P. O princípio da descida infinita de Fermat. **Revista do Professor de Matemática**, n. 32, 1996.

VOELZ, M. Utilização dos métodos Vieta Jumping e Descida Infinita na solução de equações diofantinas e problemas envolvendo divisibilidade. Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, 2018.

Aplicações da Aritmética Modular

Dionatan Miguel Fiorin Konageski
dionatanmiguel@hotmail.com
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

Mari Sano
marisano@utfpr.edu.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

A Aritmética Modular possui inúmeras aplicações na Educação Básica. E para isso faz-se necessário o entendimento dos conceitos básicos da Aritmética Modular. Este trabalho tem como objetivo aplicar de forma lúdica o conteúdo de congruência nos Chryzodes e no quebra-cabeça de boliche módulo 10. Com essas atividades procuramos mostrar uma maneira diferente de trabalhar Aritmética em sala de aula, maneira esta que irá proporcionar ao educando participar de forma atrativa das aulas.

PALAVRAS-CHAVE: Aplicação da aritmética. Chryzodes. Quebra-cabeça de boliche.

INTRODUÇÃO

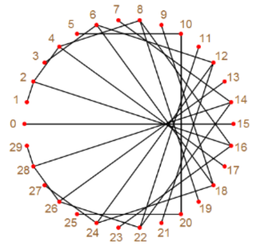
A motivação da escolha do tema e os assuntos abordados surgiu do seguinte questionamento: "por que esses conteúdos não são enfatizados na Educação Básica?". Partindo dessa pergunta, apresentamos esse trabalho sobre Aritmética Modular com enfoque em aplicações lúdicas que podem ser realizadas na Educação Básica, estimulando o desenvolvimento mental e fazendo com que o aluno construa o conhecimento de uma forma mais prazerosa. Além de tornar as aulas menos cansativas e mais atraentes, aproximando o professor do aluno, o que por si acaba com os bloqueios e medos dos alunos em relação à matemática.

Pensando nisso, propomos com esse trabalho um método para ensinar/aprender de maneira lúdica o conteúdo de congruências, através dos Chryzodes, adaptado de (BELLO, 2011) e do quebra-cabeça de boliche módulo 10, adaptado de (DELGADO, 2019).

CHRYZODES E QUEBRA-CABEÇA DE BOLICHE MÓDULO 10

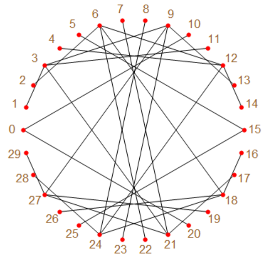
A palavra Chryzode deriva do grego "Chrysos" (escrita de ouro) e "zooide" (círculo), ou seja, escrita de ouro em um círculo. Uma maneira de construirmos um Chryzode é dividir uma circunferência em m pontos equidistantes, ordenados e numerados de 0 a m-1. Feito isso, escolhemos um número natural a que multiplicará a sequência de números 1, 2, 3, ..., m-1. Em seguida, resolvemos as congruências $a \cdot \mathrm{i} \equiv b_{\mathrm{i}} (\mathrm{mod}\, m)$, para i = 1,2,3, ..., m-1. Logo, para obter o Chryzode basta ligar a sequência de números 1,2,3, ..., m-1 com b_1, b_2, ..., b_{m-1}, respectivamente. Desta maneira, teremos um conjunto de linhas desenhadas no círculo inicial e os pontos que são interseção dessas linhas, do qual forma parte o Chryzode. Nas Figuras 1 e 2, podemos visualizar alguns exemplos de Chryzodes e para visualizarmos o que acontece de uma forma mais tecnológica e lúdica, foi criado o vídeo que varia o valor de a e o valor de m das congruências, que está *disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=sSq3DCkpS-g&t=12s.

Figura 1 - Multiplicação por 2 módulo 30



Fonte: O Autor.

Figura 2 - Multiplicação por 3 módulo 30



Fonte: O Autor.

O quebra-cabeça de boliche módulo 10 consiste em 10 blocos empilhados como uma pirâmide: quatro blocos na linha inferior, três blocos na linha seguinte, dois blocos na próxima linha e um bloco no topo. A resolução da pirâmide se dá pelo preenchimento de todos os blocos com números, tal que a regra da pirâmide segue de um triângulo reverso de Pascal, isto é, qualquer bloco é a soma dos dois blocos diretamente abaixo dele módulo 10. O objetivo é usar todos os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 exatamente uma vez.

CONCLUSÃO

Espera-se que as aplicações propostas neste trabalho sejam o pontapé inicial para que o professor busque outras formas de explanação dos conteúdos relacionados à Aritmética Modular, pois ao inserirmos novos métodos de ensino, a matemática se torna cada vez mais atrativa.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

BELLO, M. G. **La aritmética modular y algunas de sus aplicaciones**. Dissertação de Mestrado, Universidad Nacional de Colombia, 2011.

DELGADO, J. **Math Circle Lesson Bowling Pin Puzzle**, 2019. Disponível em: http://math.sfsu.edu/cm2/papers/JessicaDelgado_termpaper_Final.pdf. Acesso em: 30 jan. 2019.

Demonstrando dinamicamente o teorema de Simson-Wallace com o GeoGebra

Rodrigo Cesar Lago
rodrigoclago@gmail.com
SEED, Curitiba, Paraná, Brasil

Rudimar Luiz Nós
rudimarnos@utfpr.edu.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

Empregamos neste trabalho o software de geometria dinâmica GeoGebra para investigar dinamicamente o teorema de Simson-Wallace e as propriedades da reta de Simson-Wallace. Concluímos que as investigações complementam as demonstrações formais assim como a referência bibliográfica empregada na disciplina Geometria I do Profmat.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Dinâmica. Quadriláteros inscritíveis. Triângulo pedal. Ortocentro. Reta de Simson-Wallace.

INTRODUÇÃO

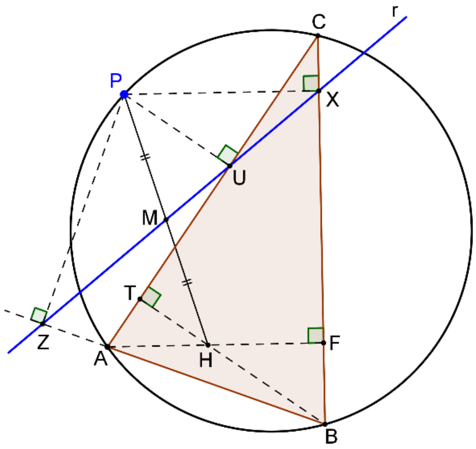
A demonstração de um teorema de geometria plana exige, geralmente, construções auxiliares (NÓS; LAGO, 2019), (GREITZER; COXETER, 1967). Softwares de geometria dinâmica facilitam essas construções auxiliares e permitem observar dinamicamente o emprego de cada uma das hipóteses na construção da tese. Dessa forma, utilizamos o software gratuito GeoGebra (GEOGEBRA, 2019) para investigar dinamicamente o teorema de Simson-Wallace e as propriedades da reta de Simson-Wallace. Esse teorema é abordado na disciplina Geometria I (MA13) do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat.

O TEOREMA DE SIMSON-WALLACE

Teorema 1. Sejam um triângulo ABC e um ponto P não situado sobre as retas suportes dos lados de ABC. Se o ponto P pertence à circunferência que circunscreve o triângulo ABC, então o triângulo pedal de P em relação a ABC é degenerado.

O Teorema 1 estabelece sob que condições o triângulo pedal, triângulo cujos vértices são os pés das perpendiculares baixadas de um ponto P, não pertencente às retas suportes dos lados de um triângulo ABC, sobre as retas suportes dos lados de ABC, é degenerado. Neste caso, os pés das três perpendiculares são colineares e a reta que passa por esses pontos é denominada reta de Simson-Wallace. Há muitas formas de se provar o Teorema 1, sendo uma delas baseada nas propriedades de quadriláteros inscritíveis (LAGO, 2018). A Figura 1 ilustra a construção da reta de Simson-Wallace no GeoGebra, assim como a propriedade do ponto médio M do segmento $\overline{PH}$, onde H é o ortocentro do triângulo ABC.

Figura 1 - Reta r de Simson-Wallace e a propriedade do ponto médio



Fonte: Lago (2018).

CONCLUSÃO

Apresentamos neste trabalho investigações dinâmicas do teorema de Simson-Wallace e das propriedades da reta de Simson-Wallace empregando o software de geometria dinâmica GeoGebra. Concluímos que o aplicativo complementa as demonstrações formais do teorema e esperamos que o trabalho motive os professores da Educação Básica e do Ensino Superior a empregarem o aplicativo nas aulas de geometria.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

GEOGEBRA. **Download GeoGebra apps**, 2018. Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 12 jul. 2019.

