Argumentos Dedutivos

Análise Inferencial e Teoria da Argumentação em Lógica Matemática

Carlos Magno Corrêa Dias

Resumo

Ao longo da evolução e revolução do progresso intelectual do homem observa-se o acentuado desenvolvimento da Lógica Matemática, principalmente, na constante busca de técnicas e procedimentos formais de decisão que permitam instituir a coerência e a validade de raciocínios nas mais diversas áreas do conhecimento.

No presente trabalho serão apresentados, de forma resumida, alguns dos principais métodos analíticos que permitem, em Lógica Matemática, através da Álgebra Proposicional, avaliar a legitimidade de argumentos dedutivos, utilizados para se estabelecer a coerência e a correção do raciocínio em termos formais.

Atualmente o homem tem se distinguido de seus antepassados por desenvolver e manipular linguagens artificiais e técnicas que permitem transformar determinadas formas fundamentais de raciocínio em semântica e sintaxe próprias, permitindo a codificação do pensamento para a aquisição e otimização do conhecimento em termos simbólicos. Mas, essencialmente, o que torna tais linguagens poderosas e imprescindíveis para a constante produção científica de conhecimento é a possibilidade da manipulação algébrica, mediante regras de um cálculo lógico, dos denominados argumentos.

Um argumento (ou uma dedução) consiste de um segmento lingüístico envolvendo certa complexidade no qual, a partir de um conjunto inicial de evidências (constatadas em dado universo relacional), segue-se uma conclusão a qual se supõe ter sido inferida ou deduzida das primeiras premissas (ou primeiras informações). Sendo os enunciados (unidades lingüísticas que integram o argumento) segmentos lingüísticos de sentido completo aos quais podem ser aplicados os valores Verdade ou Falsidade de maneira que a ocorrência de cada um dos mesmos exclua a possibilidade do outro simultaneamente.

Contudo, na evolução histórica da Lógica têm-se constatado discussões acerca dos tipos de argumentos, pois existem lógicos que proclamam a distinção entre argumentos dedutivos e argumentos indutivos. De forma geral, tem-se defendido que as primeiras formas de argumento processam a argumentação do "geral para o particular", enquanto que as segundas do "particular para o geral". Neste estudo, porém, não se levará avante tal discussão. Estabelecer um estudo sobre uma ou outra forma não é o objeto central de considerações deste artigo. Admitir-se-á, apenas, que um argumento é adjetivado como dedutivo quando a passagem das premissas à conclusão é analítica (ou seja, é necessária); sendo postulado como indutivo quando uma tal passagem é sintética (ou seja, não necessária).

Assim sendo, observe-se que os comentários apresentados neste estudo concentrar-se-ão na análise estrutural dos argumentos que podem ser estudados analiticamente através da Álgebra Proposicional edificada em Lógica Matemática.

Partindo-se, portanto, do pressuposto de que a Lógica (como um todo) tanto quanto a Lógica Matemática (Lógica axiomatizada e bivalente, individualizada por processos analíticos conexos através

Carlos Magno Corrêa Dias, é Bacharel e Licenciado em Matemática, Pós-Graduado em Métodos Computacionais e Didática do Ensino Superior, Mestre em Educação/Lógica, Doutorando em Lógica, e professor de Ensino Superior do Departamento Acadêmico de Matemática, do Cefet-PR, Unidade de Curitiba.

de métodos matemáticos) tem por objetivo primeiro a formulação de métodos de correção do processo inferencial uma vez estabelecido, apresentar-se-á neste trabalho um conjunto de procedimentos formais que permitem avaliar se a conclusão obtida é deduzida das premissas pressupostas ou assumidas.

Para realizar-se, conseqüentemente, a análise inferencial, através da teoria da argumentação, a Lógica Matemática utiliza os princípios estabelecidos, originalmente, no Cálculo Proposicional, o qual dispõe de meios estruturais para formular os critérios de avaliação da legitimidade de argumentos a partir da conexão estrutural das premissas com a devida conclusão.

Desta forma, no presente estudo, considerar-se-á a Lógica Matemática como uma Ciência capaz de instituir instrumentos necessários e suficientes para se analisar a validade do raciocínio, a partir da formalização e do relacionamento entre os enunciados de um determinado universo relacional, considerando o raciocínio em termos de uma álgebra proposicional por intermédio de axiomas, operações e relações lógicas.

Basicamente, caracterizar-se-á a Lógica Matemática como a Ciência que trata da análise inferencial no sentido de consolidar métodos analíticos necessários e suficientes (fundados em cálculos) para identificar (analisar formalmente) os argumentos logicamente válidos, distinguindo-os dos sofismas ou falácias (aqui assumidos como argumentos não-válidos, onde não se deduz a conclusão a partir das premissas).

Em Lógica Matemática Proposicional, para toda e qualquer inferência existe sempre um correspondente argumento, em que uma proposição final (proposição simples ou fórmula proposicional), denominada conclusão do argumento se apresenta como (suposta) conseqüência de uma série finita de m-proposições (com m = 1 ou m > 1) em que cada uma destas m-proposições é enunciada como premissa do argumento. Assim, diz-se que um argumento é constituído de uma conclusão (supostamente) derivada ou inferida de pelo menos uma premissa.

Ressalte-se, entretanto, que nenhuma proposição simples (ou fórmula proposicional), tomada em si mesma, pode caracterizar uma premissa ou uma conclusão; as quais, por sua vez, constituem termos relativos na análise inferencial. Portanto, tais entidades assumem, conforme o contexto, uma ou outra função. Ou seja, uma dada fórmula proposicional $P(p, q, r, s, u, v, w, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ poderá ser a conclusão de um determinado argumento ou uma premissa em um outro distinto argumento, mas isoladamente não é conclusão ou premissa.

Como considerado no início deste texto, a análise a seguir desenvolvida diz respeito tão somente ao estudo de validade dos denominados argumentos dedutivos; muito embora seja possível, através do Cálculo Sentencial e do Cálculo dos Predicados em Lógica Matemática, também, realizar-se a análise dos enunciados argumentos indutivos.

Assim sendo, a validade de argumentos dedutivos é estabelecida quando suas correspondentes premissas, se possuem valor lógico igual à verdade (**V**), apresentam razões convincentes para a sua respectiva conclusão; isto é, um argumento dedutivo é válido (segundo a forma estrutural) se, e somente se, o valor lógico da conclusão é igual à verdade (**V**) todas as vezes que (sempre que) o valor lógico de cada uma das premissas corresponde à verdade (**V**). Mas, se a definição acima é verificada para algum argumento dedutivo, diz-se que a conclusão foi deduzida a partir dos primeiros enunciados.

A partir das considerações preliminares acima, considere, portanto, um conjunto finito (determinado) de m-fórmulas proposicionais ou m-proposições compostas (ou, eventualmente, proposições simples) enunciadas por $P_1(p, q, r, s, u, v, w, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $P_2(p, q, r, s, u, v, w, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, ..., $P_m(p, q, r, s, u, v, w, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, bem como, a fórmula proposicional $Q(p, q, r, s, u, v, w, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, regidas pelas leis do Cálculo Proposicional (em Lógica Matemática).

Note-se que cada uma das p-proposições simples $p, q, r, s, u, v, w, p_1, p_2, \ldots, p_n$, são, estruturalmente, constituídas de ***designação - cópula - predicado*** e podem ser qualificadas pela verdade (**V**) ou falsidade (**F**), segundo os Princípios da Identidade, da Não-Contradição e do Terceiro Excluído; isto é, correspondem às unidades mínimas de análise do Cálculo Proposicional.

