

FEET - um Sistema de Cálculo 3D com Elementos de Aresta

J. A. A. Santos, Fischborn M.,
J. P.A. Bastos, N. Sadowski

Resumo

Neste artigo são apresentados alguns conceitos básicos usados na implementação do sistema computacional FEET (Finite Edge Element - Tetrahedral). Este sistema utiliza elementos de aresta tetraédricos com a formulação potencial vetor magnético. Os elementos de aresta têm os graus de liberdade relacionados com as arestas dos elementos. A utilização destes elementos evita certas dificuldades como: perdas de precisão devido aos erros de cancelamento em regiões ferromagnéticas, modos espúrios, imposições de calibres, etc. Neste artigo aborda-se também um conceito de direcionamento de arestas. Resultados numéricos obtidos através das formulações estática e quase-estática são apresentados.

I. INTRODUÇÃO

A solução de problemas eletromagnéticos com o método dos elementos finitos, em termos do potencial vetor magnético \mathbf{A} , tem recebido um considerável interesse dos pesquisadores em todo o mundo. Em problemas bidimensionais, somente a componente \mathbf{A}_z é empregada e o problema é transformado num problema escalar [5]. Em aplicações tridimensionais, o cálculo de campos magnéticos é usualmente baseado em formulações que utilizam potenciais escalares. Entretanto, estas formulações apresentam erros de cancelamento em regiões de alta permeabilidade

ou dificuldades em regiões multiplamente conexas. Estes problemas não aparecem quando o potencial vetor magnético é utilizado. Entretanto, neste caso, existem penalidades do ponto de vista computacional devido à presença de três componentes incógnitas por nó e a necessidade de se forçar um calibre [8].

Uma alternativa que vem sendo adotada com muito sucesso quando se trabalha com variáveis vetoriais no método dos elementos finitos é o uso de elementos de aresta. Os elementos de aresta se baseiam em funções de forma vetoriais, têm uma incógnita por aresta (menos requisito de memória que os elementos nodais), e são livres dos modos espúrios [1,2,3,4].

A aproximação do potencial vetor magnético no interior de um elemento de aresta tetraédrico, é feita através da seguinte expressão:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{A}_i \mathbf{W}_i \quad (1)$$

onde \mathbf{A}_i é a circulação do potencial vetor sobre a aresta i e \mathbf{W}_i é um vetor que possui sua projeção constante sobre a aresta i .

J. A. A. Santos é professor do Cefet-PR - Unidade de Medianeira, Doutor em Engenharia Elétrica, na área de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos pela Universidade Federal de Santa Catarina.

Fischborn M. é professor do Cefet-PR - Unidade de Medianeira, Mestre em Engenharia Elétrica, na área de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos pela Universidade Federal de Santa Catarina.

J.P.A. Bastos e N. Sadowski são Doutores em Engenharia Elétrica e professores na Universidade Federal de Santa Catarina.

II. CONTINUIDADE DO POTENCIAL VETOR

Suponha que dois tetraedros tenham uma aresta em comum, sendo i o número da aresta no tetraedro K , e j no tetraedro L . O termo $A_i^K W_i$ do potencial vetor em K (tangente a

aresta i) pode ser feito igual ao termo $A_j^L W_j$ em L (tangente a aresta j), simplesmente impondo:

$$A_i^K W_i = \pm A_j^L W_j \quad (2)$$

onde o sinal \pm é devido à direção da função vetorial W_i que pode ser oposta à direção da função W_j . Aplicando a equação (2), através de toda malha de tetraedros, tem-se uma incógnita por aresta, e o potencial torna-se tangencialmente contínuo através de todas as arestas. De fato, também o potencial é contínuo através de todas as faces.

III. COORDENADAS HOMOGÊNEAS

As coordenadas homogêneas tridimensionais são definidas da seguinte maneira: considere que P seja um ponto no interior do tetraedro que tem como coordenadas cartesianas (x, y, z) . Suponha que os volumes V_1, V_2, V_3 e V_4 dos tetraedros menores (Fig. 1) são formados por três dos vértices originais (x_i, y_i, z_i) do tetraedro maior e o ponto P . Então as coordenadas homogêneas L_1, L_2, L_3 e L_4 de P são definidas por:

$$L_1 = \frac{V_1}{V} \quad L_2 = \frac{V_2}{V} \quad L_3 = \frac{V_3}{V} \quad L_4 = \frac{V_4}{V} \quad (3)$$

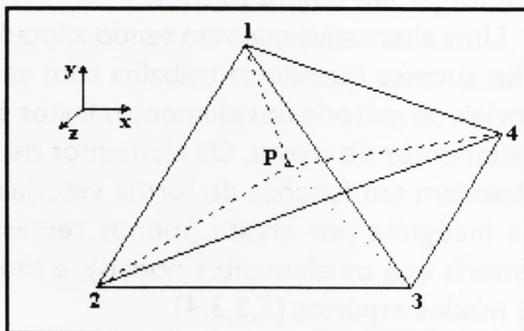


Fig. 1 - Tetraedro dividido em quatro tetraedros menores.