GREITZER, S. L.; COXETER, H. S. **Geometry revisited**. 1. ed. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1967.

LAGO, R. C. Quadriláteros inscritíveis e os teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus. Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, 2018.

NÓS, R. L.; LAGO, R. C. Investigando dinamicamente teoremas de geometria plana. In: **Cnmac 2019 XXXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, 2019, Uberlândia-MG.

A história do surgimento da geometria não Euclidiana e os modelos de Beltrami

Fernanda Mocelin Schena
ferschena@yahoo.com.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

Marcio Rostirolla Adames
marcioadames@utfpr.edu.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

Eugenio Beltrami teve papel fundamental no surgimento das geometrias não Euclidianas, embora sua participação seja frequentemente ignorada. A partir do método axiomático de Euclides, apresentamos indagações a respeito da validade pontual e global do postulado das paralelas, incluindo tentativas falhas de sua demonstração, que culminaram nos trabalhos de Saccheri, Gauss, Bolyai e Lobachevsky, indicando a possibilidade de existência de uma nova geometria, a qual só se materializou com os modelos de Beltrami, com as métricas dos espaços de curvatura constante e negativa. Porém, seus modelos são conhecidos popularmente por disco de Klein, de Poincaré e semiplano de Poincaré.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Euclidiana. Geometria não Euclidiana. Eugenio Beltrami.

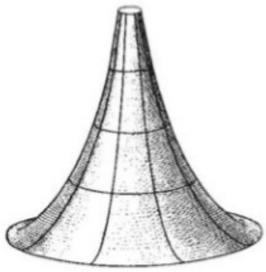
INTRODUÇÃO

O 5º postulado de Euclides causou estranheza desde a sua formulação. Muitos matemáticos tentaram reformulá-lo ou demonstrá-lo a partir dos outros postulados, enunciados previamente na obra Elementos, assim como investigaram o surgimento de contradições diante de sua respectiva negação. Saccheri e Lambert obtiveram sucesso parcial em suas tentativas de demonstração ao considerarem os ângulos superiores de determinados quadriláteros estudando sua natureza, os quais poderiam ser obtusos, agudos ou retos (equivalentes a não haver paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dela, a existirem infinitas retas paralelas e à validade do 5º postulado, respectivamente). No caso do ângulo obtuso, conseguiram encontrar uma contradição bem fundamentada, mas falharam para o ângulo agudo. Gauss, Bolyai e Lobachevsky, de modo independente, deduziram muitas consequências da validade dos quatro primeiros postulados, mas também sem encontrar uma contradição com a hipótese do ângulo agudo. Alguns resultados assim obtidos, aplicavam-se a uma geometria mais geral, a qual ainda não tinha um modelo correspondente e não era, de fato, uma geometria comprovadamente consistente.

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS E AS CONTRIBUIÇÕES DE EUGENIO BELTRAMI

O estudo das superfícies de curvatura constante e negativa, abrangendo propriedades e parametrizações de curvas em diferentes superfícies, promovido pela geometria diferencial, foi o pontapé inicial para os estudos do matemático italiano Eugenio Beltrami, com os quais foi possível encontrar modelos precisos da geometria não Euclidiana, que já vinham sendo desenvolvidos por János Bolyai e Lobachevsky, conforme Milnor (1982). Nos anos de 1868 e 1869, Beltrami publicou seus dois artigos imprescindíveis para o desenvolvimento das novas geometrias. Ele apresentou, por meio de métricas da geometria diferencial, modelos para as geometrias axiomáticas desenvolvidas por Bolyai e Lobachevsky e, assim, tornou concreta a existência da geometria não Euclidiana. Seus modelos identificavam-se com a geometria interna de uma superfície de curvatura gaussiana constante e negativa, a qual chamou de pseudoesfera – Figura 1. Seus modelos também foram desenvolvidos, acredita-se que de modo independente, por Klein e Poincaré, que apresentaram aplicações desses modelos em outras áreas do conhecimento e acabaram entrando para a história como seus criadores.

Figura 1 - Pseudoesfera



Fonte: Schreiber (2017, p. 420).

CONCLUSÃO

Diante de tamanha riqueza em relação aos fatos históricos e desenvolvimento por mais de 2000 anos das geometrias Euclidiana e não Euclidiana, deve-se evitar apresentar a geometria não Euclidiana simplesmente como uma negação da Euclidiana, mas como uma geometria consistente que só se materializou graças ao desenvolvimento da geometria diferencial através dos modelos do disco de Beltrami-Klein, do disco (conformal) de Riemann-Beltrami-Poincaré e do semiplano (conformal) de Liouville-Beltrami, segundo a nomenclatura proposta por Arcozzi (2012).

REFERÊNCIAS

ARCOZZI, N. **Beltrami's models of non-euclidean geometry.** In: Coen S. (eds) Mathematicians in Bologna 1861–1960. Basel: Birkhäuser, 2012.

MILNOR, J. Geometria hiperbólica: os primeiros 150 anos**. Boletim da Sociedade Americana de Matemática**, n. 1, p. 10, 1982.

SCHREIBER, P. **5000 Years of Geometry**: Mathematics in History and Culture. Berlim: Birkhäuser, 2015.

Matemática e Educação Financeira: uma proposta para cursos técnicos

Paulo Henrique Robel
paulorobel@seed.pr.gov.br
SEED, Londrina, Paraná, Brasil

Regina Célia Guapo Pasquini
rcgpasq@uel.br
UEL, Londrina, Paraná, Brasil

RESUMO

A Educação Financeira é um dos temas transversais da Base Nacional Curricular Comum que deve estar presente em todos os níveis da Educação Básica. Este trabalho se dedica a mostrar formas de trazer a Educação Financeira para as aulas de Matemática, especificamente em cursos técnicos de nível médio. Com base nos pressupostos que a literatura coloca sobre Educação Financeira, Trabalho e Ensino Profissionalizante, apresentamos e discutimos problemas que pertencem à prática profissional de algumas habilitações destes cursos, nos quais a Matemática ocupa papel principal na solução destes problemas. Eles são oriundos de situações diversas, pertencentes à prática profissional que, possivelmente, esses futuros profissionais enfrentarão. Além disso, mostramos as contribuições que nossa participação no PROFMAT – Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional, aliada à nossa participação em um projeto de extensão na IES que estudamos, ofereceu à nossa capacidade de trabalho fortalecendo nossos conhecimentos sobre o que ensinamos.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática. Educação Financeira. PROFMAT. Projeto de Extensão.

INTRODUÇÃO

A partir de nossa experiência docente em cursos técnicos de nível médio, elaboramos problemas reais que contemplam os conteúdos a serem abordados em alguns destes cursos. Os problemas pertencem a uma proposta fruto da dissertação de mestrado que realizamos no PROFMAT (ROBEL, 2019). Nesta comunicação pretendemos apresentar e discutir alguns destes problemas, bem como a forma de ensinar Matemática por meio deles, e com um viés na Educação Financeira. A Educação Financeira está presente no documento que estabelece o currículo da Educação Básica Pública, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) e apontado como um tema transversal, ou seja, um tema que corresponda às questões importantes e urgentes e pertinentes à vida das pessoas de um modo geral.

Salientamos que os problemas elaborados emergem da prática profissional, especificamente das diferentes habilitações do curso ao qual se destina.

A PROPOSTA: PROBLEMAS PARA OS CURSOS TÉCNICOS PROFISSIONALIZANTES

O ensino profissionalizante em nosso país possui um histórico desde o ano de 1809. Em diferentes tempos e Governos, sejam Estaduais ou Federais, o ensino profissionalizante sofreu mudanças tanto na forma organizacional como na forma administrativa, e, atualmente, está a cargo do Governo Estadual. Desde 2007 exercemos a docência em cursos técnicos de nível médio, trabalhando com diversas disciplinas em diferentes habilitações. Com a oportunidade de cursar o

Mestrado Profissional no PROFMAT, foi possível dedicarmos nossa atenção, ainda mais, sobre a forma como atuávamos nestes cursos. No PROFMAT, realizamos um estudo bibliográfico sobre a Matemática que ensinávamos, aprofundando os conhecimentos que tínhamos acerca de diferentes assuntos. Possuíamos expectativas quanto ao tratamento da Matemática nestes cursos, já que deveríamos trazer para nossas aulas situações que pudessem contribuir com a formação de nossos alunos, situações que emergissem da prática profissional que cada um enfrentaria no futuro. A partir deste aprofundamento nos estudos e aliado às nossas expectativas, elaboramos um conjunto de problemas para serem propostos nos cursos técnicos nas diferentes habilitações que atuamos. A metodologia de ensino para o desenvolvimento da proposta será guiada a partir de considerarmos o trabalho como princípio educativo. Portanto, toma-se o trabalho como um eixo que articula todo conhecimento científico, cultural e artístico gerados pela humanidade, e que, portanto, formará um cidadão conhecedor e crítico de seu meio social e que tem uma formação emancipadora que pode articular sua capacidade de pensar à sua capacidade produtiva (ROBEL, 2019, p. 35).

