A TEORIA DOS LOGARITMOS: MODELOS E APLICAÇÕES

Carlos Alberto Mucelin [1]

Resumo:

Este artigo aborda historicamente a Teoria dos Logaritmos, sua importância no estudo aplicado em alguns ramos da Ciência, tais como na Química, na Física, na Matemática Comercial e Financeira e de forma especial em Modelos Estatísticos e de Experimentação. Na análise de regressão, a obtenção de um modelo de regressão linear simples, equivalente a um modelo exponencial, evidenciando a equivalência destes, com o uso das propriedades dos logaritmos.

Palavras-chaves: Logaritmos, Experimentação, Modelos.

Abstract:

This article approaches the Theory of the Logarithms historically, its importance in the study applied in some branches of the Science, such as in Chemistry, in Physics, in Commercial and Financial Mathematics and in special a way in Statistical Models and Experimentation Models. In the regression analysis, the obtaining of a model of simple linear regression, equivalent to an exponential model, evidencing the equivalence of these, with the use of the properties of the logarithms.

Key words: Logarithms, Experimentation, Models.

---

[1] Licenciado em Matemática, pós-graduado "lato-sensu" em Metodologia do Ensino, com mestrado em Engenharia de Sistemas Agroindustriais pela UNIOESTE, professor de Matemática, Estatística e Metodologia Científica do CEFET-PR, Unidade de Medianeira.

INTRODUÇÃO

O final do século XX e o início do século XXI têm sido marcado pela grande circulação de informações. Um dos grandes responsáveis é o computador que, juntamente com a World Wide Web, derrubou fronteiras e fez com que a velocidade das informações se tornasse muito acentuada.

Quanto as informações, as teorias ensinadas em qualquer nível de formação seguem ou deveriam seguir uma ordenação crítica epistemológica, principalmente a matemática, disciplina tida como uma das mais difíceis, qualquer que seja o nível educacional.

O alvorecer da matemática moderna deu-se no início do século XVII. Dentre grandes personagens, responsáveis por grandes contribuições teóricas dessa época, tais como Copérnico, Da Vinci, Galileu, Brahe, Descartes, Newton, Kepler, Giordano Bruno, Leibniz, Fermat, Descartes e outros, destaca-se John Napier (1550-1617) que publicou em 1614 num texto intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos) a teoria dos logaritmos. (EVES, 1989).

Muitas vezes ouve-se até mesmo de professores, que o estudo dos logaritmos não são importantes, pelo menos não do ponto de vista prático. Geralmente a grande questão é: "Professor, para que serve este conteúdo?".

Este artigo mostrará algumas aplicações que se pode realizar com a utilização da teoria dos logaritmos, em algumas áreas do saber.

APLICAÇÃO DE LOGARITMOS NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Os logaritmos podem ser aplicados na matemática financeira, mais especificamente, em juros compostos. Juro pode ser entendido como "... uma compensação financeira paga pelo empréstimo de um bem que adquirimos quando não se dispõe de moeda suficiente para pagar no ato da transação." (PAULI, 2000, p. 41) Para ZIMA (1985), quando determinado capital é colocado a juros, de modo que estes são acrescentados ao final de cada período de capitalização e depois disso rendem juros, o juro é chamado composto. Essa operação para determinado capital é dada por uma progressão geométrica, cujo n-ésimo termo é dado por $s = p(1+i)^n$ (1), em que $\boldsymbol{s}$ é o valor acumulado do capital $\boldsymbol{p}$, no fim dos $\boldsymbol{n}$ períodos de capitalização e $\boldsymbol{i}$ é a taxa de juros. Podemos observar em (1) que o tempo n é expoente da expressão, logo quando no cálculo desta variável, para determinado problema de capitalização composta, muitas vezes sua resolução fica condicionada ao uso de logaritmos pela propriedade $\log_a A^m = m.\log_a A$ (*), sempre que em (1) não se puder igualar as bases dos dois membros, o que na prática, geralmente não ocorre.