Por exemplo, na proposição simples ***p*: *O homem é um mamífero***., a letra proposicional ***p*** denota a sentença usual ***"O homem é um mamífero."***; sendo que ***"O homem"*** é a designação, ***"é"*** é a cópula e ***"um mamífero"*** é o predicado. Neste exemplo, o valor lógico da proposição ***p*** é igual à Verdade (**V**), o que pode ser denotado por **V(p) = V**.

Ressalte-se que fórmulas proposicionais são proposições compostas de mais de uma proposição simples interligadas entre si através de conectivos lógicos (palavras tais como: ***... e ...***; ***... ou ...***; ***se ..., então ...***; ***... se, e somente se, ...***; ***não ...***; ***... ou exclusivamente ...***. Assim, por exemplo, uma fórmula proposicional seria a proposição composta ***P(p,q): O homem é um mamífero e a capital do Paraná é Curitiba.***; onde ***p: O homem é um mamífero.*** e ***q: A capital do Paraná é Curitiba.***

Disto posto, enuncia-se um argumento dedutivo no Cálculo Proposicional como toda seqüência finita de m-fórmulas proposicionais $P_1, P_2, \ldots, P_m$, que tem por conseqüência a fórmula proposicional Q, supostamente inferida ou deduzida das m-primeiras fórmulas proposicionais; sendo que as $P_1, P_2, \ldots, P_m$ e Q são constituídas das p-proposições simples $p, q, r, s, u, v, w, p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Um argumento dedutivo passa, então, a ser denotado (simbolizado) no Cálculo Sentencial da seguinte forma; qual seja:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_1(p, q, r, s, u, v, w, p_1, p_2, \ldots, p_n),\ P_2(p, q, r, s, u, v, w, p_1, p_2, \ldots, p_n),\ \ldots, \\[2em] P_m(p, q, r, s, u, v, w, p_1, p_2, \ldots, p_n) \ \vdash\ Q(p, q, r, s, u, v, w, p_1, p_2, \ldots, p_n) \end{array}} \qquad \text{(F1)}$$

Observe que a forma (F1) de se denotar um argumento dedutivo é enunciada, em linguagem usual, de uma das seguintes maneiras; quais sejam: "$P_1, P_2, \ldots, P_m$ acarretam Q"; "$P_1, P_2, \ldots, P_m$ implicam Q"; "Q é deduzida de $P_1, P_2, \ldots, P_m$"; "Q é inferida de P_1, P_2, P_m"; bem como, de outras formas equivalentes.

Admita-se, portanto, que se fizesse necessário avaliar a legitimidade do raciocínio a seguir apresentado em linguagem materna (em linguagem usual, padrão da língua corrente); a saber:

> *"A descrição de um procedimento de refutação abstrato induz uma semântica operacional sem levar em contar que não é verdade que a semântica declarativa é derivada da semântica de linguagens de primeira ordem. A semântica declarativa é derivada da semântica de linguagens de primeira ordem apenas se não é fato que um sistema formal induz uma semântica procedimental. Se a descrição de um procedimento de refutação abstrato induz uma semântica operacional embora a semântica declarativa é derivada da semântica de linguagens de primeira ordem, um sistema formal induz um procedimento de refutação abstrato. Um sistema formal induz um procedimento de refutação abstrato e/ou um sistema formal induz uma semântica procedimental apesar de que também a descrição de um procedimento de refutação abstrato induz uma semântica operacional. Assim, nestas condições, é natural concluir-se que: um sistema formal não induz uma semântica procedimental e/ou não se tem que a semântica declarativa é derivada da semântica de linguagens de primeira ordem."*

Muito embora qualquer especialista nos enunciados envolvidos no raciocínio acima pudesse decidir sobre a verdade (**V**) ou falsidade (**F**) dos mesmos isoladamente, certamente teria alguma dificuldade para concluir sobre a validade do raciocínio em questão (ou, a bem da verdade, seria para o mesmo impossível tomar uma tal decisão de forma definitiva).

Contudo, um lógico, mesmo não conhecendo o universo relacional (a teoria) sobre o qual fundamentam-se tais enunciados, facilmente poderia julgar a validade do raciocínio em análise, e, ainda, comprovando ser o raciocínio não-legítimo poderia estabelecer as formas pelas quais o mesmo passaria a constituir uma forma válida de raciocínio.

Assim, confirmando a afirmação acima estabelecida, considere a análise estrutural a seguir desenvolvida, onde através da Álgebra Proposicional do Cálculo Sentencial em Lógica Matemática facilmente se demonstrará a validade do raciocínio anteriormente exemplificado.

A estrutura objeto de estudo, apresentada em linguagem natural, qualifica, quando enunciada na linguagem do Cálculo Sentencial, um exemplo de argumento dedutivo constituído de quatro premissas e de uma conclusão as quais são estruturadas por fórmulas proposicionais dependentes de unidades mínimas de análise do Cálculo dos Enunciados; ou seja, são constituídas, em última análise, das denominadas proposições simples.

Evidenciado um tal fato e designando por ***p, q, r*** e ***s*** as respectivas proposições simples que constituem o raciocínio dedutivo em análise, tem-se que:

p: *A descrição de um procedimento de refutação abstrato induz uma semântica operacional.*

q: *A semântica declarativa é derivada da semântica de linguagens de primeira ordem.*

r: *Um sistema formal induz uma semântica procedimental.*

s: *Um sistema formal induz um procedimento de refutação abstrato.*

Tomando-se tais letras proposicionais, enunciativas das respectivas proposições simples que compõem cada uma das proposições compostas do raciocínio referenciado, pode-se, através da linguagem sentencial, codificar tais sentenças em fórmulas proposicionais. Portanto, siga-se a seguinte conversão de linguagens; qual seja:

A sentença "*A descrição de um procedimento de refutação abstrato induz uma semântica operacional sem levar em conta que não é verdade que a semântica declarativa é derivada da semântica de linguagens de primeira ordem.*", passa a ser enunciada por $\mathbf{p \wedge \sim q}$; uma vez que a estrutura " *sem levar em contar que*" tem a função de conjunção lógica ($\wedge$) e a estrutura "*não é verdade que* " corresponde à negação lógica ($\sim$).

A sentença "*A semântica declarativa é derivada da semântica de linguagens de primeira ordem apenas se não é fato que um sistema formal induz uma semântica procedimental.*" converte-se na fórmula proposicional $\mathbf{q \rightarrow \sim r}$, dado que a estrutura " $\mathbf{q}$ *apenas se* $\sim \mathbf{r}$ " denota uma condicional lógica ($\rightarrow$).

Correspondentemente, a sentença enunciada por "*Se a descrição de um procedimento de refutação abstrato induz uma semântica operacional embora a semântica declarativa é derivada da semântica de linguagens de primeira ordem, um sistema formal induz um procedimento de refutação abstrato.*", qualifica a fórmula proposicional denotada por: $\mathbf{(p \wedge q) \rightarrow s}$, pois a estrutura analisada envolve uma condicional lógica que tem por proposição antecedente a conjunção de **p** e **q** e por proposição conseqüente a proposição simples **s**.

