

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL ATRAVÉS DO MAPLE V

*Carlos Magno Corrêa Dias*¹

RESUMO

Entre o matemático e os cientistas existem relações em todas as áreas do conhecimento. Isto não ocorre por acaso, pois a Matemática sempre foi indispensável para a evolução do conhecimento científico e tecnológico da humanidade.

Atualmente, em maior intensidade do que no passado, a Matemática está presente na Física, Química, Biologia, Engenharia, Economia, Medicina, Informática e em praticamente quaisquer outros campos. Um tal fato se dá devido à grande evolução da computação, a qual permite aplicar os métodos da Matemática para resolver problemas do mundo real de uma forma nunca antes imaginada.

Tendo em vista a evolução dos softwares algébricos, a Matemática torna-se acessível a qualquer profissional. Evidenciar a facilidade com que se pode estudar determinados conceitos matemáticos utilizando as ferramentas em questão é, então, o principal objetivo deste texto.

Palavras-chave: Matemática. Software Algébrico. Funções. Representações Gráficas.

ABSTRACT

Between mathematician and scientists there are relations in all areas of the knowledge. This does not occur by chance, therefore mathematics has always been indispensable for the evolution of the technological and scientific knowledge of humanity. At present, in major intensity of than it has been in past, to mathematical present in the Physics, Chemistry, Biology, Engineering, Economy, Medicine, Data Processing and in practically any other field. Such a fact happens due to the tremendous evolution from the Computation, which has permitted

¹ Professor de Lógica Matemática e de Cálculo Diferencial e Integral do CEFET-PR (Unidade de Curitiba) e da PUC-PR. Bacharel em Matemática e Licenciado em Ciências pela PUC-PR. Especialista em Métodos Computacionais e em Didática do Ensino Superior pela PUC-PR. Mestre em Educação/Lógica pela UFPR. Doutor em Lógica e Filosofia da Ciência pela UNICAMP.

the application of the approaches of the mathematics in order to resolve problems of the real world in a way which has never been dreamed of. Bearing in mind the evolution of the algebraic software, mathematics become accessible to any professional. The main objective of this text is to demonstrate the facility with which one can study determined mathematical concepts utilizing the tools presented in this paper.

Keywords: Mathematics, algebraic software, functions, graphic representations.

1. INTRODUÇÃO

Devido ao progressivo grau de complexidade das situações que exigem a utilização da Matemática e ao avanço tecnológico dos computadores, fez-se necessário implementar o desenvolvimento de métodos numéricos e algoritmos computacionais cada vez mais poderosos e eficientes na busca de soluções numéricas dos modelos matemáticos desenvolvidos que, em geral, não venham apresentar soluções analíticas. O que, de forma fantástica, veio aumentar ainda mais o poder da Matemática na produção de ferramentas tecnológicas e de tecnologias.

Assim, registre-se, em tempo, que no presente texto não se pretende estabelecer um estudo detalhado sobre as muitas relações entre Matemática e Informática, ou antes, sobre os caminhos que levaram os cientistas destas duas áreas do saber a se unirem para a produção dos dispositivos computacionais hoje indispensáveis para a contínua expansão do conhecimento do homem e de suas atividades.

Neste trabalho, então, serão apresentadas determinadas considerações resumidas sobre exemplos de aplicação do software algébrico MAPLE V na manipulação de particulares estruturas matemáticas e na correspondente resolução de problemas a elas associadas.

Saliente-se, a propósito, que o MAPLE V (disponível no mercado, em distintas versões) é uma ferramenta que permite manipular praticamente todo o conhecimento matemático. O MAPLE V é um dos vários exemplos do surpreendente desenvolvimento das relações de impregnação mútuas entre a Matemática e a Informática ocorrido nos últimos anos. Desenvolvimento este possibilitado tanto pelo estabelecimento de sofisticadas interfaces entre o computador e o homem, quanto porque grande parte das técnicas matemáticas hoje estabelecidas são algorítmicas; o que, por imediata consequência, permitiu a programação dos computadores para executar complexos procedimentos matemáticos (de forma muito eficiente e rápida).

Mas, por exemplo, se um engenheiro está interessado tão somente nos

resultados, certamente existirá um programa de computador que realizará sua tarefa sem erros e num fator tempo infinitamente menor; contudo, caso este mesmo profissional desconheça como se aplica o modelo matemático na resolução do problema em estudo não existe computador que possa realizar tal tarefa.

O software de Computação Algébrica MAPLE V pode ser utilizado como ferramenta que auxilie tanto alunos quanto profissionais na visualização de conceitos matemáticos. O aplicativo em questão possibilita realizar um maior número de experimentos, além de permitir uma ampla interação com a Matemática. O MAPLE V pode, também, ser utilizado para automatizar a solução de inúmeros problemas matemáticos e realizar tipos de visualizações científicas, tanto de dados como de funções.

Acrescente-se, por exemplo, que todo o Cálculo Diferencial e Integral (tratado nos cursos de engenharia, em particular) pode ser amplamente explorado através de funções específicas desenvolvidas no MAPLE V.