Em nosso trabalho de mestrado trazemos um rol de 35 problemas, com a solução analítica, o emprego de calculadora financeira (HP12C) e de planilhas eletrônicas, recursos que nossos alunos poderão utilizar em trabalhos futuros. Nossa participação no projeto de extensão “Educação Financeira: Matemática, Economia e Cidadania” orientou-nos a trazer a Educação Financeira para as nossas aulas, potencializando o valor social do nosso trabalho de dissertação.

CONCLUSÃO

Esperamos que esse trabalho contribua para a divulgação de nossa dissertação, para que outros professores façam uso dela, pois acreditamos no potencial do nosso texto, já que aliamos nossa experiência com a formação obtida por um mestrado profissional aos objetivos que os cursos técnicos de nível médio exigem.

REFERÊNCIAS

ROBEL, P. H. **Uma abordagem para a Matemática em cursos da Educação Profissional Técnica de Nível Médio a partir de contextos da prática profissional**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

Usando o teorema de Stewart para demonstrar teoremas de geometria plana

Carlos Alberto M. de Oliveira
ccoruja@hotmail.com
CPM-PR, Curitiba, Paraná, Brasil

Rudimar Luiz Nós
rudimarnos@utfpr.edu.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

Olga H. Saito
harumi@utfpr.edu.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

Apresentamos neste trabalho o teorema de Stewart e o empregamos para demonstrar outros teoremas de geometria plana. Concluímos que o teorema simplifica a demonstração de alguns teoremas de geometria plana e que o professor de matemática pode usá-lo no Ensino Médio quando se aborda trigonometria em triângulos quaisquer.

PALAVRAS-CHAVE: Arbelos. Problema de Apolonio. Cevianas. Teorema de Heron. Triângulos.

INTRODUÇÃO

O teorema de Stewart (Matthew Stewart (1717-1785): matemático escocês, foi professor na Universidade de Edimburgo) relaciona a medida de uma ceviana de um triângulo qualquer com as medidas dos lados do triângulo (OLIVEIRA, 2014). Esse teorema pode ser utilizado para demonstrar outros teoremas de geometria plana.

Teorema 1 (Stewart). Dados um triângulo ABC e um ponto D pertencente ao lado AB, vale a relação $a^2n + b^2m = c(d^2 + mn)$, onde a, b e c são as medidas dos lados de ABC, d é a ceviana CD e m e n são os segmentos determinados pela ceviana CD no lado AB.

TEOREMAS DE GEOMETRIA PLANA

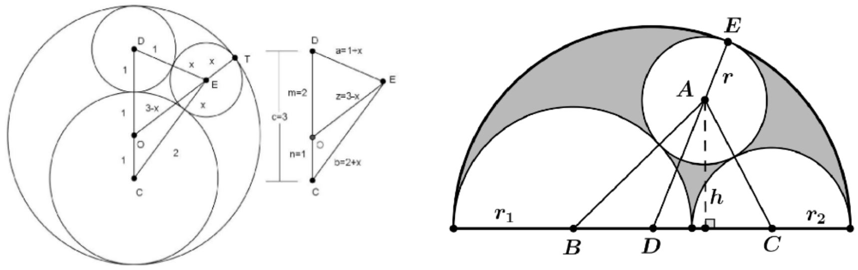
Os Teoremas 2 e 3 podem ser facilmente provados usando-se o Teorema 1. Ambos são propostos em Posamentier e Salkind (1996). A demonstração do Teorema 2 encontra-se em Nós, Saito e Oliveira (2016) e a do Teorema 3 em Nós, Saito e Oliveira (2015).

Teorema 2. A soma dos quadrados das medidas dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das diagonais.

Teorema 3. Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas das distâncias do vértice do ângulo reto aos pontos de trissecção da hipotenusa é igual a ${}^{5}/_{9}$ do quadrado da medida da hipotenusa.

Podemos empregar também o Teorema 1 para provar teoremas mais elaborados, como o teorema de Heron, uma versão do problema de Apolonio – Figura 1(a) – e a relação entre raios em uma arbelos – Figura 1(b).

Figura 1 - (a) Quatro circunferências tangentes; (b) circunferência inscrita em uma arbelos



(a) (b)

Fonte: Nós, Saito e Oliveira (2016).

CONCLUSÃO

Apresentamos neste trabalho o teorema de Stewart e o empregamos para demonstrar teoremas de geometria plana, alguns propostos em Posamentier e Salkind (1996). O uso do teorema de Stewart facilita as demonstrações e esperamos que este trabalho motive os professores de matemática da Educação Básica para efetuar pequenas demonstrações em sala de aula.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

NÓS, R. L.; SAITO, O. H.; OLIVEIRA, C. A. M. de. Arbelos e o teorema de Stewart. **Revista do Professor de Matemática**, n. 86, p. 14-18, 2015.

NÓS, R. L.; SAITO, O. H.; OLIVEIRA, C. A. M. de. Um caso particular do problema de Apolonio, os teoremas de Stewart e de Heron e a demonstração nas aulas de matemática. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 6, p. 48-59, 2016. DOI: 10.21167/cqdvol6201623169664rlnohscamo4859.

OLIVEIRA, C. A. M. de. Os teoremas de Stewart e de Heron e o cálculo da área de um triângulo em função dos lados. Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, 2014.

POSAMENTIER, A. S.; SALKIND, C. T. **Challenging problems in geometry**. New York: Dover, 1996.

Os jogos como tema de pesquisa no PROFMAT: um estudo bibliométrico

Frederico Braida
frederico.braida@ufjf.edu.br
UTFPR, Toledo, Paraná, Brasil

Rodolfo Eduardo Vertuan
rodolfovertuan@utfpr.edu.br
UTFPR, Toledo, Paraná, Brasil

Rodrigo Manoel Dias Andrade
rodrigomandrade@utfpr.edu.br
UTFPR, Toledo, Paraná, Brasil

RESUMO

Os jogos têm sido recorrentemente abordados como temática vinculada às pesquisas em diversos campos do conhecimento. Na área da Matemática, sobretudo da Educação Matemática, são vastas as pesquisas que incorporam os jogos como objetos empíricos. O principal objetivo deste artigo é analisar as dissertações produzidas no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) que se relacionam com os jogos. Metodologicamente, a pesquisa pode ser classificada como descritiva, bibliográfica e documental, de cunho predominantemente quantitativo, caracterizando um estudo bibliométrico. Os resultados ratificam a presença dos jogos como objetos de investigação privilegiados para o desenvolvimento do pensamento matemático.

PALAVRAS-CHAVE: Jogos. Bibliometria. PROFMAT.

INTRODUÇÃO

Os jogos têm sido recorrentemente abordados como temática vinculada às pesquisas em diversos campos do conhecimento (HUIZINGA, 2014; CAILLOIS, 2017). Na área da Matemática, sobretudo da Educação Matemática, são vastas as pesquisas que incorporam os jogos como objetos empíricos. Diante desse cenário, a questão que se coloca é: como os jogos têm participado como objeto de investigação das pesquisas levadas a cabo no PROFMAT?

Do ponto de vista metodológico, trata-se de um estudo bibliométrico, cuja pesquisa partiu de um levantamento das dissertações defendidas no âmbito do PROFMAT, entre 2013 e 2019, encontradas no banco de dissertações disponível no website do Programa (http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/). A coleta de dados foi realizada em 21 de julho de 2019 e deu-se pela busca do radical "jog", presente na palavra "jogo", utilizando-se, como filtro, o campo "título".

Assim, pode-se dizer que o principal objetivo deste artigo é analisar quantitativamente as dissertações produzidas no âmbito do PROFMAT que se relacionam com os jogos, compreendendo-se a recorrência dessa temática e suas associações na produção do pensamento matemático.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Ao todo, na data da coleta de dados da pesquisa, estavam disponíveis 4.592 dissertações decorrentes das pesquisas vinculadas ao PROFMAT. Desse total, 122 dissertações apresentaram o radical "jog" no título. É esse universo de 122 dissertações, que representa 2,66% das dissertações constantes no banco de dados, que foi analisado dentro do escopo da pesquisa apresentada neste artigo.