Já convertendo a sentença "*Um sistema formal induz um procedimento de refutação abstrato e/ou um sistema formal induz uma semântica procedimental apesar de que também a descrição de um procedimento de refutação abstrato induz uma semântica operacional.*", obtém a fórmula proposicional disjuntiva: $\mathbf{s \vee r \wedge p}$, uma vez que as sentenças "*e/ou*" e "*apesar de que também*" designam, respectivamente, a disjunção inclusiva ($\vee$) e a conjunção ($\wedge$).

E, finalmente, a sentença "*Um sistema formal não induz uma semântica procedimental e/ou não se tem que a semântica declarativa é derivada da semântica de linguagens de primeira ordem.*" vem estabelecer a fórmula proposicional $\mathbf{\sim q \vee \sim r}$, segundo os critérios de conversão acima considerados.

Da enunciação (conversão da linguagem usual para a linguagem formal da Lógica Matemática) acima e tendo em vista a natureza do raciocínio em estudo, resultam as seguintes premissas e conclusão; quais sejam:

Primeira Premissa:	$P_1(p, q, r, s)$:	$\mathbf{p \wedge \sim q}$
Segunda Premissa:	$P_2(p, q, r, s)$:	$\mathbf{q \rightarrow \sim r}$
Terceira Premissa:	$P_3(p, q, r, s)$:	$\mathbf{(p \wedge q) \rightarrow s}$
Quarta Premissa:	$P_4(p, q, r, s)$:	$\mathbf{s \vee r \wedge p}$
Conclusão:	$Q(p, q, r, s)$:	$\mathbf{\sim q \vee \sim r}$

Tomando-se, portanto, a forma estrutural (F1), tem-se enunciado que o raciocínio em questão passa a compor o argumento dedutivo dado por:

$$\boxed{P_1(p, q, r, s), P_2(p, q, r, s), P_3(p, q, r, s), P_4(p,q,r, s) \vdash Q(p, q, r, s)}$$

ou, especificadamente, em função das correspondentes fórmulas proposicionais, tem-se que:

$$\boxed{\mathbf{p \wedge \sim q,\ \ q \rightarrow \sim r,\ \ (p \wedge q) \rightarrow s,\ \ s \vee r \wedge p \vdash \sim q \vee \sim r}} \qquad \text{(A1)}$$

Da estruturação do argumento acima, que formalmente enuncia o raciocínio inicialmente considerado, passar-se-á à análise de validade do mesmo; isto é, verificar-se-á se a conclusão $\mathbf{\sim q \vee \sim r}$ encontra-se, necessariamente, apoiada nas quatro premissas possíveis $\mathbf{p \wedge \sim q}$, $\mathbf{q \rightarrow \sim r}$, $\mathbf{(p \wedge q) \rightarrow s}$ e $\mathbf{s \vee r \wedge p}$; ou seja, estabelecer-se-ão procedimentos formais (algébricos) de decisão que permitam a comprovação lógica da validade (ou coerência) do respectivo argumento dedutivo.

Contudo, quaisquer argumentos dedutivos da forma (F1) são considerados como argumentos dedutivos válidos, ou seja, apresentam, de fato, a conclusão deduzida ou inferida do conjunto inicial das m-premissas se, e somente se, o valor lógico da conclusão é a verdade (**V**) sempre que o valor lógico de cada uma das m-premissas é igual à verdade (**V**) para quaisquer dos 2^p arranjos possíveis de valores lógicos verdade (**V**) e falsidade (**F**) das p-proposições simples $p, q, r, s, u, v, w, p_1, p_2, ..., p_n$, de $P_1, P_2, ..., P_m$ e Q; ou seja:

> O argumento dedutivo $P_1, P_2, ..., P_m \vdash Q$ é válido se, e somente se, $V[Q] = V$ todas as vezes que $V[P_1] = V[P_2] = \ldots = V[Pm] = V$ para quaisquer dos 2^p arranjos de valores lógicos **V** e **F** das p-proposições simples $s, u, v, w, p_1, p_2, ..., p_n$ componentes das $P_1, P_2, ..., P_m$ e Q.

(T1)

Saliente-se, entretanto, que se (T1) não é verificada, o argumento dedutivo da forma (F1) não é um exemplo de argumento dedutivo válido; isto é, não é possível deduzir-se a conclusão a partir do conjunto inicial de premissas; ou, ainda, as premissas não constituem razões convincentes para se inferir a conclusão. Neste caso, os argumentos são qualificados como argumentos falaciosos, ou falácias, ou argumentos não-válidos, ou mesmo sofismas.

Analisando a condição (T1) tem-se, em decorrência da Álgebra Proposicional, que se os valores lógicos das premissas devem ser simultaneamente iguais à verdade (**V**), isto é, se $V[P_1] = V[P_2] = \ldots = V[P_m] = V$, então o valor lógico da conjunção de tais fórmulas proposicionais deverá ser igual à verdade (**V**), ou seja: $V[P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_m] = V$; o que permite enunciar o teorema (T1) da seguinte forma alternativa; qual seja:

> O argumento dedutivo $P_1, P_2, ..., P_m \vdash Q$ é válido se, e somente se, $V[Q] = V$ todas as vezes que $V[P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_m] = V$ para quaisquer dos 2^p arranjos de valores lógicos **V** e **F** das p-proposições simples $s, u, v, w, p_1, p_2, \ldots, p_n$ componentes das $P_1, P_2, \ldots, P_m$ e Q.

(T2)

Mas, ao se considerar os valores lógicos das operações lógicas entre duas dadas proposições simples **p** e **q**, verifica-se que ao se tomar a condicional entre estas proposições a única possibilidade de na condicional $\mathbf{p \rightarrow q}$ ("se p, então q") obter-se o valor lógico falsidade (**F**) é quando o valor lógico da antecedente **p** é igual à verdade (**V**) e o valor lógico da conseqüente **q** é igual à falsidade (**F**); isto é, $\mathbf{V[\ p \rightarrow q\ ] = F}$ se, e somente se, $\mathbf{V(\ p\ ) = \sim V(\ q\ ) = V}$; sendo que nos outros três casos possíveis sempre o valor lógico da condicional $\mathbf{p \rightarrow q}$ será igual à verdade (**V**).

Da observação imediatamente acima e dos teoremas T1 ou T2, resulta, portanto, afirmar que um argumento dedutivo da forma F1 será válido desde que a condicional entre a conjunção das premissas e a respectiva conclusão seja logicamente equivalente a uma tautologia; uma vez na dependência da legitimidade do argumento em estudo sempre a citada condicional as premissas tomadas conjuntivamente e a conclusão levará ao valor lógico verdade (**V**), verificando a condição de existência das fórmulas proposicionais tautológicas ou tautologias (**T**).

Das últimas considerações, tem-se estabelecido o que se arbitrou denominar o teorema fundamental da argumentação no Cálculo Proposicional em Lógica Matemática, o qual é enunciado formalmente da seguinte forma; qual seja:

> O argumento dedutivo $P_1, P_2, \ldots, P_m \vdash Q$ é válido se, e somente se, $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_m) \rightarrow$ $\rightarrow Q \Leftrightarrow T$, para quaisquer dos 2^p arranjos de valores lógicos **V** e **F** das p-proposições simples $s, u, v, w, p_1, p_2, \ldots, p_n$ componentes das $P_1, P_2, \ldots, P_m$ e Q.