Um software algébrico, como o MAPLE V, pode ser utilizado como ferramenta útil para computações simbólicas, numéricas ou visualizações gráficas. Permite, também, simulações industriais e produção de base de dados. Além do mais, com as ferramentas apresentadas pela Computação Algébrica (como um todo), qualquer pessoa (com um mínimo de conhecimentos relacionados) poderá aprimorar seus conceitos matemáticos e ser instruída com noções fundamentais em computação e em lógica de implementação.

No MAPLE V os recursos de representação gráfica e geométrica encontram-se desenvolvidos a tal ponto, que através dos mesmos é possível realizar o estudo de quaisquer curvas, superfícies e volumes através das representações gráficas projetadas em espaços reais bidimensionais e tridimensionais. Assim, gráficos extremamente complicados e de difícil visualização podem ser representados (em segundos) de forma que se possa, através destas visualizações gráficas, estabelecer, de forma ótima e rápida, relações pertinentes entre os conceitos manipulados analítica e formalmente com os respectivos espaços dimensionais.

Dada a existência de tecnologias computacionais diversas que atualmente se tornam parte integrante das ferramentas de trabalho de inúmeros profissionais, constitui uma falta de bom senso despendar grandes cargas horárias para se reproduzir cálculos rotineiros de limites, derivadas, integrais, determinantes, produtos escalares, autovetores, produtos vetoriais, e tantos outros. Não se está a afirmar que tal conhecimento seja desnecessário, apenas alerta-se sobre o fato que a reprodução mecânica e manual de tais cálculos poderiam ser realizados de forma mais eficiente através de dispositivos automáticos.

O importante e imprescindível no ensino da Matemática não está centrado na forma com que se realizam os cálculos (na forma exagerada de

adestramento), mas sim nas idéias que tal Ciência promulga para a evolução do conhecimento científico e tecnológico. Deve-se trabalhar com idéias de aproximação, de convergência, de infinito, de recursividade, de algoritmização, de fundamentação, de lógica para se projetar formas de solução de problemas do mundo real. A Matemática deve ser ensinada com o objetivo de dotar o educando de um poderoso instrumento para se resolver os problemas do mundo real.

Qualquer problema do mundo científico e tecnológico pode ser formalizado através de um modelo matemático e resolvido segundo as teorias da Matemática. Contudo, depois de modelado matematicamente não é importante a forma pela qual os cálculos são implementados. Pode-se perfeitamente utilizar o computador como uma máquina capaz de simular as soluções propostas pela teoria matemática e favorecer uma investigação diagnóstica e dinâmica sobre o pensar em Matemática. Por outro lado, é claro que de nada adiantará o computador se o profissional que o utiliza não sabe aplicar a teoria matemática na modelagem de seus problemas.

O emprego de métodos computacionais pode oferecer oportunidades de desenvolvimento de conceitos e de habilidades de resolução de problemas através de experimentações mais extensas e abertas onde se podem visualizar representações diversas dos problemas analisados em um nível muito mais aprofundado do que seria possível sem a aplicação de tais métodos.

O computador é um agente facilitador do trabalho experimental em Matemática. Permite o planejamento de inúmeras atividades e estudos que objetivem a aquisição de habilidades e prática de observação, permitindo a exploração e o melhor controle de inúmeras variáveis, bem como a realização de testes de diversas hipóteses em tempo muito menor. Entretanto, somente será possível desenvolver-se em um tal ambiente desde que sejam dominados os processos dedutivos e de generalização difundidos pelas teorias da Matemática.

Como qualquer ferramenta, há de se ressaltar o computador, enquanto tal, não traz soluções para o desenvolvimento intelectual dos educandos em Matemática. Não existe a possibilidade de “ensinar” Álgebra, Geometria, Cálculo Diferencial e Integral, ou quaisquer outras disciplinas da Matemática aos alunos servindo-se exclusivamente do computador. É o computador uma simples “calculadora automática”, poderosa, mas assim mesmo uma “calculadora”.

Os alunos devem conhecer a lógica dos procedimentos matemáticos, os significados e as possibilidades de aplicação da teoria matemática na resolução dos problemas do mundo real. Devem possuir sólida formação em Matemática e não apenas ser um simples calculista (pois cálculos as máquinas realizam e, realizam muito bem). Deve-se formar um profissional capaz de constatar os problemas de seu meio e decodificá-los com base nos métodos e

técnicas adquiridos pela Matemática associando-os aos diversos conhecimentos adquiridos por outras Ciências.

Muito embora o MAPLE V possa ser aplicado em diversas áreas da Matemática, neste compêndio apresentar-se-ão, em uma primeira parte, alguns exemplos de aplicação correlacionados ao Cálculo Diferencial e Integral e, em uma segunda etapa, mostrar-se-ão determinados exemplos de representação gráfica de conjuntos de pontos em espaço real bidimensional e tridimensional.

2. APLICAÇÕES DO MAPLE V NO CÁLCULO ELEMENTAR

Admita-se, primeiramente, ser necessário a determinação do limite a seguir considerado para a tomada de uma determinada decisão; a saber:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))}{x^2}$$

Assim sendo, recordando-se que $\cos(x) = \cos^2(x/2) - \text{sen}^2(x/2)$ tem-se que: $\cos(x) = (1 - \text{sen}^2(x/2)) - \text{sen}^2(x/2) = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2(x/2)$.