APLICAÇÃO DE LOGARITMOS NA QUÍMICA

Na química, quando se estuda a natureza elétrica da matéria, a desintegração radioativa é um fenômeno de emissão de radiações alfa, beta e gama. Quando se observa uma amostra radioativa $\mathbf{m_0}$ para um tempo $(\mathbf{t = 0})$ e transcorrido um intervalo de tempo $(\mathbf{t = p})$, este chama-se meia-vida e a massa da amostra radioativa se reduz à metade da inicial $(\mathbf{m_0 / 2})$. Transcorrido outro período de tempo igual, a massa se reduz à metade novamente, e assim sucessivamente. Logo **meia-vida** é o tempo necessário para que a metade da massa de uma amostra radioativa se desintegre.

Tem-se então que $\frac{m_0}{m} = 2^{t/p}$ (2), sendo **m** massa final à que se reduz a amostra, transcorrido um tempo **t**. Graficamente a função acima tem a forma dada na Figura 2. (NABUCO, 1989)

A relação (2) possui a variável tempo **t** como expoente de base dois. Então quando as bases desta relação forem distintas e se que isolar **t**, pode-se fazer uso da propriedade dos logaritmos dada em (*).

APLICAÇÃO DE LOGARITMOS NA FÍSICA

Na Física, no estudo de máquinas simples, uma composição de roldanas móveis propicia alteração na força resultante de maneira exponencial. A relação matemática que expressa a força resultante é dada por $F_R = F_P \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (3), em que $\boldsymbol{F_R}$ = força resultante; $\boldsymbol{F_P}$ = força peso e **n** o número de roldanas moveis. (RESNICK; HALLIDAY, 1989). A representação gráfica desta relação também é dada pela Figura 2.

Observando a relação dada em (3), verifica-se que o expoente de base meio do segundo membro é a variável **n** e portanto como nos exemplos anteriores também pode-se fazer uso das propriedades dos logaritmos, toda vez que $\boldsymbol{F_R}$ não for uma potência de base 1/2.

APLICAÇÃO DE LOGARITMOS NOS MODELOS ESTATÍSTICOS DE REGRESSÃO

O modelo pode ser entendido como uma representação abstrata da realidade, estruturada de tal forma que permita compreender total ou parcial o funcionamento dessa realidade ou fenômeno.

Para CRAMER (1971), modelo é uma representação abstrata da realidade, que mostra apenas o que é relevante para uma questão específica, negligenciando todos os demais aspectos.

Segundo BUSSAB (1988), os modelos explicitam estruturas do fenômeno em observação, aos quais são misturadas com variações acidentais ou aleatórias, cujas observações dessas estruturas permitem conhecer ou fazer afirmações sobre os possíveis comportamentos dos mesmos.

MATOS (1998) sintetiza o conceito de modelo como sendo um conjunto de hipóteses estabelecidas a *priori* sobre o comportamento de um fenômeno, com base em uma teoria já existente ou a partir de novas propostas teóricas.

O termo regressão foi usado em fins do século XIX, por Sir Francis Galton. A análise de regressão é uma das técnicas mais utilizadas para modelar o relacionamento entre as mais diversas variáveis de um fenômeno ou processo. De fato, o uso da análise de regressão baseia-se no uso de uma equação para expressar o relacionamento entre uma variável chamada dependente e uma ou mais variáveis chamadas independentes. Modelos de regressão simples é utilizado quando se estuda a relação entre estas duas variáveis, uma dependente (y) e outra independente (x).

APLICAÇÃO DE LOGARITMOS NA EXPERIMENTAÇÃO

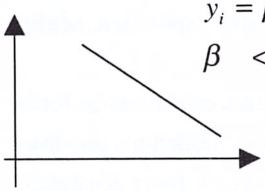
A função logarítmica é utilizada em análise experimental como uma técnica recomendada na transformação de dados em estudo, objetivando homogeneizar as variâncias de dados experimentais x_i, quando tais variações são muito acentuadas.

Assim, em vez de trabalhar com dados originais x_i, trabalha-se com os dados transformados $\log(x_i)$, onde $i = 1,2,...,n$. Esta transformação traz bons resultados, uma vez que é mais trabalhoso interpretar os dados na escala logarítmica.

Dentre os mais variados modelos de regressão estabelecer-se-á uma analogia entre os modelos linear simples e o exponencial.