(T3)

Retomando o argumento A1 pode-se, portanto, avaliá-lo quanto a sua validade através dos teoremas T1 (ou T2) e T3; senão considere as seguintes observações; quais sejam:

Observação 01: Avaliação da validade do argumento dedutivo A1 através das relações entre os valores lógicos das premissas e da conclusão (Método das Tabelas-Função-de-Verdade):

O argumento $\mathbf{p \wedge \sim q,\ q \rightarrow \sim r,\ p \wedge q \rightarrow s,\ s \vee r \wedge p \vdash \sim q \vee \sim r}$ será um exemplo de argumento válido se, e somente se, por T1 (ou T2), for possível verificar que: $\mathbf{V[\ \sim q \vee \sim r\ ] = V}$

todas as vezes que $\mathbf{V[\,p \wedge \sim q\,] = V[\,q \rightarrow \sim r\,] = V[\,(\,p \wedge q\,) \rightarrow s\,] = V[\,s \vee r \wedge p\,] = V}$ para quaisquer dos dezesseis (2^4) arranjos possíveis de **V** e **F** das quatro componentes **p**, **q**, **r** e **s**.

Para se demonstrar a condição acima basta construir a tabela-função-de-verdade da conjunção das premissas e da conclusão, tomando-se por base os valores lógicos resultantes das operações lógicas estruturadas na Álgebra Proposicional.

Para efeito de exemplificação, desenvolver-se-á abaixo a determinação dos valores lógicos da conjunção das premissas (isto é, da fórmula proposicional estruturada por $\mathbf{(p \wedge \sim q) \;\wedge\; (q \rightarrow \sim r) \;\wedge\; (p \wedge q \rightarrow s) \;\wedge\; (s \vee r \wedge p)}$) e da conclusão (isto é, da fórmula proposicional dada por $\mathbf{\sim q \vee \sim r}$) para o primeiro arranjo de valores lógicos das **p**, **q**, **r** e **s** componentes, ou seja, para $\mathbf{V(p) = V(q) = V(r) = V(s) = V}$. Nestas condições, considere os seguintes desenvolvimentos:

D1. Determinação do valor lógico de $\mathbf{(p \wedge \sim q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge (p \wedge q \rightarrow s) \wedge (s \vee r \wedge p)}$:

$$\mathbf{V[\,(p \wedge \sim q) \;\wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge (p \wedge q \rightarrow s) \wedge (s \vee r \wedge p)\,] =}$$
$$\mathbf{= V[\,(p \wedge \sim q)\,] \wedge V[\,(q \rightarrow \sim r)\,] \;\wedge V[\,(p \wedge q \rightarrow s)\,] \;\wedge V[\,(s \vee r \wedge p)\,] =}$$
$$\mathbf{= (V(p) \wedge \sim V(q)\,) \wedge (V(q) \rightarrow \sim V(r)\,) \wedge (V(p) \wedge V(q) \rightarrow V(s)\,) \wedge (V(s) \vee V(r) \wedge V(p)\,) =}$$
$$\mathbf{= (\,V \wedge \sim V\,) \wedge (\,V \rightarrow \sim V\,) \wedge (\,V \wedge V \rightarrow V\,) \wedge (\,V \vee V \wedge V\,) =}$$
$$\mathbf{= (\,V \wedge F\,) \wedge (\,V \rightarrow F\,) \wedge (\,V \rightarrow V\,) \wedge (\,V \vee V\,) =}$$
$$\mathbf{= (\,F\,) \wedge (\,F\,) \wedge (\,V\,) \wedge (\,V\,) \;=\; F \wedge V \;=\; F}\text{, e, portanto:}$$
$$\mathbf{V[\,(p \wedge \sim q) \;\wedge\; (q \rightarrow \sim r) \;\wedge\; (p \wedge q \rightarrow s) \;\wedge\; (s \vee r \wedge p)\,] \;=\; F\,.}$$

D2. Determinação do valor lógico de $\mathbf{\sim q \vee \sim r}$:

$$\mathbf{V[\,\sim q \vee \sim r\,] \;=\; \sim V(\,q\,) \;\vee \sim V(\,r\,) \;=\; \sim V \;\vee\; \sim V \;=\; F \;\vee\; F \;=\; F}\text{, e, portanto:}$$
$$\mathbf{V[\,\sim q \vee \sim r\,] \;=\; F\,.}$$

Desta forma, determinando os respectivos valores de ambas as fórmulas proposicionais para os outros quinze arranjos de valores lógicos **V** e **F** das quatro proposições **p**, **q**, **r** e **s** obter-se-ia o seguinte conjunto de possibilidades:

p	q	r	s	$(p \wedge \sim q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge (p \wedge q \rightarrow s) \wedge (s \vee r \wedge p)$	$\sim q \vee \sim r$
V	V	V	V	F	F
V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	F	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	V	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	V

Tabela 01

Analisando a Tabela 01 acima, observa-se que, de fato, T1 (ou T2) é verificado para quaisquer dos dezesseis arranjos de valores lógicos de **V** e **F** das componentes das premissas e conclusão. Assim, a conclusão do argumento é deduzida ou inferida das premissas; sendo o argumento dedutivo A1 um exemplo de argumento dedutivo válido (segundo a forma estrutural). Possibilitando afirmar que o raciocínio apresentado inicialmente em linguagem usual é uma inferência; ou seja, constitui um raciocínio legítimo em que as premissas levantadas constituem evidências necessárias para se deduzir a conclusão.

Apesar da técnica de verificação da validade de argumentos dedutivos acima apresentada permitir avaliar a legitimidade de quaisquer argumentos dedutivos sentenciais, muitas outras mais eficientes e poderosas existem. As melhores técnicas de avaliação são aquelas que não dependem dos valores lógicos nominais de cada uma das proposições simples envolvidas no argumento e utilizam a simples manipulação algébrica de fórmulas proposicionais. Senão, considere o que a seguir se apresenta.

Observação 02: Verificação da validade do argumento dedutivo A1 através de manipulação algébrica (Método das Equivalências Sucessivas):

Segundo o estabelecido pelo teorema T3, o argumento dedutivo enunciado por $\mathbf{p \wedge \sim q}$, $\mathbf{q \rightarrow \sim r}$, $\mathbf{p \wedge q \rightarrow s}$, $\mathbf{s \vee r \wedge p \vdash \sim q \vee \sim r}$ será válido se, e somente se, a fórmula proposicional

$$(p \wedge \sim q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge (p \wedge q \rightarrow s) \wedge (s \vee r \wedge p) \rightarrow (\sim q \vee \sim r)$$

é logicamente equivalente a uma proposição tautológica ou a uma tautologia **t** (ou **T**).

Portanto, deve-se demonstrar algebricamente (segundo as regras da Álgebra Proposicional), por substituição de sucessivas equivalências lógicas que:

$$(p \wedge \sim q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge (p \wedge q \rightarrow s) \wedge (s \vee r \wedge p) \rightarrow (\sim q \vee \sim r) \Leftrightarrow t.$$

Procedendo, assim, a demonstração formal da equivalência lógica em pauta, tem-se caracterizado o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
&(p \wedge \sim q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge (p \wedge q \rightarrow s) \wedge (s \vee r \wedge p) \rightarrow (\sim q \vee \sim r) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sim ((p \wedge \sim q) \wedge (q \rightarrow \sim r) \wedge (p \wedge q \rightarrow s) \wedge (s \vee r \wedge p)) \vee (\sim q \vee \sim r) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q) \vee \sim (q \rightarrow \sim r) \vee \sim (p \wedge q \rightarrow s) \vee \sim (s \vee r \wedge p) \vee \sim q \vee \sim r \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sim p \vee q \vee \sim (q \rightarrow \sim r) \vee \sim (p \wedge q \rightarrow s) \vee \sim (s \vee r \wedge p) \vee \sim q \vee \sim r \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim r \vee \sim (q \rightarrow \sim r) \vee \sim (p \wedge q \rightarrow s) \vee \sim (s \vee r \wedge p)) \vee (\sim q \vee q) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim r \vee \sim (q \rightarrow \sim r) \vee \sim (p \wedge q \rightarrow s) \vee \sim (s \vee r \wedge p)) \vee t \Leftrightarrow t,
\end{aligned}$$

como necessariamente se deveria concluir.