Mas, em decorrência da identidade anteriormente estabelecida, resulta afirmar, também, que: $1 - \cos(x) = 2 \cdot \text{sen}^2(x/2)$

Portanto, tem-se, em consequência, o seguinte desenvolvimento; qual seja:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \text{sen}^2(x/2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\text{sen}^2(x/2)}{(x/2)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x/2)}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De outra forma, entretanto, poder-se-ia considerar, também, dentre outros, o seguinte desenvolvimento; qual seja:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \cdot (1 + \cos(x))}{x^2 \cdot (1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2(x))}{x^2 \cdot (1 + \cos(x))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen}(x)}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos(x))} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos(x))} = 1^2 \cdot \frac{1}{(1 + 1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Observe, então, que ao se aplicar quaisquer dos métodos de resolução considerados é (relativamente) fácil obter a tendência $1/2$; muito embora algum tempo se perca para obtê-lo.

Contudo, mais fácil ainda seria determinar a solução do problema em pauta através do MAPLE V; pois, digitando a seqüência dos seguintes caracteres:

```
limit((1-cos(x))/x^2,x=0);
```

ter-se-ia, em frações de segundo, a resposta $1/2$.

Evidencie-se, conseqüentemente, que o modo geral para se calcular o limite de uma função f , quando a variável x tende a um valor a , através do MAPLE V, corresponde ao a seguir enunciado; qual seja:

```
limit((f,x=a,dir);
```

Mas, além do cálculo automático de limites, que outras vantagens (considerando alguma vantagem – estrita - nesta automatização) existem na utilização de softwares algébricos? No que diz respeito ao puro resultado numérico, nada. Não se acrescenta absolutamente conhecimento algum para aquele que não sabe o que significa um limite no Cálculo Diferencial e Integral. E, além do mais, em verdade, afirme-se que o cálculo manual do respectivo limite não vem assegurar, de forma patente, que quem o resolveu tenha plena compreensão do que efetivamente foi determinado. Por outro lado, ressalte-se, também, que quem não sabe calcular um limite ou desconhece o que o mesmo significa, continuará com as deficiências originais mesmo conhecendo como determiná-lo eletronicamente.

Então, alguns, talvez, questionariam: para que servem tais aplicativos eletrônicos? Qual a importância dos mesmos na formação dos alunos que devem manipular uma teoria como a do Cálculo Diferencial e Integral? Primeiramente, afirme-se, que uma das vantagens na utilização de Softwares Algébricos reside no fato de ser sempre possível visualizar a respectiva representação geométrica da função em estudo; o que, por sua vez, já poderia contribuir para um melhor entendimento do limite em estudo; pois que seria possível “ver” as duas tendências simultaneamente. Porém, tal possibilidade está condicionada à aquisição inicial dos conceitos primeiros que fundamentam a teoria em questão.

Ressalte-se, porém, que a construção manual de determinados gráficos não é algo que se possa qualificar como simples (para a maioria das pessoas). Grande parte dos educandos (em particular) apresentam sérias dificuldades quanto à plotagem de pontos no Plano Cartesiano quando estes são originários dos pares de números reais gerados pela aplicação das funções da forma $y = f(x)$. Mesmo para profissionais da área, com certa experiência, a elaboração de muitos gráficos é algo que demanda algum esforço e pode custar um tempo considerável.

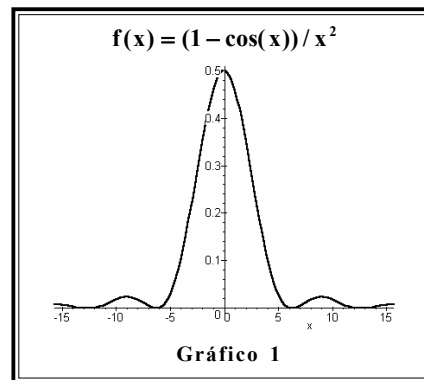
Entretanto, ao se analisar o gráfico de pode-se compreender o significado do valor do limite calculado; isto é, perceber-se-ia, efetivamente, que

quando a variável independente x tende (aproxima-se infinitamente, tanto por valores maiores ou por valores menores) a zero a função $y = f(x)$ tende ao real $1/2$.

Portando, utilizando-se, a seguinte seqüência de instruções:

```
plot((1-cos(x))/x^2,x=-5*Pi..5*Pi);
```

obter-se-ia, correspondentemente, o Gráfico 01 a seguir apresentado; qual seja:



Saliente-se, também, que quaisquer limites de funções (sejam elas algébricas ou transcendentas, quando a variável independente tende a valor real ou infinito) podem ser fácil e rapidamente determinados através de comandos específicos do MAPLE V; no entanto, deve-se, é claro, conhecer, de um lado, a correta semântica e a sintaxe dos correspondentes comandos e, de outro, a respectiva teoria (subjacente) sobre a existência de limites. A propósito, embora se tenha chegado ao valor $1/2$ (se tenha, efetivamente, calculado um tal valor), existe o limite em questão?