As Figuras ***1*** e ***2*** correspondem aos modelos linear simples e o exponencial respectivamente.

Figura 1 - Modelo linear com coeficiente angular negativo.

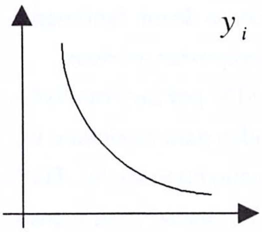


$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

$$\beta < 0$$

Onde: $\begin{cases} \beta_0 = \textit{coeficiente linear} \\ \beta_1 = \textit{coeficiente angular} \\ \boldsymbol{i} = 1, 2, 3, \ldots, n \end{cases}$

Figura 2 - Modelo Exponencial simples com parâmetro



$$y_i = \beta_0 e^{\beta_1 x_i}$$

Onde: $\beta_0 \ e \ \beta_1$ = *são constantes*

$\boldsymbol{e}$ = *número de Euler*

Dentre os métodos sugeridos pela literatura, é muito utilizado o método de mínimos quadrados para estimação dos parâmetros $\hat{\beta}_0 \ e \ \hat{\beta}_1$ desconhecidos.

Sendo o modelo linear definido em (4), para n pares de dados ($\mathbf{y_i}$, $\mathbf{x_i}$), e $\beta_0 \ e \ \beta_1$ sendo parâmetros desconhecidos, o modelo linear estimado será $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ (6), onde $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são os estimadores de $\beta_0 \ e \ \beta_1$ respectivamente e $\hat{y}_i$ é o valor de predição de y_i dado o valor de $\mathbf{x_i}$, para i = 1,2,...,n.

O erro estimado é a diferença entre um valor observado $\mathbf{y_i}$ o valor correspondente $\hat{y}_i$ estimado pela reta ajustada, e este erro é definido como:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i \qquad (i = 1,2, \ldots, n)$$

A soma dos quadrados dos erros é dado por:

$$SQE = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2 \qquad (7)$$

O método dos mínimos quadrados consiste em estimar $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ de tal forma a minimizar a soma dos quadrados dos erros, dados em (7). As estimativas $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ que tornam-se mínima a SQE, são aquelas que anulam as derivadas parciais:

$$\frac{\delta SQE}{\delta\beta_0} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\delta SQE}{\delta\beta_1} = 0$$

Desenvolvendo estas duas equações, tem-se o seguinte sistema de equações normais:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \text{e} \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases} \tag{8}$$

Assim os estimadores de mínimos quadrados são:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 = y - \hat{\beta}_1 x_i \\ \text{e} \\ \hat{\beta}_1 = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \end{cases} \tag{9}$$

Pode-se observar que no caso do modelo exponencial, alguns softwares como o MINITAB e o EXCEL fornecem a função com o respectivo gráfico e o coeficiente de determinação de maneira acabada, pronta, desconhecendo o usuário os mecanismos de obtenção dos parâmetros desse modelo.

No caso do modelo exponencial (5), trata-se de obter a minimização da soma do quadrado dos erros da expressão:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 e^{\beta_1 x_i})^2$$

Então, pode-se fazer uma transformação dos dados mediante o uso de logaritmos, no qual o modelo exponencial apresentado em (5) é transformado em linear com a forma, $y_i^* = \beta_0^* + \beta_1 x_i$ onde $y_i^* = \ln(y_i)$ e $\beta_0^* = \ln(\beta_0)$.

Utiliza-se então a propriedade dos logaritmos naturais, uma vez que se lineariza, fazendo uso das equações (9) para obtenção dos estimadores de mínimos quadrados de. Assim, o modelo transformado estimado tem a forma: $\ln \hat{y}_i = \ln \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$

Uma vez obtido o modelo transformado e ajustado, pode-se voltar ao modelo original através da função antilogarítmica. Assim o modelo exponencial estimado tem a forma: $\hat{y}_i = \hat{\beta}.e^{\hat{\beta}_1 x_i}$

APLICAÇÃO

Com a utilização de um termômetro, e um recipiente com água fervente, iniciou-se a tomada da variação de temperatura em °C em função do tempo a cada 5 minutos. Com o recipiente de vidro sujeito a temperatura ambiente de laboratório, que durante a tomadas dos dados era de 31°C, obtiveram-se os dados apresentados na Tabela 1. O processo de coleta foi efetuado com 3 repetições.