O volume do tetraedro é dado por:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (4)$$

As quatro coordenadas homogêneas satisfazem a seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^4 L_i = 1 \quad (5)$$

Nota-se que:

$$V_1 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (6)$$

e

$$V_2 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (7)$$

com expressões similares para V_3 e V_4 . Contudo, é visto ser possível escrever a relação:

$$L_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \quad i = 1, 4 \quad (8)$$

onde V é o volume do elemento, a_i, b_i, c_i e d_i são os cofatores, e x, y e z são as coordenadas do baricentro do elemento.

IV. FUNÇÕES DE FORMA

As funções de forma vetoriais para as arestas são (Fig. 2) [6,7]:

$$W_i = (L_{i_1} \nabla L_{i_2} - L_{i_2} \nabla L_{i_1}) I_i \quad (9)$$

onde os números das arestas associadas aos nós i_1 e i_2 são definidos na Tabela 1, e I_i (comprimento da aresta) é incluído para normalizar W_i .

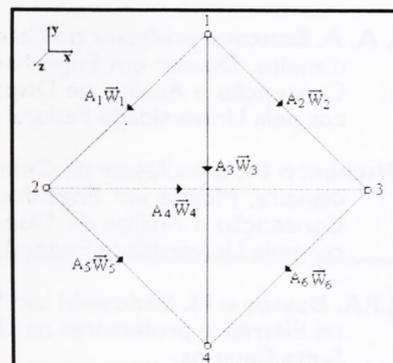


Fig. 2 Elemento de aresta.

Tabela 1
Arestas associadas aos nós

Aresta i	Nó i ₁	Nó i ₂
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	2	3
5	2	4
6	3	4

V. DIREÇÕES DAS FUNÇÕES DE FORMA

Para assegurar a continuidade tangencial do potencial vetor é necessário definir uma direção para as funções de forma na malha de elementos finitos. A direção de cada função por aresta na malha de elementos finitos é obtida através da comparação entre as direções das arestas de cada elemento com a direção das arestas definidas em um elemento de referência (Fig. 3). Se a direção de qualquer uma das arestas do elemento comparado não tem a mesma direção que a sua respectiva aresta no elemento de referência, a função de forma para aresta é multiplicada por -1. Por exemplo, se a direção da aresta do elemento comparado for do nó 2 para o nó 1, a função de forma para aresta 1 é multiplicada por -1.

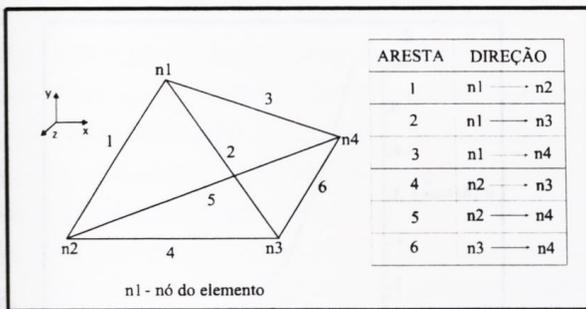


Fig. 3 Elemento de referência.

VI. FORMULAÇÕES

As equações a serem resolvidas para o caso estático e para correntes induzidas em baixas frequências são apresentadas abaixo:

- **Caso estático**

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} \tag{10}$$

aplicando-se o método de Galerkin na equação (10), tem-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{W}_j) \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{W}_i \right) A_i d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{J} d\Omega, j=1,6 \tag{11}$$

onde \mathbf{J} é a densidade de corrente, μ a permeabilidade e Ω é o domínio de estudo.

- **Correntes induzidas**

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J} \tag{12}$$

onde σ é a condutividade. O termo $\partial \mathbf{A} / \partial t$ pode ser tratado com uma formulação em complexo para regime senoidal, linear e regime permanente. Contudo, para tratar com problemas não lineares associados com qualquer forma de excitação, usa-se a derivada temporal de \mathbf{A} como:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mathbf{A}_{i+1} - \mathbf{A}_i}{\Delta t} \tag{13}$$

onde Δt é o passo de tempo e \mathbf{A}_{i+1} e \mathbf{A}_i representam os valores \mathbf{A} nos instantes $i+1$ e i , respectivamente.