Certa vez, alguém teria dito apropriadamente: “... *os homens, mais do que soluções, querem certezas* ...”. Veja-se, conseqüentemente, em relação ao exemplo em pauta, que aquele que não conhece a teoria subjacente (ou que se inicia no correspondente campo de estudo) teria que confiar plenamente no resultado apresentado pelo aplicativo, não tendo o benefício da ‘certeza’. Neste aspecto, pouco o computador ajudaria, pois este não pensa. Executa apenas o que lhe é solicitado segundo o que foi programado. Assim, pela exposição anterior, insiste-se: que ‘certezas’ garantem a existência do limite calculado?

Admita-se, por outro lado, ser necessário a determinação das derivadas sucessivas da função real de variável real definida por: $f(x) = 2.x^4 - 4.x^2$ até a segunda ordem, bem como, a determinação das coordenadas dos pontos de máximo e dos pontos de mínimo da mesma.

Primeiramente, observe que para se determinar, através do MAPLE V, a derivada de uma função qualquer $f(x)$ (ou seja, a função $f'(x)$) toma-se, em geral, a seguinte seqüência de comandos; qual seja:

```
diff((f(x),x);
```

Já, para se determinar a derivada de segunda ordem da função $f(x)$ (ou seja, a função $f''(x)$) existem no MAPLE V, diversas formas. Uma das formas mais simples, porém, consiste em tomar $diff((f(x),x)$ como uma nova função de x e aplicar o comando anterior sobre esta função resultante; isto é, a derivada segunda de $f(x)$ seria determinada por:

```
diff(diff((f(x),x),x);
```

Repetindo-se sucessivamente o procedimento anteriormente descrito obter-se-iam as derivadas sucessivas da função $f(x) = 2.x^4 - 4.x^2$, as quais são funções cuja variável independente é a variável x ; isto é, ter-se-iam as funções: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^n(x)$.

Assim, as derivadas de primeira e segunda ordem da função enunciada por, $f(x) = 2.x^4 - 4.x^2$ as funções $f'(x) = 8.x^3 - 8.x$ e $f''(x) = 24.x^2 - 8$, seriam determinadas, através do aplicativo, respectivamente, através das seguintes seqüências de instruções; quais sejam:

```
diff(2*x^4-4*x^2,x);
```

```
diff(diff(2*x^4-4*x^2,x),x);
```

Do Cálculo elementar, sabe-se que as abscissas dos pontos extremos (dos pontos de máximos ou mínimos) de uma função são os valores da variável x que anulam a função derivada primeira. Desta forma, para se obter os valores -1 , 0 e 1 que anulam a função derivada primeira, toma-se, no MAPLE V, o seguinte conjunto de comandos; quais sejam:

```
g:=diff(2*x^4-4*x^2,x);  
solve(g=0,x);
```

Os valores de x que anulam a derivada primeira serão abscissas de pontos de máximo, se substituídos na derivada segunda, gerarem valores negativos e serão abscissas de pontos de mínimo se gerarem valores positivos (conforme, de forma elementar, se tem demonstrado).

Para se avaliar se os valores -1 , 0 e 1 geram valores positivos ou negativos quando substituídos na função derivada segunda, utilizam-se os seguintes comandos do MAPLE V; quais sejam:


```

h:=diff(diff(2*x^4-4*x^2,x),x);
subs(x=-1,h);
subs(x=0,h);
subs(x=1,h);

```

Portanto, obtém que $f(-1) = f(1) = 16 > 0$ e $f(0) = -8 < 0$; resultando afirmar que -1 e 1 são abscissas de pontos de mínimo e 0 é abscissa de ponto de máximo da função $f(x) = 2.x^4 - 4.x^2$.

Logo, para se determinar, através do MAPLE V, as correspondentes ordenadas dos pontos de máximo e de mínimo da função em estudo, utilizam-se as seguintes instruções; quais sejam:

```

f:=2*x^4-4*x^2;
subs(x=-1,f);
subs(x=0,f);
subs(x=1,f);

```

E, finalmente, os pontos de máximos e mínimos da função em estudo serão os pontos dados por $P_{\min 1}(-1,-2)$, $P_{\min 2}(1,-2)$ e $P_{\max 1}(0,0)$.

Observe, a propósito, que as características anteriormente evidenciadas poderiam, também, ser constatadas (diretamente) através de outros recursos (mais sofisticados) do MAPLE V. Contudo, a consideração dos mesmos exigiria apresentar grau de detalhamento sobre os recursos do MAPLE V não compatível com a natureza introdutória deste compêndio.

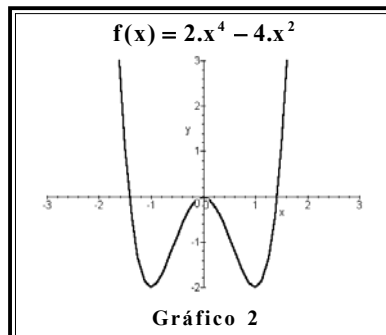
Assim, veja-se, entretanto, que (para o iniciante) mais interessante seria a visualização do gráfico da função em estudo; o que, como já evidenciado anteriormente, poderia ser obtido, pelo MAPLE V, tomando-se a seguinte linha de comandos; qual seja:

```

plot(2*x^4-4*x^2,x=-3..3,y=-2..3);

```

Nestas condições, o gráfico da função, $f(x) = 2.x^4 - 4.x^2$ com $x \in [-3, 3] \subset \mathfrak{R}$ e $y \in [-2, 3] \subset \mathfrak{R}$, seria dado por:



Muito embora o exemplo anterior de determinação das derivadas de uma função através do MAPLE V corresponda à obtenção da derivada de uma função de uma variável, ressalte-se que através do software em questão pode-se determinar, também, as derivadas sucessivas de quaisquer funções de duas ou mais variáveis independentes (sejam variáveis reais ou complexas).