Na busca realizada, foram encontradas quatro palavras com o radical "jog". As palavras presentes nos títulos são: "jogador", presente em uma dissertação; “jogando”, presente em uma dissertação; “jogo”, presente em 44 dissertações; e “jogos”, presente em 76 dissertações.

Ao se analisar a distribuição das 122 dissertações ano a ano, verifica-se que, em 2013, foram defendidas 11 dissertações; em 2014, 13 dissertações; em 2015 e em 2016, 20 dissertações por ano; em 2017, 19 dissertações; em 2018, 34 dissertações; e, em 2019, até a data da coleta de dados, 5 dissertações. É, portanto, de se destacar o crescente número de dissertações que abordaram a temática dos jogos durante o ano de 2018, perfazendo 5,06% do total de dissertações defendidas nesse mesmo ano.

Das 75 instituições associadas ao PROFMAT (ver http://www.profmat-sbm.org.br/instituicoes-associadas/), em 51 instituições há pelo menos uma dissertação cujo título incorpora alguma palavra composta pelo radical “jog”. Em função da quantidade de dissertações que versam sobre o tema, merecem ser ressaltadas: UNESP, com oito dissertações; UFERSA, UFG, UFSJ e USP, com seis dissertações cada; e UFSCAR e UEFS, com cinco dissertações cada.

Ainda, é interessante notar algumas recorrências de palavras associadas aos vocábulos formados pelo radical “jog”, que revelam as finalidades da utilização dos jogos nas pesquisas do PROFMAT. Por exemplo, tem-se 80 dissertações que articulam a temática dos jogos à palavra “ensino”; em 21 dissertações encontra-se a palavra “probabilidade” associada; e sete dissertações relacionam os jogos às palavras “geometria” ou “geométricos” ou “geométricas”.

CONCLUSÃO

A partir da pesquisa relatada neste artigo, verifica-se que os estudos sobre jogos e educação matemática têm sido expressivos no âmbito do PROFMAT. De 2013 a 2019, encontram-se 122 dissertações (em que há uma menção explícita à temática dos jogos) desenvolvidas em 51 instituições associadas. Observa-se que não estão incluídas nessa pesquisa as dissertações que versem, por exemplo, sobre a ludicidade, que, por vezes, trazem a temática dos jogos como um tema, porém não explicitado no título. Espera-se que este estudo possa contribuir para futuras pesquisas, inclusive de cunho qualitativo, uma vez que há indícios consistentes sobre a importância que os jogos têm assumido nas pesquisas em educação matemática, sendo abordados tanto como metodologia de ensino quanto como material didático.

REFERÊNCIAS

CAILLOIS, R. **Os jogos e os homens**. São Paulo: Vozes, 2017.

HUIZINGA, J. **Homo ludens**. 8. Ed. São Paulo: Perspectiva, 2014.

Uma investigação do aplicativo Kahoot para o ensino e aprendizagem

Jaíne Carneiro
jainecarneiro@hotmail.com
UEPG, Ponta Grossa, Paraná, Brasil

Scheila Valechenski Biehl
scheilabiehl08@gmail.com
UEPG, Ponta Grossa, Paraná, Brasil

RESUMO

Atualmente, quando falamos em questões de ensino e aprendizagem, há uma grande preocupação em modificar a forma de se trabalhar em sala de aula. Com o avanço das novas tecnologias e com a grande expansão do uso de celulares nos mais diversos ambientes, existe uma relevante discussão em relação ao uso do celular no contexto escolar. Diante dessa questão, cabe a nós professores, encontrarmos subsídios para utilizar essa ferramenta de maneira eficiente e consequentemente obtermos resultados positivos em nosso trabalho. Sendo assim, neste trabalho vamos discutir sobre o uso do aplicativo *Kahoot*, o qual possibilita a aprendizagem através de *quizzes* respondidos no celular.

PALAVRAS-CHAVE: *Kahoot*. Celular. Tecnologia.

INTRODUÇÃO

Muitas vezes, quando vamos preparar as nossas aulas, uma das nossas preocupações é a de provocar estímulos para que o nosso aluno tenha mais interesse e participação ativa durante a aula. Porém, nem sempre conseguimos proporcionar esse interesse, pois segundo Mattar (2010) “as escolas têm tentado preparar o jovem para o futuro, todavia, continuam utilizando ferramentas de ensino e sistemas de avaliação do passado.” Talvez seja por esse motivo que verificamos uma grande defasagem no processo de ensino e aprendizagem. Os nossos alunos de hoje, não possuem mais o hábito de estudar através da leitura de grandiosos e pesados livros, pois estão cada vez mais estimulados pelo uso das novas tecnologias, principalmente em relação à expansão do uso da internet.

Dessa forma, no cenário atual, um dos grandes desafios que nós professores temos, é o de nos adequarmos com as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC’s) na sala de aula. Uma dessas tecnologias é o celular, o qual a maioria dos alunos já possuem. Apesar de em muitas escolas o seu uso ser restrito, nós precisamos encontrar meios para orientar os nossos alunos a utilizá-lo de forma eficiente, para assim contribuir no processo de ensino e aprendizagem. Atualmente, existem inúmeros aplicativos que podem ajudar o professor a aprimorar o seu ensino. Em particular, neste trabalho, iremos destacar o aplicativo Kahoot.

O APLICATIVO KAHOOT

O *Kahoot* é um aplicativo gratuito, disponível no endereço https://kahoot.com/, que possibilita através de um jogo interativo *online*, que o aluno aprenda brincando. Segundo Silva (2018, p. 783) apud Vallin (2017):

> De origem norueguesa, o *Kahoot* é uma ferramenta tecnológica interativa que incorpora elementos utilizados no *design* dos jogos para engajar os usuários na aprendizagem. [...] Uma das características

> dessa ferramenta é despertar a curiosidade e o envolvimento dos nativos digitais em experiências para impactar positivamente sua performance de aprendizagem.

Através desse aplicativo é possível que o aluno tenha um feedback do seu desempenho, fazendo com que se aprenda com os seus próprios erros. Para Júnior (2017, p. 1594) apud Wang (2015):

> *Kahoot* é um jogo baseado em respostas dos estudantes que transforma temporariamente uma sala de aula em um game show. O professor desempenha o papel de um apresentador do jogo e os alunos são os concorrentes. O computador do professor conectado a uma tela grande mostra perguntas e respostas possíveis, e os alunos dão suas respostas o mais rápido e correto possível em seus próprios dispositivos digitais.

Dessa forma, o aluno acaba tendo uma participação mais efetiva, pois o simples fato de ter um tempo específico para responder, e saber imediatamente se errou ou acertou, permite que ele busque chegar na alternativa correta e assim, aprenda sem perceber.

CONCLUSÃO

Podemos perceber a grande importância de se adequar com as TIC's em sala de aula para melhorar o processo de ensino e aprendizagem. Com o exponencial crescimento da utilização do celular e do acesso à *internet*, verificamos que existem vários aplicativos que podem nos auxiliar durante as nossas aulas, sendo o *Kahoot* um exemplo bastante atual e promissor. Diante das pesquisas já publicadas, já se sabe quão interessante é utilizar esse aplicativo em sala de aula, mas em breve, iremos aplicar algumas propostas de ensino com alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, e em seguida vamos fazer a discussão dos resultados obtidos.

REFERÊNCIAS

JUNIOR, J. B. B. O aplicativo Kahoot na educação: verificando os conhecimentos dos alunos em tempo real. In: **Livro de atas X Conferência Internacional de TIC na Educação–Clallenges,** p. 1587-1602, 2017.

MATTAR, J. **Games em educação**: como os nativos digitais aprendem. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

SILVA, J. B. et al. Tecnologias digitais e metodologias ativas na escola: o contributo do Kahoot para gamificar a sala de aula. **Revista Thema**, v. 15, n. 2, p. 780-791, 2018.

Estudo de projeções com uma proposta de aplicação para o Ensino Médio

Cheirum Michaael Ribeiro
cheirumicael@hotmail.com
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

Rodolfo Gotardi Begiato
begiato@utfpr.edu.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

O estudo de projeções é um assunto clássico e de extrema importância para diversas áreas da matemática. Neste contexto, o presente trabalho tem por objetivo evidenciar essa importância por meio do estudo de um exemplo prático da definição de projeção no futebol, relacionado a marcação de impedimentos com a utilização da tecnologia VAR (*video assistant referee*). Para tanto, as atividades estão divididas em dois momentos, sendo o primeiro voltado para a fixação dos conceitos teóricos através de um experimento com sombra de objetos, e o segundo, relacionado a aplicação do estudo de projeção por meio de experimento com VAR.