Justificando-se as passagens no desenvolvimento acima, saliente-se que: para se obter a fórmula equivalente enunciada na segunda linha aplicou-se sobre a primeira a equivalência fundamental: $\mathbf{P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q}$; a terceira linha foi determinada ao se aplicar sobre a segunda a regra de De Morgan das conjunções: $\mathbf{\sim (P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q}$; a quarta linha foi determinada considerando-se a aplicação da regra de De Morgan das conjunções sobre a fórmula $\mathbf{\sim (p \wedge \sim q)}$, resultando $\mathbf{\sim p \vee q}$; a quinta das linhas foi gerada pela aplicação simultânea da lei da comutatividade da disjunção inclusiva ($\mathbf{P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P}$) e da lei associativa da disjunção inclusiva ($\mathbf{P \vee Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R}$); e, finalmente, na sexta linha evidenciou-se o princípio do Terceiro-Excluído ($\mathbf{P \vee \sim P \Leftrightarrow T}$) e aplicou-se a regra do elemento absorvente da disjunção inclusiva ($\mathbf{P \vee T \Leftrightarrow T}$).

Como se pode constatar, esta segunda técnica de verificação é muito mais dinâmica e abrangente do que a primeira; contudo, requer o pleno domínio das propriedades algébricas das operações lógicas instituídas no Cálculo Proposicional.

No desenvolvimento das técnicas dedutivas no Cálculo Sentencial (especificamente quanto à teoria da demonstração), diversos outros métodos foram criados com o objetivo de otimizar a análise de argumentos dedutivos bivalentes. Neste compêndio, infelizmente, torna-se impossível apresentar todas as possibilidades de análise desenvolvidas. Mas, é possível, ainda, considerar algumas outras técnicas relevantes na demonstração da legitimidade de argumentos; sendo que a seguir principia-se um conjunto de considerações a respeito da denominada técnica da Atribuição de Valores Lógicos.

Para exemplificar a aplicação deste procedimento de decisão quanto à análise de validade de argumentos, considere o seguinte argumento dedutivo:

"A descrição de um procedimento de refutação abstrato induz uma semântica operacional apenas se a semântica declarativa é derivada da semântica de linguagens de primeira ordem ou um sistema

formal induz uma semântica procedimental. A semântica declarativa não é derivada da semântica de linguagens de primeira ordem e/ou um sistema formal induz um procedimento de refutação abstrato. Não é fato que a semântica declarativa é derivada da semântica de linguagens de primeira ordem somente se a descrição de um procedimento de refutação abstrato induz uma semântica operacional. De tais considerações, conclui-se, portanto, que: um sistema formal induz uma semântica procedimental se, e somente se, não se tem que a descrição de um procedimento de refutação abstrato induz uma semântica operacional."

Como as proposições simples que compõem cada uma das sentenças do raciocínio acima são as mesmas do exemplo anterior, um tal raciocínio dará origem ao argumento dedutivo a seguir enunciado; qual seja:

$$\boxed{\mathbf{p \rightarrow q \vee r,\ \sim q \vee s,\ \sim (q \rightarrow p) \vdash r \leftrightarrow \sim p}} \qquad \text{(A2)}$$

Como anteriormente considerado, uma falácia ou um argumento não-válido é todo argumento dedutivo que não verifica o teorema T1; isto é, são os argumentos em que a conclusão não pode ser inferida ou deduzida a partir do conjunto inicial de premissas. Assim, por T3, a respectiva condicional lógica entre a as premissas e conclusão não resultaria em uma tautologia. Ou, mais especificamente, deverá existir pelo menos um dentre os arranjos de valores lógicos das componentes tal que o valor lógico da conclusão seja igual à falsidade (**F**) e o valor lógico da conjunção das premissas seja igual à verdade (**V**).

O critério da Atribuição de Valores Lógicos às Componentes para o estudo de validade de argumentos dedutivos toma como condição de verificação exatamente a condição de existência de falácias e procura, segundo a álgebra das operações lógicas, evidenciar o arranjo de valores lógicos das componentes que vem corroborar esta condição imposta. Caso, pela sucessiva atribuição de valores lógicos às proposições simples, não seja possível evidenciar a condição de verificação demonstra-se, por redução ao absurdo, que o argumento em estudo é um argumento legítimo.

Assim, impondo-se que $\mathbf{V[\,p \rightarrow q \vee r\,] = V[\,\sim q \vee s\,] = V[\,\sim (q \rightarrow p)\,] = V}$ e que $\mathbf{V[\,r \leftrightarrow \sim p\,] = F}$, deve-se evidenciar a existência de pelo menos um arranjo de valores lógicos das proposições simples componentes que venha verificar a falácia supostamente admitida.

Partindo-se, conseqüentemente do fato que a conclusão $\mathbf{r \leftrightarrow \sim p}$ deve ter valor lógico igual à falsidade (**F**) e que em uma bicondicional ($\leftrightarrow$) existem apenas duas possibilidades de se obter a falsidade (**F**) (isto é, $\mathbf{V \leftrightarrow F = F}$ e $\mathbf{F \leftrightarrow V = F}$), conclui-se que $\mathbf{V(p) = V(r)}$.

Mas, se $\mathbf{V(p) = V(r) = F}$, resulta que:

a) $\mathbf{V[\,p \rightarrow q \vee r\,] = V(p) \rightarrow V(q) \vee V(r) = F \rightarrow V(q) \vee F = V}$;

b) $\mathbf{V[\,\sim q \vee s\,] = \sim V(q) \vee V(s) = V}$; e,

c) $\mathbf{V[\,\sim (q \rightarrow p)\,] = \sim (V(q) \rightarrow V(p)) = \sim (V(q) \rightarrow F) = V}$.

Contudo, $\mathbf{\sim (V(q) \rightarrow F) = V}$ se, e somente se, $\mathbf{V(q) = V}$. E, portanto:

a') $\mathbf{V[\,p \rightarrow q \vee r\,] = V(p) \rightarrow V(q) \vee V(r) = F \rightarrow V \vee F = F \rightarrow V = V}$;

b') $\mathbf{V[\,\sim q \vee s\,] = \sim V \vee V(s) = F \vee V(s) = V}$, sendo que necessariamente deve-se ter que $\mathbf{V(s) = V}$; isto é, $\mathbf{V[\sim q \vee s\,] = \sim V \vee V(s) = F \vee V = V}$; e,

c') $\mathbf{V[\,\sim (q \rightarrow p)\,] = \sim (V(q) \rightarrow V(p)) = \sim (V \rightarrow F) = V}$.