Desta forma, admita-se, a título de exemplo, ser necessário a determinação da deriva parcial de terceira ordem da função real de variáveis reais definida por $f(x, y, z) = 3.x^4.y^3 - 4.x.y^3.z^4 + 2.x.y^2.z^3$ uma vez em relação à variável x e duas vezes em relação à variável y .

A correspondente seqüência de comandos para se obter a função derivada em questão, ou seja, $\frac{\partial^3 f(x, y, z)}{\partial x \partial y^2} = 72.x^3.y - 24.y.z^4 + 4.z^3$ será dada por:

diff(3*x^4*y^3-4*x*y^3*z^4+2*x*y^2*z^3,x,y,y);

Através do MAPLE V, é possível, também, a obtenção de integrais definidos ou integrais indefinidos de quaisquer diferenciais, sejam estes diferenciais de funções reais ou de funções complexas; sendo ainda possível a determinação de integrais múltiplos dos mais distintos graus de complexidade.

Para se ilustrar a afirmação anterior, considere o diferencial de primeira ordem da função real de variável real definida por; $f(x) = x^2 . \text{sen}(x) + \frac{\cos(x)}{4}$

isto é, seja o diferencial: $dy = (2.x.\text{sen}(x) + x^2.\cos(x) - \frac{\text{sen}(x)}{4}).dx$

Ao se integrar dy , obtém-se a função $y = f(x)$, ou seja:

$$y = f(x) = \int dy = \int (2.x.\text{sen}(x) + x^2.\cos(x) - \frac{\text{sen}(x)}{4}).dx = x^2.\text{sen}(x) + \frac{\cos(x)}{4} + C$$

Tomando-se o caso em que a constante de integração C é nula, as instruções que permitem, através do MAPLE V, obter o resultado anterior serão dadas por:

int(2*x*sen(x)+x^2*cos(x)-(sen(x))/4,x);

Também é possível determinar os valores de integrais definidos através de comandos do MAPLE V. Assim, sendo necessário determinar o integral definido do diferencial $dy = (x^9 - 4.x^4 - 2.x^3 - 2.x + 2).dx$ tomado de 1 até 4,

isto é, o $\int_1^4 (x^9 - 4x^4 - 2x^3 - 2x + 2)dx$ utilizando-se as seguintes instruções;

quais sejam:

```
int(x^9-4*x^4-2*x^3-2*x+2,x=1..4);
```

obter-se-ia o resultado $\int_1^4 (x^9 - 4x^4 - 2x^3 - 2x + 2)dx = 519513/5$.

Caso, entretanto, fosse necessário determinar o valor obtido em notação posicional - base dez, dever-se-iam utilizar os seguintes comandos; quais sejam:

```
int(x^9-4*x^4-2*x^3-2*x+2,x=1..4);  
evalf("");
```

Logo, obter-se-ia o resultado: $\int_1^4 (x^9 - 4x^4 - 2x^3 - 2x + 2)dx = 103902,6$.

De forma análoga ao apresentado para a determinação de derivadas sucessivas, pode-se, também, determinar integrais múltiplos através dos recursos do MAPLE V. Neste sentido, a título de exemplificação, veja que um

integral duplo da forma $\int_1^3 \int_2^5 (2x^3 \cdot y^4 - 4x^2 \cdot y^5) dx dy = -20951/5$ seria determi-

nado (no MAPLE V), em frações de segundo, através das seguintes instruções; quais sejam:

```
int(int(2*x^3*y^4-4*x^2*y^5,x=2..5),y=1..3);
```

A despeito dos exemplos anteriormente ilustrados (muito simples, resalte-se) de utilização do MAPLE V, deve-se acrescentar que quaisquer conceitos do Cálculo Diferencial e Integral podem ser manipulados através do aplicativo em questão. Assim, problemas relacionados com a solução de equações diferenciais ordinárias ou parciais, problemas de otimização, estudo de funções, desenvolvimento em séries de potências, transformadas de Laplace, séries e sucessões numéricas e de funções, integrais de linha, integrais de superfície, séries de Fourier, transformadas Z, enfim, diversos assuntos tratados no Cálculo Diferencial e Integral, em seus mais distintos níveis, podem ser avaliados e experimentados mediante a utilização do MAPLE V; bastando para tanto conhecer a semântica e a sintaxe da correspondente linguagem utilizada pelo software e os conceitos matemáticos envolvidos (principalmente).