PALAVRAS-CHAVE: Projeção ortogonal. Experimento com sombra. VAR.

INTRODUÇÃO

O estudo de projeções é um assunto clássico no estudo de álgebra linear com muita utilidade na área de análise numérica, onde pode ser utilizado como ferramenta para resolução de diversos problemas da área, tais como fatoração de matrizes, otimização linear, otimização não linear, resolução de sistemas lineares e não lineares, etc.

Neste trabalho, propõe-se uma atividade para aplicação no Ensino Médio, durante o conteúdo referente à Geometria Analítica, permitindo assim o uso concreto de conceitos desenvolvidos em sala de aula e, adicionalmente a isso, uma introdução à noção de projeção com uma aplicação direta no futebol através do entendimento da tecnologia VAR, recentemente aprovada pela FIFA (do francês: Fédération Internationale de Football Association) na marcação de impedimentos. Conforme as regras da IFAB (The international football association board) (IFAB, 2019), que é o órgão responsável pela formulação e manutenção das regras que compõem o futebol, um jogador estará em posição de impedimento quando qualquer parte de sua cabeça, corpo ou pés (exceto mãos e braços, inclusive dos goleiros) estiver no campo adversário e mais próximo da linha de meta adversária do que a bola e o penúltimo adversário.

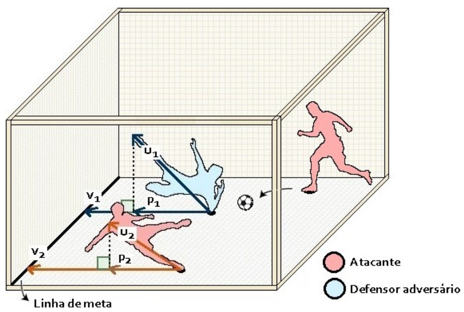
Tal proposta tem como motivação proporcionar aos estudantes uma oportunidade diferenciada de aprofundar os estudos relacionados à Geometria Analítica por meio de uma aplicação real através de um tema popular. Ademais, como consequência de um bom entendimento de conceitos matemáticos, em especial do estudo de projeções, levar os estudantes a um pleno entendimento da regra do impedimento minimizando a proposição de críticas e reclamações por vezes decorrentes do desentendimento dessa regra.

DESENVOLVIMENTO DA PROPOSTA

As atividades desta proposta serão tratadas em dois momentos distintos. No primeiro momento, o objetivo será concretizar alguns conceitos de Geometria Analítica a fim de definir projeção ortogonal com utilização de linguagem vetorial. Num segundo momento, por meio de um experimento prático, os alunos simularão situações de impedimentos aplicando diretamente a definição de projeção ortogonal a fim de verificar a existência ou não de impedimento. Neste contexto, o campo de futebol com a linha de fundo será entendido como um dos octantes do $\mathbb{R}^3$ (por conveniência trabalharemos com o 1º octante), e os jogadores envolvidos serão transformados em vetores.

Na primeira etapa, pretende-se trabalhar com a projeção ortogonal através do problema de calcular o comprimento da sombra de um objeto projetada ortogonalmente por uma lâmpada puntiforme presa ao teto. Nesse sentido, de maneira implícita, com linguagem vetorial deduzir o produto interno usual e a fórmula da projeção ortogonal em $\mathbb{R}^2$ e daí calcular o comprimento solicitado. Na segunda etapa, com a utilização de bonecos em miniatura de jogadores de futebol, propõe-se que sejam feitas várias simulações de situações de impedimentos, os quais serão analisados pelos alunos através do cálculo da projeção dos jogadores em relação ao chão, observando a regra (Figura 1).

Figura 1 - Situação para análise de impedimento



Fonte: Os autores.

CONCLUSÃO

Espera-se com esta proposta diferenciada e de caráter motivacional que os alunos consigam aprofundar seus conhecimentos relacionados à Geometria Analítica, através de uma aplicação real do estudo de projeções num contexto cotidiano popular. Vale destacar que o bom desenvolvimento desta proposta é diretamente proporcional ao envolvimento direto e ativo dos estudantes nas atividades, sendo o professor mediador do conhecimento.

REFERÊNCIAS

IFAB. **Laws of the game 2019/20**. Zurich: The International Football Association Board, 2019.

Uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem para o estudo de números inteiros

Francelise Ide Alves Ferreira
franceliseide@gmail.com
SEED, Paraná, Brasil

Magna Natalia Marin Pires
magnapires@yahoo.com.br
UEL, Londrina, Paraná, Brasil

RESUMO

Este trabalho é uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo na qual uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem (TEA) foi elaborada e aplicada na perspectiva da Educação Matemática Realística (EMR) a respeito dos números inteiros. O objetivo é realizar um estudo sobre números inteiros, considerando seus conceitos matemáticos e seu desenvolvimento histórico, elaborar, aplicar e refletir sobre uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem apoiada na abordagem da Educação Matemática Realística. Com isso foi possível confirmar que a atitude do professor, enquanto guia, desperta os princípios da EMR.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática Realística (EMR). Reinvenção guiada. Números inteiros. Trajetória de Ensino e Aprendizagem.

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa teve sua origem nas reflexões da autora a respeito das dificuldades apresentadas pelos alunos em relação à compreensão dos números negativos. De acordo com Glaeser (1985), os números negativos são conhecidos desde Diofanto (sec. III), mas por mais de 1500 anos vários obstáculos se opuseram a sua compreensão. A pergunta deflagradora se constitui em: como a EMR pode orientar um professor na elaboração e desenvolvimento do processo de construção de conceitos de números inteiros por alunos do Ensino Fundamental – Anos Finais?

Com o propósito dos alunos reinventarem os números inteiros, foi elaborada e aplicada uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem (TEA) na qual o professor vai além da elaboração de um plano de aula. Segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2010), uma trajetória está ligada aos significados de aprendizagem, de ensino e do perfil de conteúdo programático.

DESENVOLVIMENTO

De acordo com Van Den Heuvel-Panhuizen e Drijvers (2014), a EMR envolve princípios fundamentais para o ensino da Matemática que estão ligados a ela de modo inalienável. A maioria deles foi articulada por Treffers em 1978 e reformulados ao longo dos anos. A autora distingue seis princípios: da atividade (estudantes são participantes ativos do seu processo de aprendizagem); da realidade (primeiro aplicar a matemática para resolver problemas da vida real e a segunda é que a educação matemática deve partir de situações problema com significados para os estudantes); de nível (os estudantes passam por níveis de entendimento); de entrelaçamento (os conteúdos de matemática não podem ser considerados de forma isolada); de interatividade (significa que aprender matemática não é só uma atividade individual, mas também social) e de orientação (professores devem ter papel proativo na aprendizagem dos alunos). As tarefas pensadas foram aplicadas em uma sala de aula de 7º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais. O procedimento de análise ocorreu com o relato das aulas seguido de uma análise interpretativa à luz da EMR, identificando o surgimento dos seus princípios, além de buscar possíveis relações com o desenvolvimento histórico.

CONCLUSÃO

Com esta pesquisa qualitativa percebemos que ao elaborar uma TEA há a necessidade de se fazer uma reflexão mais profunda do que um plano de aula exige. Percebemos também o surgimento dos princípios da EMR durante a aplicação. Uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem, segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2010) não só explica em que ponto os alunos devem chegar, mas também ilumina o amplo caminho que seguem, oferecendo ao professor um norte apresentando os objetivos a serem alcançados pelos alunos, desde uma perspectiva em longo prazo até os aspectos microdidáticos do cotidiano das aulas de matemática.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

GLAESER, G. Epistemologia dos números relativos. **Boletim GEPEM**, n. 17, p. 29 - 124, 1985.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Los niños aprenden matemáticas.** México: Correo del maestro: La vasija, 2010.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.; DRIJVERS, P. **Realistic mathematics education**. London: Springer, 2014. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_170. Aceso em: 14 dez. 2018.

Logaritmo e a régua de cálculo: uma proposta de ensino

Rose Elizângela Martins Pedrosa
rose_elizangela@hotmail.com
SMED, Araucária, Paraná, Brasil

Marcio Rostirolla Adames
marcioadames@utfpr.edu.br
UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

Esse artigo apresenta uma proposta de ensino de logaritmo utilizando uma abordagem histórica e investigativa. Nessa perspectiva, a régua de cálculo é usada como ferramenta de ensino na resolução de atividades que exploram o conceito e as propriedades dos logaritmos.

PALAVRAS-CHAVE: Logaritmos. Régua de cálculo. História da matemática. Proposta de ensino.