Nestas condições, tomando-se $\mathbf{\sim V(p) = V(q) = \sim V(r) = V(s) = V}$ comprova-se a condição imposta; isto é:

$\mathbf{V[\,p \rightarrow q \vee r\,] = V[\,\sim q \vee s\,] = V[\,\sim (q \rightarrow p)\,] = \sim V[\,r \leftrightarrow \sim p\,] = V}$; ou seja:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V[\,p \rightarrow q \vee r\,] = V[\,\sim q \vee s\,] = V[\,\sim (q \rightarrow p)\,] = \sim V[\,r \leftrightarrow \sim p\,] =}\\
&\mathbf{= V(p) \rightarrow V(q) \vee V(r) = \sim V(q) \vee V(s) = \sim (V(q) \rightarrow V(p)) = \sim (V(r) \leftrightarrow \sim V(p)) =}\\
&\mathbf{= F \rightarrow V \vee F = \sim V \vee V = \sim (V \rightarrow F) = \sim (F \leftrightarrow \sim F) =}\\
&\mathbf{= F \rightarrow V = F \vee V = \sim (F) = \sim (F \leftrightarrow V) =}\\
&\mathbf{= V = V = V = \sim (F).}
\end{aligned}$$

Pode-se afirmar, desta forma, que é impossível deduzir-se ou inferir-se a conclusão $\mathbf{r \leftrightarrow \sim p}$ tomando-se por partida as primeiras premissas $\mathbf{p \rightarrow q \vee r}$, $\mathbf{\sim q \vee s}$ e $\mathbf{\sim (q \rightarrow p)}$; sendo em conseqüência o argumento uma falácia e o raciocínio não-válido.

Sendo o universo da Lógica Matemática o mundo formal, seu ideal é a coerência relacional (e analítica) entre os enunciados e/ou proposições do sistema. A validade, portanto, de um argumento diz respeito à forma estrutural de conexão entre os enunciados que conferem ao sistema rigor e consistência. Por este princípio básico, a validade do argumento A1 é estabelecida não em decorrência dos elementos materiais que constituem a estrutura original (em linguagem usual) que após enunciada lhe deu origem, mas, sim, do conjunto de fórmulas proposicionais (enunciativas) que se relacionam segundo os teoremas T1, T2 ou T3.

Desta forma, considere o raciocínio dedutivo apresentado em linguagem usual a seguir estabelecido; ou seja:

> "*Não é verdade que a Lógica não é atributo da Matemática e/ou a Robótica é a evolução da Mecânica. Ou a Matemática não é a base da Ciência, ou a Robótica não é a evolução da Mecânica, ou ambas. Se a Ciência não é patrimônio da humanidade, a Lógica não é atributo da Matemática e/ou não se tem que a Robótica é a evolução da Mecânica. Se não é verdade que a Lógica é atributo da Matemática embora a Matemática é a base da Ciência, é fato que a Ciência é patrimônio da humanidade. Portanto, é natural afirmar-se que: se a Matemática é a base da Ciência, não é verdade que a Robótica é a evolução da Mecânica.*"

Logo, designando as proposições simples, que figuram na estrutura acima, por **p, q, r e s**, tem-se que:

p: *A Lógica é atributo da Matemática.*
q: *A Robótica é a evolução da Mecânica.*
r: *A Matemática é a base da Ciência.*
s: A Ciência é patrimônio da humanidade.

Resultam, assim, do Cálculo Proposicional, as seguintes fórmulas proposicionais (enunciativas das premissas e conclusão do respectivo argumento); quais sejam:

Primeira Premissa: $\sim(\sim p \vee q)$
Segunda Premissa: $\sim r \vee \sim q$
Terceira Premissa: $\sim s \rightarrow \sim p \vee \sim q$
Quarta Premissa: $\sim(p \wedge r) \rightarrow s$
Conclusão: $r \rightarrow \sim q$

E, conseqüentemente, o argumento dedutivo correspondente tem a forma enunciativa dada por:

$$\boxed{\sim(\sim p \vee q),\ \sim r \vee \sim q,\ \sim s \rightarrow \sim p \vee \sim q,\ \sim(p \wedge r) \rightarrow s \ \vdash\ r \rightarrow \sim q}$$

(A3)

Segue-se, porém, que as fórmulas proposicionais que compõem o argumento A3 são, respectivamente, logicamente equivalentes às fórmulas proposicionais dadas por:

a) $\sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q;$
b) $\sim r \vee \sim q \Leftrightarrow \sim q \vee \sim r \Leftrightarrow q \rightarrow \sim r;$
c) $\sim s \rightarrow \sim p \vee \sim q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \vee s \Leftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee s \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow s;$
d) $\sim(p \wedge r) \rightarrow s \Leftrightarrow p \wedge r \vee s \Leftrightarrow s \vee p \wedge r;$
e) $r \rightarrow \sim q \Leftrightarrow \sim r \vee \sim q \Leftrightarrow \sim q \vee \sim r.$

Por imediata conseqüência, substituindo-se as fórmulas proposicionais equivalentes resultantes no respectivo argumento dedutivo A3, tem-se verificado que:

$$\boxed{p \wedge \sim q,\ q \rightarrow \sim r,\ (p \wedge q) \rightarrow s,\ s \vee r \wedge p \ \vdash\ \sim q \vee \sim r}$$

Examine-se, pois, que a forma estrutural última apresentada acima é "idêntica" àquela estabelecida para o argumento dedutivo A1, demonstrado anteriormente como exemplo de argumento dedutivo válido. Desta maneira, diz-se que o argumento A3 é, também, um exemplo de argumento legítimo em decorrência de sua forma estrutural.

Por conseguinte, tem-se uma outra técnica básica de verificação da validade de argumentos instituída. Cabe distinguir, entretanto, que os argumentos A1 e A3 são argumentos materialmente distintos; porquanto têm conteúdo semântico diverso (e estão em universos relacionais distintos). Porém, apresentam a mesma forma estrutural (analítica) quando analisados ao nível puramente sintático; sendo, conseqüentemente, o argumento A3 um argumento válido em decorrência da validade do argumento A1.

O fato acima permite afirmar, novamente, que a validade ou não-validade de um argumento dedutivo depende, tão somente, da sua forma analítica estrutural (forma enunciativa do Cálculo Proposicional) e não de seu conteúdo específico ou dos valores lógicos, particulares, das premissas e da conclusão que o integram. É, pois, sempre possível ao não especialista em quaisquer áreas, através desta teoria, avaliar a validade de quaisquer argumentos.

Pode-se, portanto, afirmar que o argumento dedutivo estruturado da forma:

$$\begin{array}{l} P \wedge \sim Q \\ Q \rightarrow \sim R \\ (P \wedge Q) \rightarrow S \\ S \vee R \wedge P \\ \hline \sim Q \vee \sim R \end{array} \qquad \text{(I1)}$$

é válido para quaisquer que sejam as fórmulas proposicionais **P**, **Q**, **R** e **R** constituídas das p-proposições simples p, *q, r, s, u, v, w,* p_1, p_2, ..., *pn*,; uma vez que o que lhe dá a atribuição de validade é a sua forma.

Assim, conhecendo-se previamente a estrutura de determinados argumentos dedutivos válidos (tais quais a estrutura I1) pode-se verificar uma infinidade de outros argumentos que possam ser levados, por substituição de equivalências lógicas, as mesmas formas.