No presente compêndio, como já evidenciado, pretendia-se apresentar ligeiras considerações sobre as possibilidades de utilização do MAPLE V na resolução de alguns problemas comuns do Cálculo Diferencial e Integral

relacionados à determinação de limites, derivadas e integrais. Portanto, não é intenção apresentar considerações sobre assuntos mais complexos, muito embora (saliente-se novamente) os mesmos poderiam ser facilmente analisados. Consiste, pois, este resumo mais uma motivação para os interessados do que, propriamente, uma instrução relacionada ao vasto campo de possibilidades.

3. GRÁFICOS EM ESPAÇO BIDIMENSIONAL ATRAVÉS DO MAPLE V

Assim, de outra forma, veja-se que uma das partes mais belas (em termos visuais) e indispensáveis (em termos da análise) da Matemática diz respeito, certamente, aos gráficos de conjuntos de pontos em espaço bidimensional e tridimensional. Contudo, uma das grandes dificuldades tanto dos educandos quanto de todos aqueles que estudam a Matemática corresponde, exatamente, à implementação manual dos gráficos de curvas, planos, superfícies e volumes. Mesmo professores com larga experiência, às vezes se defrontam com gráficos que não podem, nem de longe, ser qualificados como simples ou fáceis de representação.

Com o advento do MAPLE V (e de outros softwares similares, é claro) tais problemas deixaram de existir (em parte), uma vez que o mesmo possui recursos fantásticos que permitem a apresentação da representação de quaisquer gráficos de conjuntos de pontos em espaço real bidimensional e tridimensional de forma rápida, fácil e precisa (pelo menos muito mais precisa que a elaboração manual).

Assim sendo, apresentar-se-ão, na seqüência, alguns exemplos de utilização do MAPLE V na representação gráfica de determinados conjuntos de pontos no espaço real bidimensional e tridimensional.

Como considerado anteriormente, a forma específica dos comandos do MAPLE V para a representação de uma determinada função real de uma única variável real da forma $y = f(x)$, definida para todos os x de um intervalo fechado de números reais (isto é, $\forall x \in [x_1, x_2] \subset \mathfrak{R}$), é enunciada pela seguinte estrutura; qual seja:

$\text{plot}(f(x), x=x_1..x_2);$

na qual, resalte-se, $f(x)$ indica a função da forma $y = f(x)$ a ser representada graficamente e a notação $x=x_1..x_2$ indica o intervalo de valores reais da variável x .

A função *plot* permite acrescentar a definição dos correspondentes valores de y ($y \in [f(x_1), f(x_2)] \subset \mathfrak{R}$) através da seguinte forma geral, qual seja:

```
plot(f(x),x=x_1..x_2,y=y_1..y_2);
```

Saliente-se, ainda, que com a mesma função *plot*, o MAPLE V pode representar um conjunto de várias funções da forma $y = f(x)$ tomadas em um mesmo intervalo real da variável x . A forma geral que possibilita a edição simultânea do gráfico de várias funções de uma variável é enunciada por:

```
plot({f_1(x),f_2(x),f_3(x),...,f_n(x)},x=x_1..x_2);
```

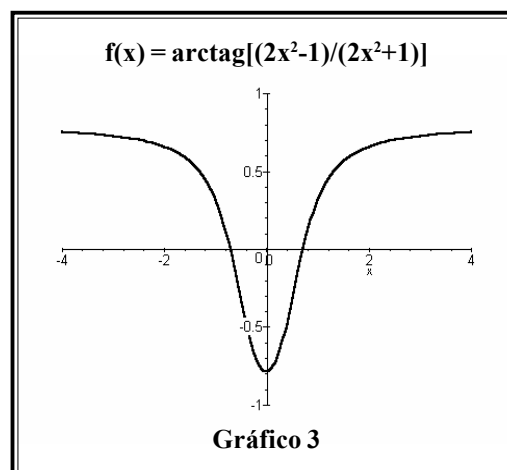
Considere, portanto, os exemplos de representação gráfica dos conjuntos de pontos no plano cartesiano a seguir apresentados, considerando-se as correspondentes instruções no MAPLE V; quais sejam:

Exemplo 1a: Representação gráfica de $f(x) = \text{arctag}[(2x^2-1)/(2x^2+1)]$, tomada para $x \in [-4, 4]$ e $y \in [-1, 1]$

Para editar-se o correspondente gráfico, tomam-se as instruções:

```
plot(arctan((2*x^2-1)/(2*x^2+1)),x=-4..4,y=-1..1);
```

cujo respectivo gráfico será dado por:



Exemplo 2a: Representação do gráfico das funções definidas por: $f_1(x) = e^x$; $f_2(x) = e^{-x}$; $f_3(x) = -\text{sech}(x)$, para $x \in [0, 4]$ e $y \in [-2, 2]$.