INTRODUÇÃO

A história da matemática pode ter um papel importante no ensino da matemática, contudo é preciso que a história não seja introduzida apenas como uma coleção de datas, fatos e nomes. De acordo com Roque e Pitombeira (2012):

> A Matemática se desenvolveu, e continua a se desenvolver, por meio de problemas. O papel da história da Matemática pode ser o de exibir estes problemas, muitas vezes ocultos no modo como os resultados se formalizaram.

Nesse espírito, descrevemos nesse artigo uma proposta didática que busca desenvolver o conceito de logaritmo em uma perspectiva da época de sua criação. Destacamos em nossa abordagem a utilização da régua de cálculo. Uma versão mais elaborada dessa proposta pode ser encontrada em Pedrosa e Adames (2018).

CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE LOGARITMOS

Os logaritmos foram desenvolvidos no final do século XVI e início do século XVII, inicialmente por John Napier e, posteriormente, por Henry Briggs. De acordo com Boyer e Merzbach (2012), Napier e Briggs procuravam métodos para simplificar cálculos de multiplicação e divisão. Para ilustrar essa dificuldade histórica, sugerimos a aplicação da atividade a seguir.

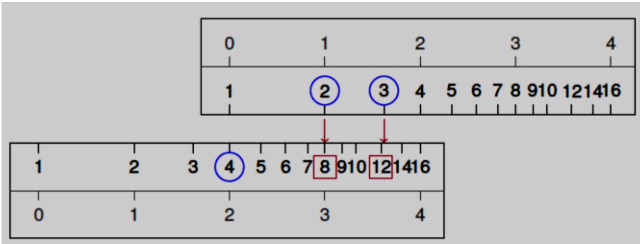
Atividade: Calcule, sem utilizar celular ou outra ferramenta eletrônica, 2048×524288.

Se tivéssemos uma tabela contendo potências de base 2, veríamos que $2048 \times 524288 = 2^{11} \times 2^{19} = 2^{30} = 2147483648$. Napier utilizou uma ideia similar a esta na criação dos logaritmos. A utilização de uma tabela como esta seria mais útil se todos os números naturais pudessem ser escritos como uma potência de base 2. Dessa forma, deparamo-nos com o seguinte problema: qual o valor de z, tal que $2^z = 3$? Ao expoente z, chamamos logaritmo de 3 na base 2.

Definição: Chamamos o expoente z em que devemos elevar um número positivo a para obter o número $x > 0$ de logaritmo de x na base a e denotamos $z = \log_a x$.

Na Figura 1 é possível observar como o produto 4×3 é calculado utilizando a régua de cálculo feita com uma escala logarítmica. O número 1 da régua superior deve estar sobre o número 4 e a resposta estará abaixo do número 3. O procedimento funciona, pois estamos somando a distância de 0 até $\log_2 4 = 2$ com a distância de 0 até $\log_2 3 \approx 1{,}6$, o que dá 3,6 e $2^{3{,}6} \approx 12$.

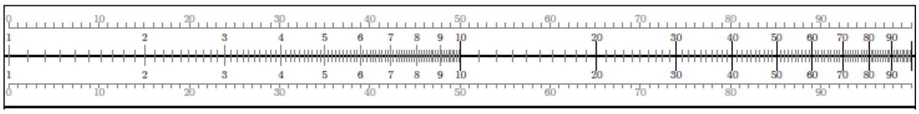
Figura 1 - Régua de cálculo de base 2



Fonte: Autoria própria.

A régua da Figura 2 tem uma base próxima de 1 e com ela é possível realizar operações mais complexas. Essa régua está disponível em tamanho maior em Pedrosa e Adames (2018).

Figura 2 - Régua de cálculo de base 1,0471



Fonte: Autoria própria.

CONCLUSÃO

Esse trabalho apresentou uma proposta de ensino conduzida pela investigação histórica em sala de aula, fazendo uso de materiais manipuláveis.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. São Paulo: Blücher, 2012.

PEDROSA, R. E. M.; ADAMES, M. R. **Logaritmo e a régua de cálculo:** uma proposta de ensino. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/19KarLVyN5INqXv-LPFGhDdKoHZBfesiQ/view?usp=sharing¿. Acesso em: 30 jul. 2019.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de História da Matemática**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

RTr
Revista Transmutare

Ensino de probabilidade com o jogo de dados de Mozart

Djones A. Boni
djboni@gmail.com
UTFPR, Toledo, Paraná, Brasil

Andrés E. C. Salazar
andressalazar@utfpr.edu.br
UTFPR, Toledo, Paraná, Brasil

Rodrigo M. D. Andrade
rodrigomandrade@utfpr.edu.br
UTFPR, Toledo, Paraná, Brasil

RESUMO

Neste trabalho é revisado um dos jogos musicais com dados mais comuns, o jogo de dados de Mozart. O jogo consiste em compor melodias por meio do lançamento de dois dados comuns. A partir deste jogo musical é possível desenvolver conceitos de probabilidade, podendo ser utilizado pelo professor como ferramenta de ensino e aprendizagem deste conteúdo. É descrito o funcionamento do jogo e, em seguida, é analisado um dos aspectos probabilísticos do jogo.

PALAVRAS-CHAVE: Probabilidade. Jogos musicais. Metodologia de ensino de probabilidade.

INTRODUÇÃO

O ensino de probabilidade, e também de outros conteúdos, coloca frente ao professor o desafio de instigar nos alunos o desejo de aprender. Utiliza-se para esse fim brincadeiras e jogos. Neste trabalho revisamos o funcionamento do jogo de dados de Mozart e analisamos um dos aspectos probabilísticos do jogo.

O JOGO DE DADOS DE MOZART

O jogo de dados de Mozart consiste em lançar dois dados comuns para compor uma melodia de valsa (minueto) baseada na aleatoriedade do lançamento dos dados. Mozart compôs 16 grupos de 11 compassos, totalizando 176 compassos. A composição é realizada selecionando um compasso de cada um dos 16 grupos a partir do resultado da soma de dois dados (MOZART, 1793).

A Figura 1 mostra em suas colunas cada um dos 16 grupos de 11 compassos. Os números de 1 a 176 nas células expressam o número do compasso a ser extraído da partitura. Para compor uma melodia, lançamos um par de dados 16 vezes, selecionando o compasso correspondente à soma dos dois dados em cada uma das colunas. Então basta tocar os compassos na sequência.

Por exemplo, suponhamos que lancemos um par de dados comuns 16 vezes, obtendo as seguintes somas: 5, 7, 10, 8, 8, 4, 6, 6, 6, 7, 6, 5, 5, 9, 5 e 6. A melodia é então composta pela seguinte sequência de compassos: 40, 157, 42, 53, 99, 55, 36, 107, 25, 71, 64, 34, 67, 115, 52 e 93.

Figura 1 - Tabela de lançamentos dos dados do jogo de dados de Mozart. Colunas correspondem aos compassos e linhas à soma dos dados

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Fonte: García et al. (2013).

ENSINO DE PROBABILIDADE ATRAVÉS DO JOGO

Pergunta: Qual a probabilidade do primeiro compasso ter numeração maior que 100?

Resposta: O espaço amostral é formado pelos números da primeira coluna da tabela e o evento do qual queremos determinar a probabilidade é *E* = {104, 119, 148, 152}. Cada um dos elementos de *E* é mutuamente exclusivo, portanto podemos calcular P(*E*) = P(104) + P(119) + P(148) + P(152). Temos as seguintes probabilidades: P(104) = 1/6; P(119) = 4/36; P(148) = P(152) = 5/36. Assim, a probabilidade do primeiro compasso ter numeração maior que 100 é P(*E*) = 5/9.

CONCLUSÃO

A partir do jogo de dados de Mozart o professor pode desenvolver com alunos diversos conceitos de probabilidade. Por exemplo: resultados equiprováveis para o lançamento de um dado; resultados não equiprováveis para a soma de dois dados; probabilidade condicional; eventos mutuamente exclusivos. Também é possível trabalhar conceitos simples de combinatória, podendo servir como introdução a este segundo conteúdo.

REFERÊNCIAS

GARCÍA, Y. R.; SALAMANCA, P. R.; MORA, D. C. **El juego de dados de Mozart**: Un recurso didáctico para la ensenãnza-aprendizaje de la probabilidad. VII CIBEM, 2013.

MOZART, W. A. **Musikalisches Würfelspiel, K.516f**. Bonn: Editor N. Simrock, 1793.

Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem para o ensino de função quadrática

Anderson Leandro Gonçalves Quilles
a_quilles@hotmail.com
UEL, Londrina, Paraná, Brasil

Magna Natalia Marin Pires
magna@uel.br
UEL, Londrina, Paraná, Brasil

RESUMO

Este trabalho apresenta uma THA para o ensino de função quadrática, na perspectiva de Simon (1995) e da Resolução de Problemas proposta por Onuchic e Allevato (2011). O objetivo é identificar quais aspectos da construção de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem contribuem para a formação de um professor de Matemática. O resultado da pesquisa aponta que a elaboração e exploração de THA proporcionam ao educador momentos de reflexão a respeito de como conduzir o processo de ensino quando estudantes se deparam com problemas que envolvem o conteúdo de funções e as possíveis possibilidades de explorar as propriedades das funções quadráticas.

PALAVRAS-CHAVE: Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem. Resolução de problemas. Funções quadráticas.

INTRODUÇÃO

Na tentativa de refletir a respeito de caminhos que podem ser trilhados por professores, junto com seus alunos, e o conhecimento matemático, desenvolvemos uma pesquisa para colaborar com a formação do autor desse projeto e, o produto desse trabalho é apresentado em forma de uma proposta didática para o ensino de função quadrática. O trabalho desenvolveu-se de acordo com as seguintes etapas: 1) Estudo da Resolução de Problemas na Educação Matemática, síntese a respeito de pesquisas desenvolvidas por Polya (1994), Schoenfeld (2007), Onuchic (1999) e Van de Walle (2009); 2) Organização de um roteiro para uma aula na perspectiva da Resolução de Problemas; 3) Apresentação da Trajetória Hipotética de Aprendizagem na perspectiva de Simon (1995); 4) Elaboração de uma alternativa para o ensino de função quadrática, por meio de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) na perspectiva da Resolução de Problemas; 5) Apresentação do conceito de função quadrática; 6) Análise das contribuições desse processo na formação de um professor de Matemática.

FUNÇÃO QUADRÁTICA, RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E THA

Ao estudar uma função do 2º grau, é importante que o aluno identifique que o gráfico será uma parábola, no plano cartesiano, com a concavidade voltada para cima ou para baixo, possibilitando a dedução se a função terá um valor máximo ou mínimo, além de identificar (caso existam) os pontos em que a parábola intercepta os eixos coordenados. Assim o aluno terá oportunidade de desenvolver estratégias para o cálculo das coordenadas do vértice de uma parábola, obter o conjunto imagem de uma função quadrática, bem como resolver problemas correspondentes à otimização de situações interpretadas por meio de funções do 2º grau. A proposta é desenvolver o conteúdo função quadrática por meio de uma THA. Uma das características da THA é ter como hipótese os conhecimentos dos estudantes acerca do objeto matemático a ser estudado, que será confirmado ou não no desenvolvimento da mesma. Assim a THA não é um processo estanque, na verdade é mutável, flexível e vai ao encontro das necessidades e especificidades dos estudantes em relação ao conteúdo a ser estudado. Um dos problemas utilizados na trajetória foi retirado da Prova do ENEM 2017. A resolução do problema é desenvolvida utilizando conceitos matemáticos da Educação Básica e também por meio do Cálculo Diferencial e Integral. Na análise evidenciamos os passos que professores e alunos podem dar em uma aula de resolução de problemas e como os conteúdos matemáticos podem ser explorados.

CONCLUSÃO

A elaboração de uma THA exige ações que colocam o autor nesse rico processo de estudar, hipotetizar, refletir, testar e reelaborar, já que a construção das THA dá ao professor a possibilidade de construir seu projeto de decisões, baseado em suas melhores suposições de como o conhecimento poderia ser processado.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 5569864.

REFERÊNCIAS

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

SCHOENFELD, A. H. Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. **The International Journal in Mathematics Education**, v. 39, p. 537-551, 2007.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective**. Journal for Research in Mathematics Education**, v. 26, n. 2, p. 114-145, 1995.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

RTr
Revista Transmutare

Sobre os números de Catalan

Felipe Pereira Gomes
felipegomes1501@gmail.com
UEPG, Ponta Grossa, Paraná, Brasil

Marciano Pereira
marciano@uepg.br
UEPG, Ponta Grossa, Paraná, Brasil

RESUMO

Presentes em problemas de combinatória, álgebra, ciência da computação, teoria dos grafos e geometria, os números de Catalan são pouco conhecidos no Brasil e possuem pouca literatura na língua portuguesa. O objetivo deste trabalho é um estudo sobre os números de Catalan, apresentando seu histórico, propriedades e algumas aplicações que podem ser usadas em sala de aula.

PALAVRAS-CHAVE: Números de Catalan. Sequência numérica. Aplicações dos números de Catalan. Propriedades dos números de Catalan.

INTRODUÇÃO

Os números de Catalan são assim chamados em homenagem ao matemático belga Eugène Charles Catalan (1814-1894), responsável pela divulgação e demonstração de propriedades dessa sequência numérica. No entanto, atribui-se a descoberta de tais números ao notável matemático suíço Leonard Euler, por volta de 1751.

Os números de Catalan são definidos por

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n},$$

para todo inteiro $n \geq 0$. Os seis primeiros termos da sequência numérica de Catalan são 1, 1, 2, 5, 14 e 42. Euler propôs um problema ao matemático alemão Christian Goldbach, onde procurava descobrir de quantas maneiras é possível desenhar as diagonais de um polígono convexo de $n \geq 3$ lados, sem que haja interseção entre elas. Da troca de correspondências entre eles, surgiu a primeira forma de encontrar os números de Catalan, através da fórmula recursiva

$$C_n = \frac{4n-2}{\mathrm{n}+1} \cdot C_{n-1}, \text{em que } n \geq 1 \text{ e } C_0 = 1.$$

Já em 1756, o matemático húngaro Johann Von Segner publicou uma segunda maneira de encontrar os números de Catalan usando a forma recursiva

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0, \text{ na qual } n \geq 1 \text{ e } C_0 = 1.$$

PROPRIEDADES

Os números de Catalan apresentam diversas propriedades, dentre as quais destacamos as definidas nos Teoremas 1 e 2.

Teorema 1. Para $n > 0$, o número de Catalan C_n é ímpar se, e somente se, n é um número de Mersenne, ou seja, da forma $n = 2^m - 1$, sendo $m \geq 1$.

Teorema 2. Os únicos números de Catalan que são primos são C_2 e C_3.

APLICAÇÕES

Os números de Catalan surgem na resolução de problemas envolvendo contagem, dos quais alguns exemplos são descritos a seguir.

Exemplo 1. De quantas maneiras podemos dividir um polígono convexo em triângulos, desenhando suas diagonais, de modo que não haja interseção entre elas? A solução para esse problema, ou seja, o número de triangulações de um polígono convexo de $n+2$ lados, é dada pelos números de Catalan C_n, com $n \geq 1$.

Exemplo 2. Em uma malha quadriculada de tamanho $n \, x \, n$, de quantas maneiras partindo do ponto (0,0) podemos chegar ao ponto (n, n), sendo possível apenas passos de comprimento 1 para a direita ou para cima, desde que o caminho não cruze a diagonal da malha que une os pontos (0,0) e (n, n)?

CONCLUSÃO

Neste trabalho discutimos alguns aspectos dos números de Catalan, desde sua definição, passando por algumas de suas principais propriedades e mostrando algumas de suas aplicações. Nesse sentido, percebemos que os números de Catalan são úteis para a resolução de diversos problemas matemáticos e que sua sequência numérica é bastante interessante e muito importante. Por fim, acreditamos que esse trabalho possa contribuir com a inserção de bibliografia sobre o tema na língua portuguesa e, com isso, incentivar e difundir o estudo dos números de Catalan.

REFERÊNCIAS

JUNIOR, N. G. B. **Bijeções envolvendo os números de Catalan**. Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, Campinas, 2014. Disponível em: http://taurus.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/307511/1/BrasilJunior_NelsonGomes_M.pdf. Acesso em: 25 fev. 2019.

KOSHY, T. **Catalan Numbers with applications**. New York: Oxford University Press, 2008.

KOSHY, T.; SALMASI, M. Parity and primality of Catalan Numbers. **The College Mathematics Journal**, v. 37, n. 1, p. 52-53, 2006.