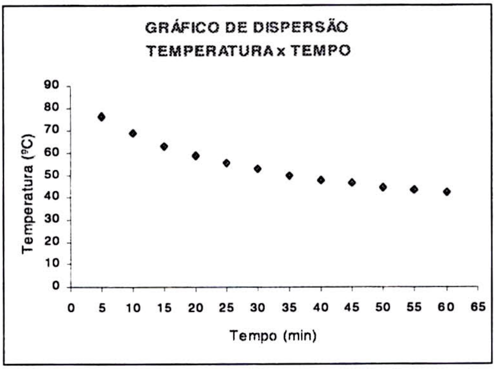
Tabela 1: variação de temperatura por tempo

TEMPO	TEMPERATURA
5	76,6
10	69,0
15	63,0
20	59,0
25	55,5
30	52,8
35	50,0
40	47,9
45	46,5
50	44,5
55	43,2
60	42,1

Fonte: dados do autor produzidos em laboratório

Com a utilização destes dados, tem-se o gráfico de dispersão da Figura 3.

Figura 3: gráfico de dispersão

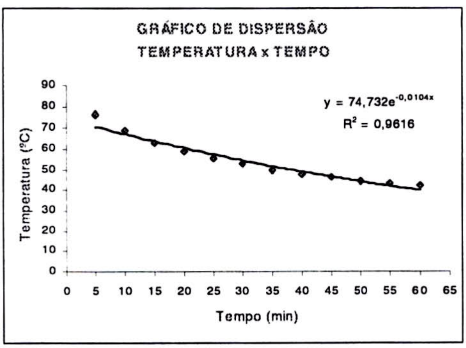


Fonte: dados do autor

Pode-se perceber pelo diagrama acima que a disposição dos pontos sugere uma curva, e efetuando a regressão linear com o uso do software EXCEL obtém-se o gráfico da Figura 4 e a equação de regressão com o coeficiente de determinação que se segue:

$$\begin{cases} \hat{y} = 73 - 0{,}580X \\ R = 92{,}3\% \end{cases}$$

Figura 4: ajuste de um modelo de regressão linear



Fonte: dados do autor

Como a equação de ajuste é relativa a uma reta, temos um coeficiente angular de –0,580 e, por ser negativo, tem-se que em intervalos sucessivos de tempo a temperatura diminuiu, portanto classifica-se como decrescente. O coeficiente linear do modelo tem valor 73, o que não tem significado lógico. O coeficiente de determinação do modelo é relativamente bom, o que significa dizer 92,3% da variação de temperatura da água é explicada pelo modelo. Este modelo matemático pode ser usado para fazer previsões e ou calibrações. Entretanto, observa-se pela Figura 3 que se pode ajustar um modelo melhor que o linear, por exemplo o exponencial.

Pode-se transformar os dados das temperaturas usando os logaritmos naturais e, com a utilização do Software MINITAB, fazer uma análise de regressão com os dados da variação de temperatura transformados (ln y), e obter-se um modelo linear, porém equivalente a um modelo exponencial. Esse procedimento faz com que a curva de regressão exponencial seja construída a partir da função exponencial (5) e dos dados transformado apresentados na Tabela 2.

Tabela 2: dados originais e transformados

TEMPO	TEMPERATURA	LN(TEMPERATURA)
5	76.6	433.860
10	69.0	423.411
15	63.0	414.313
20	59.0	407.754
25	55.5	401.638
30	52.8	396.651
35	50.0	391.202
40	47.9	386.912
45	46.5	383.945
50	44.5	379.549
55	43.2	376.584
60	42.1	374.005

Para facilitar a determinação das equações normais dadas em (6), convém expressar a função original em termos logarítmicos.