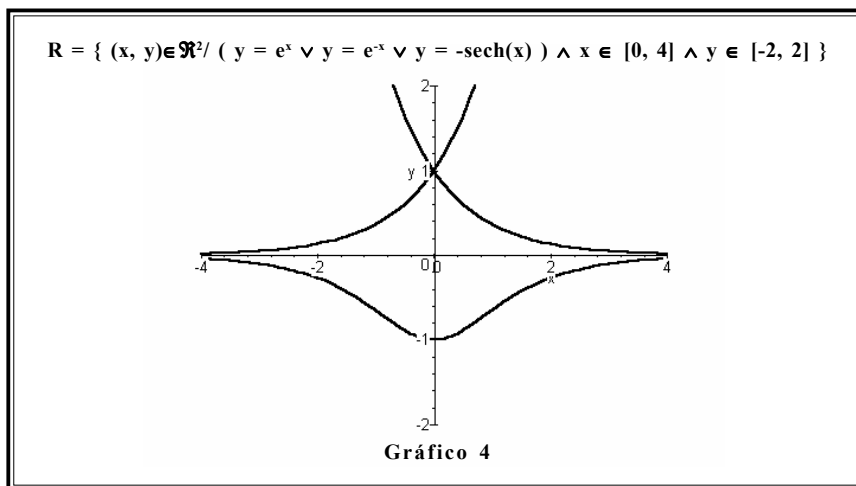
Observe, a propósito, que o gráfico a ser representado corresponde ao da relação binária definida por:

$$R = \{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 / (y = e^x \vee y = e^{-x} \vee y = -\operatorname{sech}(x)) \wedge x \in [0, 4] \wedge y \in [-2, 2] \}$$

Para editar-se o correspondente gráfico, tomam-se as instruções:

`plot({E^x,E^(-x),-sech(x)},x=-4..4,y=-2..2);`

cujo respectivo gráfico será dado por:



A despeito dos exemplos anteriores, deve-se observar que, em muitas das vezes, é necessário representar, simultaneamente, o gráfico de várias funções definidas em intervalos diferentes da variável x . Em tais casos, é possível, também, aplicar a instrução *plot* para resolver o problema.

Assim, admita-se ser necessário representar o gráfico da função real de variável real $y = f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 6, & \text{se } -6 \leq x \leq -2,5 \wedge -4 \leq y \leq 7 \\ -x^3, & \text{se } -2 \leq x \leq 1,5 \\ x^2 - 4x - 3, & \text{se } 2 \leq x \leq 5 \wedge -8 \leq y \leq 9 \\ x, & \text{se } 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Tendo em vista a natureza restritiva do comando *plot*, não é possível, entretanto, editar o gráfico da função em referência diretamente. Deve-se definir cada gráfico separadamente, gravando-os em uma “variável de sistema” e em seguida mandar executar, simultaneamente, o conjunto dos gráficos armazenados em tais “variáveis”.

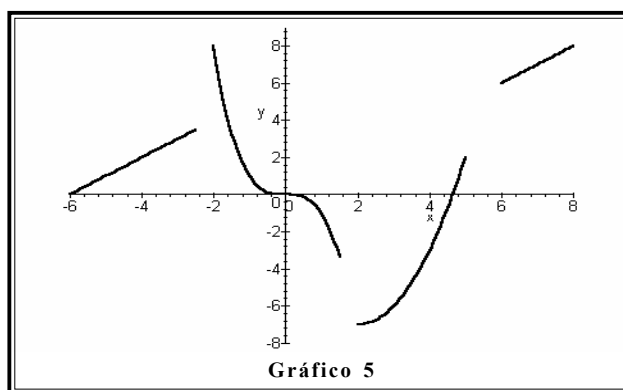
Veja, então, que aplicando o conjunto de instruções :

```

a:=plot(x+6,x=-6..-2.5,y=-4..7):
b:=plot(-(x^3),x=-2..1.5):
c:=plot(x^2-4*x-3,x=2..5,y=-8..9):
d:=plot(x,x=6..8):
plot({a,b,c,d});

```

obtém-se o seguinte gráfico; qual seja:



Muitas são as possibilidades de utilização da função *plot*. Pode-se, por exemplo, editar gráficos de funções definidas através de equações paramétricas; sendo a correspondente forma geral dada por:

```

plot([x(t),y(t),t=t1..t2]);

```

Na instrução em referência, observe que $x(t)$ e $y(t)$ correspondem às equações paramétricas das variáveis x e y , enquanto que $t = t_1.. t_2$ representa a variação considerada para o parâmetro t , isto é, denota o intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$.

Através da função *plot* na forma paramétrica pode-se editar, então, o gráfico de quaisquer curvas definidas em coordenadas polares, bastando-se, para tanto, tomar as equações transformativas de coordenadas cartesianas em coordenadas polares, isto é, $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos(\theta) \\ y = \rho \cdot \text{sen}(\theta) \end{cases}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Admita-se, por exemplo, que fosse necessário editar o gráfico da limaçon definida por: $\rho = 2 - 4 \cdot \cos(\theta)$

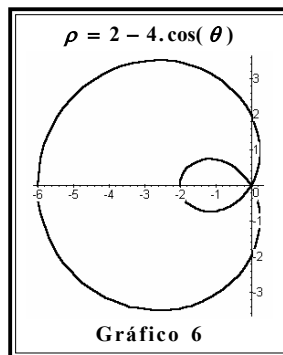
Convencione-se denominar θ de t (isto é, tome-se θ igual a t). Assim, a limaçon em questão seria enunciada por $\rho = 2 - 4 \cdot \cos(t)$ e as respectivas equações paramétricas $x(t)$ e $y(t)$ seriam definidas, com $0 \leq t \leq 2\pi$, por:

$$\begin{cases} x(t) = (2 - 4 \cdot \cos(t)) \cdot \cos(t) \\ y(t) = (2 - 4 \cdot \cos(t)) \cdot \sin(t) \end{cases}$$