Tem-se, desta forma, arbitrado uma outra técnica de verificação da validade de argumentos dedutivos no Cálculo Sentencial, a denominada demonstração por Regras de Inferência (onde, diga-se, a estrutura I1 poderia constituir uma das Regras de Inferência).

O procedimento de decisão acima mencionado é qualificado como sendo a Dedução Natural, a qual engloba uma série finita de enunciados em que cada proposição (ou fórmula proposicional) ou corresponde à premissa do argumento ou a uma conclusão a partir de enunciados precedentes através do emprego de argumentos básicos legítimos, que apresenta, por conseqüência, o último enunciado da série tomado como aquele que reflete a conclusão do argumento avaliado.

Como já afirmado, um conjunto de regras de inferência pode ser utilizado ao nível do cálculo dedutivo da Lógica Matemática para a validação e/ou comprovação da validade de uma série de outros argumentos dedutivos que lhes sejam, na forma estrutural, respectivamente, equivalentes. Porquanto, existem diversas fórmulas proposicionais que são inferidas ou deduzidas de outras fórmulas enunciativas precedentes por uma das regras de inferência admitidas no universo em estudo.

Do acima exposto, seja o argumento dedutivo a seguir estruturado; qual seja:

$$\boxed{\begin{array}{l} (p \rightarrow q \wedge r) \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim (\sim (p \rightarrow (r \wedge \sim p)) \vee q)), \\ ((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow (\sim p \rightarrow (r \leftrightarrow q)) \vdash \\ \vdash \sim ((r \veebar q) \rightarrow p) \rightarrow \sim ((q \rightarrow \sim r) \rightarrow \sim p) \end{array}} \qquad \text{(A4)}$$

Aplicando a Álgebra Proposicional sobre cada uma das premissas e da conclusão é possível, pela substituição de equivalência sucessivas, apresentar cada uma das respectivas fórmulas consideradas das seguintes formas; quais sejam:

a) $(p \rightarrow q \wedge r) \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim (\sim (p \rightarrow (r \wedge \sim p)) \vee q)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\sim p \vee q \wedge r) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q \vee r)$;

b) $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow (\sim p \rightarrow (r \leftrightarrow q)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q \vee r) \rightarrow (p \vee ((\sim r \vee q) \wedge (\sim q \vee r)))$;

c) $\sim ((r \veebar q) \rightarrow p) \rightarrow \sim ((q \rightarrow \sim r) \rightarrow \sim p) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\sim p \vee q \wedge r) \rightarrow (p \vee ((\sim r \vee q) \wedge (\sim q \vee r)))$.

Substituindo-se os resultados acima evidenciados no argumento dedutivo A4, este passa a ser enunciado de forma equivalente pelo argumento dedutivo A5 abaixo ilustrado; qual seja:

$$\boxed{\begin{array}{l}(\sim p \vee q \wedge r) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q \vee r),\\ (\sim p \wedge \sim q \vee r) \rightarrow (p \vee ((\sim r \vee q) \wedge (\sim q \vee r))) \vdash \\ \vdash (\sim p \vee q \wedge r) \rightarrow (p \vee ((\sim r \vee q) \wedge (\sim q \vee r)))\end{array}} \quad \text{(A5)}$$

Observe, ainda, que se **P(p,q,r):** $(\sim p \vee q \wedge r)$, **Q(p,q,r):** $(\sim p \wedge \sim q \vee r)$ e **R(p,q,r):** $(p \vee ((\sim r \vee q) \wedge (\sim q \vee r)))$, o argumento A5 passa a ser estruturado por:

$$\boxed{\begin{array}{l}P(p,q,r) \rightarrow Q(p,q,r),\\ Q(p,q,r) \rightarrow R(p,q,r) \vdash \\ \vdash P(p,q,r) \rightarrow R(p,q,r)\end{array}} \quad \text{(A6)}$$

Mas a forma estrutural enunciada em A6 corresponde à Regra de Inferência denominada Silogismo Hipotético; sendo, em conseqüência, o argumento inicialmente considerado (A4) um argumento válido segundo a forma do Silogismo Hipotético (observe-se que, facilmente, se demonstraria, através de T3, a validade da Regra de Inferência enunciada em A6).

Outra forma de se demonstrar a validade de argumentos através de Regras de Inferência consiste em se aplicar várias vezes tais Regras para se deduzir conclusões parciais a partir de determinadas premissas, formando com tais conclusões outros argumentos que apresentarão novas conclusões, e estas serão novas premissas em outros argumentos, e assim sucessivamente até que seja possível deduzir a conclusão do argumento em estudo.

Tomando-se, desta maneira, como exemplificação, o argumento dedutivo a seguir apresentado; qual seja:

$$\boxed{\begin{array}{l}(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)\\ (r \vee s) \rightarrow (q \wedge s)\\ r \vee p\\ (p \wedge q) \vee (q \wedge \sim s)\\ (q \wedge \sim s) \rightarrow (\sim r \wedge p)\\ \hline \sim (r \vee s) \rightarrow (q \wedge s)\end{array}} \quad \text{(A7)}$$

demonstre-se que a fórmula proposicional $\sim (r \vee s) \rightarrow (q \wedge s)$ é deduzida a partir das cinco primeiras premissas a partir da aplicação sucessiva de Regras de Inferências.

Para tanto, inicia-se a demonstração, enumerando-se as premissas e dispondo-as uma sobre as outras na ordem em que são originalmente apresentadas. E, em seguida, em sentido vertical, de cima para baixo, procede-se à dedução natural das linhas subseqüentes, enumeradas seqüencialmente, mediante a aplicação das regras anteriormente aventadas e/ou da substituição de equivalências sucessivas (considerando-se, também, o princípio lógico da extencionalidade), indicando-se, cada fase, as linhas-suporte pelas quais é aplicada a respectiva regra com a devida justificativa disposta à direita.

Assim, considere o desenvolvimento a seguir apresentado; qual seja:

(01)	$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$	Premissa
(02)	$(r \vee s) \rightarrow (q \wedge s)$	Premissa
(03)	$r \vee p$	Premissa
(04)	$(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim s)$	Premissa
(05)	$(q \wedge \sim s) \rightarrow (\sim r \wedge p)$	Premissa
(06)	$q \wedge s$	pela regra **(MP)** sobre (02) e (03)
(07)	$(r \vee s) \vee (\sim r \wedge p)$	pela regra **(DC)** sobre (01), (05) e (04)
(08)	$(q \wedge s) \vee \sim (\sim r \wedge p)$	pela regra **(AD)** sobre (06)
(09)	$\sim (\sim r \wedge p) \vee (q \wedge s)$	pela regra **(COMUTATIVA)** sobre (08)
(10)	$(\sim r \wedge p) \rightarrow (q \wedge s)$	pela regra **(CONDICIONAL)** sobre (09)
(11)	$\sim (r \vee s) \rightarrow (\sim r \wedge p)$	pela regra **(CONDICIONAL)** sobre (07)
(12)	$\sim (r \vee s) \rightarrow (q \wedge s)$	pela regra **(SH)** sobre (11) e (10)

Observe que por sucessivas deduções foi possível obter em conclusão a fórmula proposicional $\sim(r \vee s) \rightarrow (q \wedge s)$, demonstrando, em conseqüência, a legitimidade do argumento analisado; pois, do contrário seria impossível a obtenção de uma tal fórmula proposicional.