Bandeira Nacional e a Matemática: explorando alguns conceitos de geometria

João Benetton Junior
joaobenettonjunior@gmail.com
UEL, Londrina, Paraná, Brasil

Regina Célia Guapo Pasquini
rcgpasq@uel.br
UEL, Londrina, Paraná, Brasil

RESUMO

A Bandeira do Brasil possui uma história que se inicia no ano do descobrimento. Foram diversas as investidas do Governo a fim de construir um modelo que revelasse ideias e atendesse a critérios políticos da época. Enfim, temos hoje uma Bandeira Nacional que foi criada em 1970 por um grupo de 4 pessoas. Assim como toda Bandeira que representa um país, estado ou município, ela possui regras para a sua construção. Com base nestas regras, elaboramos uma proposta para abordar conceitos matemáticos a partir da construção da Bandeira Nacional. Com esta comunicação temos por objetivo disseminar o trabalho de dissertação que a contém, discutindo suas potencialidades para o ensino de Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais. As construções propostas podem ser realizadas por meio de régua e compasso ou mediante a utilização do software GeoGebra, com objetivos distintos. Destacamos ainda, que o tema é propício para que a interdisciplinaridade ocorra, já que ao trazer esta temática à tona podemos integrar Arte e História às aulas de Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: PROFMAT/UEL. Bandeira Nacional. Construções geométricas.

INTRODUÇÃO

Uma rápida visita à história da Bandeira do Brasil é capaz de revelar os aspectos da trajetória que ela sofreu ao longo dos anos, desde que fora instituída na sua primeira versão. Foram diversas as alterações sofridas pela bandeira ao longo do tempo, modificando-a totalmente para o "modelo" que hoje conhecemos. Tal "modelo" é descrito de modo pormenorizado em uma normativa. Ali, determina-se como deve ser confeccionado um exemplar da atual Bandeira Nacional. Dentre as diversas curiosidades, face às explicações para todos os detalhes da Bandeira atual, destacamos as formas geométricas que a compõem: o retângulo, o losango, o círculo e os arcos. Além das estrelas que são formadas por pentágonos sobrepostos de diferentes tamanhos, no total de 4.

Em posse destes detalhes, construímos uma proposta para o tratamento de conceitos de Geometria para os anos finais do Ensino fundamental. Nesta comunicação apresentamos algumas tarefas desta proposta, com sugestões de encaminhamento. A proposta é resultado de nosso trabalho de dissertação desenvolvido para a conclusão do PROFMAT/UEL. Com base em nossa experiência e, visto a potencialidade de utilizarmos o GeoGebra, um software de geometria dinâmica gratuito, apresentamos as tarefas em duas etapas, com objetivos distintos: 1. Construção com régua e compasso; 2. Construção com o GeoGebra (BENETTON, 2019).

A BANDEIRA NACIONAL: MÃOS À OBRA PARA A SUA CONSTRUÇÃO

A Bandeira Nacional é um dos quatro símbolos nacionais. Possui uma história rica e curiosa acerca dos detalhes que contém. Após diversos "modelos" distintos com formas e desenhos múltiplos e variados, atualmente a Bandeira é composta por figuras geométricas que obedecem às regras descritas por uma normativa, a Lei No. 5700/71. A sua criação é atribuída a quatro personagens:

> Sua criação ficou a cargo de Raimundo Teixeira Mendes (1855–1927) que foi um filósofo, matemático e positivista, Miguel Lemos (1854–1917) que na época foi diretor do Apostolado Positivista do Brasil, Manuel Pereira Reis (1837–1922) foi um renomado astrônomo e, Décio Vilares (1851–1931) foi um renomado pintor na época. Eles utilizaram as mesmas cores verde e amarelo baseadas nas Casas Reais, porém dando um novo significado. Substituíram também o brasão situado ao centro pelo círculo com as constelações, já mencionadas acima (BENETTON, 2019, p. 31).

Para uma construção da bandeira, atendendo a Lei com o devido rigor, são necessários conhecimento de diversos conceitos de Matemática, como polígonos, proporcionalidade, unidades de medida e as construções geométricas destes polígonos. Com base nesta observação, construímos uma proposta para o tratamento destes conceitos a partir desta temática – a Bandeira Nacional. E o fizemos, sob dois aspectos, utilizando régua e compasso e por meio do GeoGebra (BENETTON, 2019). A proposta torna possível trabalhar, sob uma forma interdisciplinar, Arte e História nas aulas de Matemática. Apresentamos essa possibilidade em nosso trabalho de dissertação. Acreditamos que os conceitos abordados na proposta, a partir de tarefas sob essa temática, podem aguçar a curiosidade do aluno e contribuir para a aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos.

CONCLUSÃO

O trabalho com temáticas pode despertar a curiosidade de nossos alunos e fomentar a participação deles. A Bandeira Nacional é um exemplo disso e nosso trabalho de dissertação revela aspectos da proposta citada. Convém salientar que a nossa prática em sala de aula pode ser aprimorada a partir dos conhecimentos advindos da formação que realizamos no Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT/UEL, que foi fundamental para que pudéssemos nos tornar sensíveis ao tratamento deste tema na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

BENETTON, J. J. **A Matemática da Bandeira Nacional: régua, compasso, GeoGebra, e mãos à obra**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

Sobre o PROFMAT na UEL: alguns dados junto ao olhar dos egressos do programa

Regina Célia Guapo Pasquini
rcgpasq@uel.br
UEL, Londrina, Paraná, Brasil

Ana Lucia da Silva
analucia@uel.br
UEL, Londrina, Paraná, Brasil

RESUMO

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional envolve Instituições de Ensino Superior de todo o país. A Universidade Estadual de Londrina participa deste programa desde o início da implantação em nível nacional, ou seja, desde o ano de 2011. Desde então vários profissionais foram formados em nossa Universidade, não somente da cidade de Londrina, mas de uma vasta região circunvizinha, extrapolando inclusive os limites do estado do Paraná. Como docentes do programa, apresentamos nesta comunicação alguns dados do PROFMAT/UEL e apontamos impactos desta formação na vida dos estudantes que concluíram o curso.

PALAVRAS-CHAVE: PROFMAT/UEL. Formação continuada. Mestrado profissional.

INTRODUÇÃO

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT é oferecido por um conjunto de Instituições de Ensino Superior cuja coordenação está a cargo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). O PROFMAT tem como objetivo suprir uma demanda de formação em nível de pós-graduação dos professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que buscam aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência. Destacamos nossa participação nesse programa, a qual, por meio deste trabalho, apresentamos.

Desde o início do PROFMAT, segundo relatório intitulado “Avaliação e possíveis impactos” (PROFMAT, 2017), em nível nacional, em março de 2017 havia 3000 dissertações defendidas (Trabalho de conclusão de Curso) disponíveis e de fácil acesso no site http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes. Este dado revela a abrangência e a produção massiva do programa como um todo na conjuntura nacional dos cursos de mestrado profissionalizante em Matemática no país. Apresentamos nesta comunicação um estudo analítico de alguns dados que compõem a atuação do PROFMAT/UEL em nossa Instituição. Além disso, apontamos algumas contribuições desta formação por meio da voz de alguns estudantes egressos do programa, cumprindo e corroborando ao que este evento se propõe.

UM RETRATO DO PROFMAT/UEL: UMA ANÁLISE

A cidade de Londrina sedia o NRE-Londrina, Núcleo Regional de Ensino de Londrina, que contempla 19 municípios da região circunvizinha. Nas escolas administradas pelo NRE atuam, aproximadamente, 600 professores de Matemática no Ensino Fundamental. São muitas as escolas públicas atendidas, apenas nesta região. Além disso, Londrina é um município localizado estrategicamente no Estado do Paraná, próximo à divisa com o Estado de São Paulo e, consequentemente, de municípios próximos a ela. Essas características demonstram que os Programas de Pós-graduação em Matemática que atendam essa população são bem-vindos nesta região e que, sem dúvida, podem causar um impacto na formação dos professores de Matemática e, consequentemente, na educação pública.

Atualmente o programa possui 11 professores que orientam trabalhos de dissertações em diversas áreas. Temos professores com formação em nível de Doutorado (2 em doutoramento) nas áreas de Matemática, Matemática Aplicada e Educação Matemática.

Com informações que revelam os caminhos trilhados pelos estudantes do PROFMAT/UEL, apresentamos nesta comunicação, ainda que de modo breve, dados que revelam os impactos que o programa possui em nossa região. Junto a isso, trazemos alguns depoimentos de estudantes egressos do programa que podem revelar informações importantes no estabelecimento de políticas públicas que visem aprimorar a formação docente de professores de Matemática da Educação Básica.

CONCLUSÃO

O PROFMAT/UEL está em funcionamento desde o ano de 2011. Foram diversos os trabalhos de dissertação apresentados até o momento, envolvendo as diferentes áreas da Matemática no que tange aos conteúdos da Educação Básica. Como o corpo docente é diversificado em relação à formação e área de atuação dos professores na UEL, as temáticas são ricas e desenvolvidas sob diferentes aspectos, o que torna o resultado ainda mais significativo.

REFERÊNCIAS

PROFMAT. **Avaliações e possíveis impactos**, 2017. Disponível em: https://www.profmat-sbm.org.br/. Acesso em: 31 ago. 2019.