Aplicando o método de Galerkin na equação (12) tem-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{W}_j) \cdot (\nabla \times \mathbf{W}_i) A_{i+1} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\sigma \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{W}_i}{\Delta t} A_{i+1} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\sigma \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{W}_i}{\Delta t} A_i d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{J} d\Omega, j=1,6 \tag{14}$$

VII. CONTINUIDADE DA CORRENTE DE MAGNETIZAÇÃO

A condição de continuidade da densidade de corrente de magnetização tem uma grande influência na consistência do sistema algébrico. Isto é, o ICCG (Incomplet Cholesky Conjugated Gradients) é inapto para resolver este sistema se não é satisfeita a seguinte condição de continuidade [2]:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{15}$$

A Fig. 4 apresenta um quarto de uma bobina, com seção transversal retangular. Nos elementos localizados segundo as direções x , y e z , \mathbf{J} tem somente uma componente (segundo x ou y), e satisfaz a equação (15). Para promover a continuidade da densidade de corrente no "canto" da bobina, utilizam-se as seguintes equações [2]:

$$\mathbf{J}_x = \frac{-\mathbf{J}(D_{0x} - x)}{W} \tag{16}$$

$$J_y = \frac{J(D_{0y} - y)}{W} \quad (17)$$

onde (x, y) são as coordenadas do baricentro de cada tetraedro e D_{0x} , D_{0y} e W são definidos na Fig. 4.

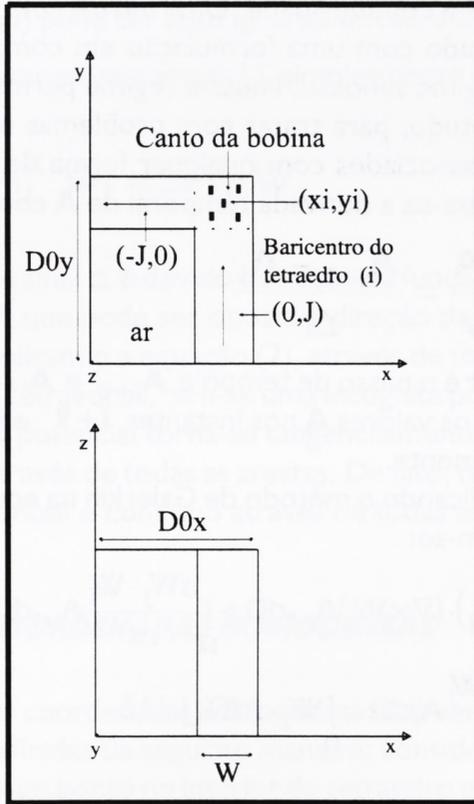


Fig. 4 Um quarto de uma bobina, com seção transversal retangular.

VIII. RESULTADOS

Para ilustrar as formulações apresentadas anteriormente dois exemplos numéricos são apresentados. No primeiro exemplo a estrutura magnética a ser simulada é o contator apresentado na Fig. 5.

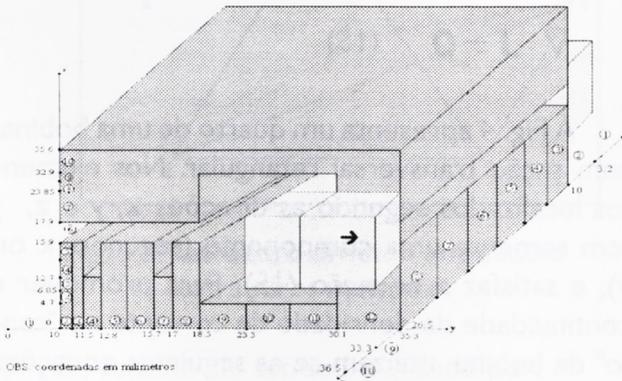


Fig. 5 Metade da estrutura de um contator

O cálculo analítico da força no entreferro é realizado através do tensor de Maxwell. A Tabela 2 apresenta o resultado obtido pelo programa

FEET desenvolvido utilizando elementos de aresta e o valor analítico da força no entreferro. A densidade de corrente adotada na simulação é de $7,3 \text{ A/mm}^2$.

Tabela 2
Resultados para o contator

	Analítico	FEET
Força (N)	11,90	11,50

No segundo exemplo um anel condutor é inserido nos dentes do entreferro do contator apresentado na Fig. 5. O sinal de entrada na bobina é apresentado na Fig. 6. A Fig 7 apresenta a curva dos módulos das densidades de correntes induzidas calculadas no ponto $(18,25\text{mm}, 12,15\text{mm}, 14,3\text{mm})$ no anel condutor. O tempo total de simulação foi de 0,1s e o passo de cálculo de 0,01s. Este tipo de simulação é dificilmente feito por um método analítico.