Esclareça-se que o processo de dedução acima tem seu início a partir da linha (06), onde a proposição $q \wedge s$ foi deduzida ao se considerar a regra de inferência Modus Ponendo-Ponens ($\mathbf{P \rightarrow Q, P \vdash Q}$) aplicada sobre as linhas (02) e (03).

Tomando-se as fórmulas proposicionais apresentadas nas linhas (01), (05) e (04) verifica-se que as mesmas constituem as premissas da regra de inferência do Dilema Construtivo ($\mathbf{P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R \vdash Q \vee S}$) e apresenta-se na linha (07) a respectiva conclusão desta regra inferencial.

Na linha (08) é apresentada (inferida) a conclusão da regra de inferência da Adição ($\mathbf{P \vdash P \vee Q}$) tomando-se como premissa a proposição da linha (06).

Já as deduções apresentadas nas linhas (09), (10) e (11) são obtidas considerando-se as equivalências lógicas das fórmulas proposicionais enunciadas nas linhas (08), (09) e (07) conforme indicado.

E, finalmente, aplicando-se a regra inferencial qualificada como Silogismo Hipotético ($\mathbf{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R}$) sobre as linhas (10) e (11) determinou-se na linha (12) a conclusão do argumento em análise.

Para finalizar o presente estudo da validade de argumentos dedutivos, dada a forma peculiar de demonstração, considere a seguir o critério da Demonstração Indireta ou da Demonstração por Absurdo.

Antes, porém, observe que as fórmulas proposicionais $\mathbf{(P \wedge \sim Q) \rightarrow C}$ e $\mathbf{P \rightarrow Q}$, onde **C** é uma Contradição (fórmula cujo valor lógico é sempre a falsidade **F**), são logicamente equivalentes; ou seja:

$$\mathbf{(P \wedge \sim Q) \rightarrow C \Leftrightarrow \sim(P \wedge \sim Q) \vee C \Leftrightarrow \sim(P \wedge \sim Q) \Leftrightarrow \sim P \vee Q \Leftrightarrow P \rightarrow Q.}$$

Mas, segundo enuncia o teorema T3, as equivalências lógicas qualificadas por $\mathbf{(P \wedge \sim Q) \rightarrow C \Leftrightarrow T}$ e $\mathbf{P \rightarrow Q \Leftrightarrow T}$ são as condições pelas quais, respectivamente, os argumentos $\mathbf{(P \vee \sim Q) \vdash C}$ e $\mathbf{P \vdash Q}$ seriam argumentos dedutivos válidos.

A demonstração por absurdo fundamenta-se nas afirmações acima e consiste, basicamente, em admitir a negação da conclusão do argumento em análise como uma premissa acrescida às premissas originais e na seqüência passa a deduzir uma contradição lógica **C** como a conclusão do argumento incrementado; isto é, se o argumento $\mathbf{P \vdash Q}$ é um argumento válido, então o argumento $\mathbf{(P \wedge \sim Q) \vdash C}$ também será válido; e reciprocamente.

Para ilustrar a aplicação de um tal método de verificação de legitimidade, admita-se o argumento dedutivo formulado tal como o a seguir apresentado; qual seja:

$$\boxed{\begin{array}{c}(r \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q),\ (p \veebar q) \rightarrow \sim(r \leftrightarrow q),\ (p \veebar q) \rightarrow (r \leftrightarrow q),\\ \sim(r \wedge q) \rightarrow (p \veebar q)\ \vdash\ (p \rightarrow q) \vee (r \leftrightarrow q)\end{array}} \qquad \text{(A8)}$$

Mas, das considerações acima, o argumento A8 será argumento legítimo se válido for o argumento:

$$\boxed{\begin{array}{c}(r \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q),\ (p \veebar q) \rightarrow \sim(r \leftrightarrow q),\ (p \veebar q) \rightarrow (r \leftrightarrow q),\\ \sim(r \wedge q) \rightarrow (p \veebar q),\ \sim((p \rightarrow q) \vee (r \leftrightarrow q))\ \vdash C\end{array}} \qquad \text{(A9)}$$

Como $\sim((p \rightarrow q) \vee (r \leftrightarrow q)) \Leftrightarrow \sim(p \rightarrow q) \wedge \sim(r \leftrightarrow q)$, proceda-se, portanto, à demonstração da validade do argumento A8 pela Demonstração Indireta do argumento A9; ou seja:

(01)	$(r \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$	Premissa
(02)	$(p \veebar q) \rightarrow \sim (r \leftrightarrow q)$	Premissa
(03)	$(p \veebar q) \rightarrow (r \leftrightarrow q)$	Premissa
(04)	$\sim (r \wedge q) \rightarrow (p \veebar q)$	Premissa
(05)	$\sim (p \rightarrow q) \wedge \sim (r \leftrightarrow q)$	Premissa Provisória
(06)	$(r \wedge q) \vee (p \veebar q)$	pela regra **(CONDICIONAL)** sobre (04)
(07)	$(p \rightarrow q) \vee (r \leftrightarrow q)$	pela regra **(DC)** sobre (01), (03) e (06)
(08)	$(\sim (p \rightarrow q) \wedge \sim (r \leftrightarrow q)) \wedge ((p \rightarrow q) \vee (r \leftrightarrow q))$	pela regra **(CONJ)** sobre (05) e (07)
(09)	**C**	pela regra **(CONTRADIÇÃO)** sobre (08)

Como apresentado ao longo deste texto, segundo os diferentes critérios de verificação da validade de argumentos dedutivos, o ideal da Lógica Matemática é a coerência (analítica ou algébrica) entre os elementos que constituem um dado sistema; tendo-se, em última análise, a validade de um argumento determinada pela forma estrutural com a qual se relacionam dedutivamente as premissas e a conclusão.

Afirma-se, portanto, que uma inferência em Lógica Matemática é necessária e nunca provável; somente se pode inferir ou deduzir um enunciado (uma conclusão) de outro ou de outros quando este último está implicado ou incluído nos seus antecedentes (nas premissas); o que através da Álgebra Proposicional pode dar origem a diversos procedimentos formais de decisão para confirmar a legitimidade das estruturas envolvidas.

É necessário, por outro lado, salientar que o estudo acima apresentado considera apenas algumas das possibilidades de análise formal de argumentos dedutivos que podem ser estruturados no Cálculo Sentencial em Lógica Matemática. Pois, devido à natureza de sua concepção e segundo a forma apresentada (não se detendo em particularidades de caráter estritamente técnico), o estudo reunido nos parágrafos antecedentes pretende ser, quando muito, uma introdução à questão dos critérios formais de avaliação de legitimidade dos argumentos dedutivos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOCHENSKI, I. M. ***Formale logik.*** Freiburg / Müchen, Verlar Karl Alber, 1980, 595p.

DIAS, Carlos Magno Corrêa. ***Lógica Matemática: uma introdução ao Cálculo Proposicional.*** In "Revista Acadêmica da PUC-PR", II, 3, março 1991, pp. 11-15, 45p.

DIAS, Carlos Magno Corrêa. ***Lógica Matemática: um Sistema Científico de Raciocínio.*** In "Revista Tecnologia e Humanismo do Cefet-PR", vol. 11, 1993, pp. 23-30, 48p.

DIAS, Carlos Magno Corrêa. ***As Leis Lógicas do Pensar Coerente.*** In "Revista Acadêmica da PUC-PR", II, 4, setembro 1991, pp. 12-15, 52p.

MENDELSON, Elliot. ***Introduction to mathematical logic.*** New York, Van Nostrand, 1964.