Tendo transformado os dados e ajustando novamente o modelo linear transformado, temos a equação de regressão e coeficiente de determinação R^2, como se segue:

A equação descrita abaixo é relativa a uma reta obtida pela análise de regressão com os valores das temperaturas transformados.

$$\hat{y} = 4{,}31391 - 0{,}104x$$

$$R = 96{,}2\%$$

Observa-se que o coeficiente de determinação é melhor que o da reta. Temos então um modelo com melhor ajuste para os dados.

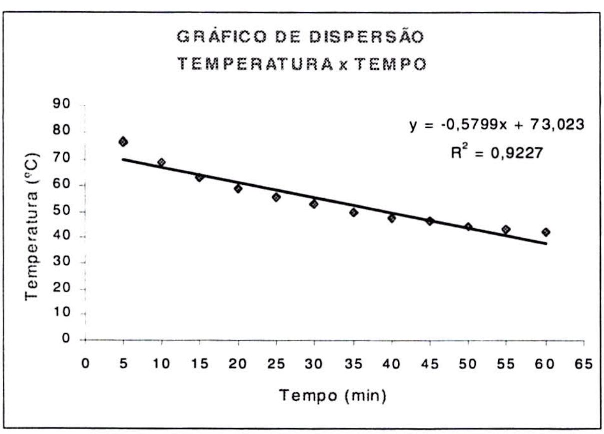
Usando as propriedades dos logaritmos pode-se verificar sua equivalência entre a equação reta e o modelo exponencial como se

$$\ln \hat{\beta}_0 = 4{,}31391 \Rightarrow \hat{\beta}_0 = e^{4{,}31391} = 74{,}7 \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_1 = -0{,}0104$$

Portanto, a equação:

$\hat{y} = 4{,}31391 - 0{,}104x$, é equivalente a $y = 74{,}7 . e^{-0{,}0104x}$ que é uma equação exponencial, com beta um negativo. O gráfico abaixo, executado no EXCEL, mostra a curva desta equação e os pontos observados.

Figura 5: ajuste de um modelo exponencial da temperatura x tempo



Fonte: dados do autor

CONCLUSÃO

Pode-se observar que além das propriedades usadas nesta aplicação a importância dos logaritmos para homogeneizar a taxa de variação das temperaturas.

Sabe-se pois, que a criação de Napier será sempre importante em aplicações, pela simples razão de que as variações exponencial e logarítmica estão presentes em muitos fenômenos naturais, como na aplicação tratada neste artigo.

Geralmente ensinado como um conteúdo sem grande importância no ensino médio e até mesmo em cursos de graduação, os logaritmos têm expressivas utilidades no campo científico, sendo geralmente ensinados como um apanhado de regras, algoritmos sem relação alguma com a taxa de variação de determinadas funções.

O interesse nos logaritmos como instrumento de cálculo aritmético diminuiu muito com o advento e uso universal da calculadora científica e do computador, entretanto, sua importância científica permanece inabalável e pode-se afirmar que: "[...] enquanto houver Ciência haverá aplicações das funções exponenciais e logarítmicas." (LIMA, 1991:25)

Faz-se necessário que os educadores de todas as áreas busquem na interdisciplinariedade a importância de determinados conteúdos como é o caso dos logaritmos, para que seus educandos percebam quão os conceitos e teorias são conexos, principalmente conceitos matemáticos para as ciências exatas.

REFERÊNCIAS

BUSSAB, W. O. de. *Análise de variância e de regressão.* São Paulo: Atual, 1988.

CRAMER, J. S. *Empirical econometrics.* Amsterdam North-Holland, 1971.

EVES, H. *Introdução à história da matemática.* Tradução Domingues, Hygino H. São Paulo: Unicamp,1989.

LIMA, E L. Sistemas de Logaritmos. *Revista do professor de matemática.*, n.18 p.25, 1991

MATOS, O. C. de. *Econometria básica teoria e aplicação.* São Paulo: Atlas, 1995.

NABUCO, J.R. da P. *Química:* geral e inorgânica. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1989.

PAULI, F. F. *Matemática comercial e financeira.* Curitiba: CEFET/PR, 2000.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D. *Física.* 4 ed. Trad. Antônio Máximo R. Luz *et al.* Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, v.1 1989.

ZIMA, P. *Fundamentos de matemática financeira.* São Paulo: Mc Graw-Hill,1985.