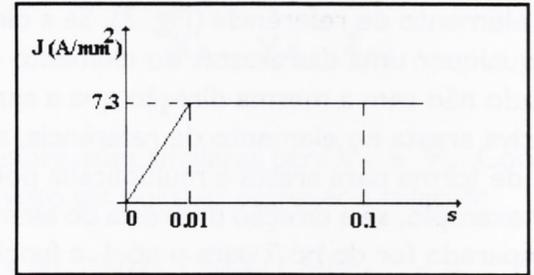


Fig. 6 Densidade de corrente na bobina

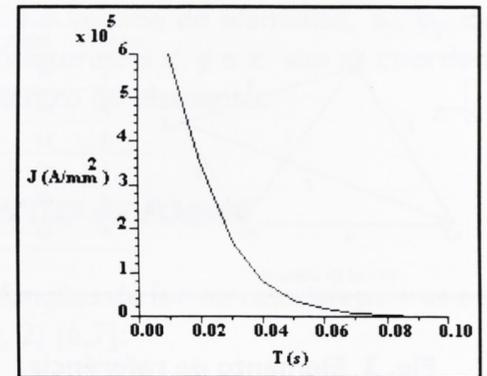


Fig. 7 Correntes induzidas no anel condutor

A Fig. 8 apresenta a distribuição dos vetores densidade de correntes induzidas no anel condutor.

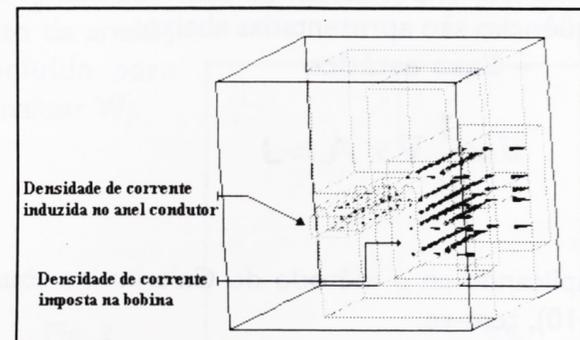


Fig. 8 Densidade de corrente induzida no anel condutor.

As malhas utilizadas nos exemplos apresentados neste trabalho foram obtidas através da subdivisão de elementos hexaédricos em tetraédricos. Cada hexaedro é subdividido em cinco tetraedros.

IX. CONCLUSÃO

Foram apresentados neste artigo os conceitos básicos relativos à formulação matemática de problemas estáticos e quase estáticos pelo método de elementos finitos utilizando elementos de aresta tetraédricos.

A utilização dos elementos de aresta tetraédricos na solução do problema em estudo apresenta algumas vantagens como: formulação sem calibre, alocação de memória relativamente econômica, fácil aplicação das condições de fronteira, formulação única em todo domínio de estudo, domínio de estudo sem cortes, etc.

Apresentou-se também neste artigo um conceito de direcionamento das arestas na malha de elementos finitos. A utilização deste conceito assegura a continuidade tangencial do potencial vetor magnético.

Os resultados obtidos através dos exemplos numéricos apresentados demonstram a eficiência do sistema computacional desenvolvido.

REFERÊNCIAS

- [1] I.R. Albanese, G. Rubinacci, "Magnetostatic computations in terms of two-component vector potential", *Int. j. numer. methods eng.*, vol. 29, pp. 515-532, 1990.
- [2] K. Fujiwara, T. Nakata, N. Takahashi, H. Ohashi, "On the Continuity of the Magnetizing Current Density in 3D Magnetic Field Analysis with Edge Elements", *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 31, pp. 1342-1347, May, 1995.
- [3] A. Bossavit, "A Rational for Edge Elements", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, No. 1, pp. 74-79, 1988.
- [4] A. Bossavit, "Whitney Forms: a Class of Finite Elements for three-dimensional Computations in Electromagnetism", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, No. 8, pp. 1460-1464, 1988.
- [5] N. Ida, J.P.A. Bastos, "Electromagnetics and Calculation of Fields", Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [6] A. Bossavit, "Edge Elements for Magnetostatic", *Int. J. of Numer. Modelling*, vol. 9, pp. 19-34, 1996.
- [7] H. Whitney, "Geometric Integration Theory", Princeton U. P., 1957.
- [8] Z. S. Cendes, "Vector Finite Elements for Electromagnetic Field", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 25, No. 5, pp. 3958-3966, September, 1991.