Logo, a linha de comandos que permitirá a edição do gráfico da limaçon em questão será enunciada por:

```
plot([(2-4*cos(t))*cos(t),(2-4*cos(t))*sin(t),t=0..2*Pi]);
```

sendo o correspondente gráfico dado por:



Pode-se, também, editar simultaneamente vários gráficos em coordenadas polares; sendo a forma geral que permite uma tal representação é dada por:

```
plot({[x1(t),y1(t),t=tα..tβ],[x2(t),y2(t),t=tγ..tφ],..., [xn(t),yn(t),t=tη..tθ]});
```

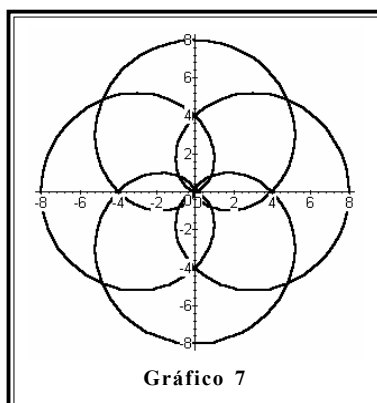
Nas instruções anteriores, cada uma das correspondentes expressões do tipo $[x_1(t), y_1(t), t=t_\alpha..t_\beta]$, $[x_2(t), y_2(t), t=t_\gamma..t_\phi]$, ..., $[x_n(t), y_n(t), t=t_\eta..t_\theta]$ passam a identificar uma determinada função da forma $y = f(x)$ a qual é parametrizada em função de um parâmetro t e tomada para todos os valores $t \in [t_0, t_1]$.

Como um exemplo (elementar) de aplicação das instruções anteriormente consideradas, apresente-se a representação simultânea das cardioides: $\rho = 4 \cdot (1 - \sin(t))$, $\rho = 4 \cdot (1 - \cos(t))$, $\rho = 4 \cdot (1 + \cos(t))$ e $\rho = 4 \cdot (1 + \sin(t))$.

Desta forma, através das instruções:

```
plot({[4*(1-sin(t))*cos(t),4*(1-sin(t))*sin(t),t=0..2*Pi], [4*(1-cos(t))*cos(t),4*(1-cos(t))*sin(t),t=0..2*Pi], [4*(1+cos(t))*cos(t),4*(1+cos(t))*sin(t),t=0..2*Pi], [4*(1+sin(t))*cos(t),4*(1+sin(t))*sin(t),t=0..2*Pi]});
```


tem-se gerado o gráfico da seguinte relação binária; qual seja:



4. GRÁFICOS EM ESPAÇO TRIDIMENSIONAL ATRAVÉS DO MAPLE V

Gráficos de pontos em espaço real tridimensional também podem ser representados através de comandos do MAPLE V. A função que possibilita tal edição de gráficos é denotada por *plot3d*.

De forma geral, para se editar o gráfico de funções reais de duas variáveis reais na forma $z = f(x, y)$, no espaço real tridimensional, utiliza-se a seguinte seqüência de instruções; quais sejam:

```
plot3d(f(x,y),x=x0..x1,y=y0..y1);
```

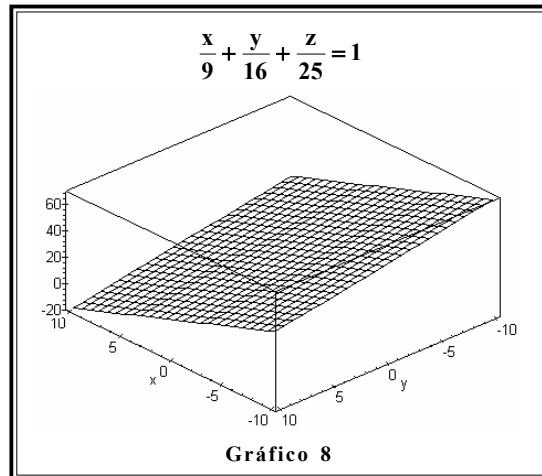
Em *plot3d*, $f(x, y)$ vem representar a função $z = f(x, y)$ cujo gráfico será editado no espaço real tridimensional $\mathfrak{R}^3 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$, $x = x_0 \dots x_1$ e $y = y_0 \dots y_1$ representam, respectivamente, os valores das variáveis x e de y tais que compoñham os pares ordenados (x, y) pertencentes ao domínio de definição da função $z = f(x, y)$; ou seja, $(x, y) \in D(f) \subset \mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$.

Mostre-se, então, a representação do plano de equação $x/9 + y/16 + z/25 = 1$ com $(x, y) \in [-10, 10] \times [-10, 10]$, tal que $[-10, 10] \times [-10, 10] \subset \mathfrak{R}^2$.

Adequando o problema às restrições da função *plot3d*, resulta a seguinte linha de instruções; qual seja:

```
plot3d(25*(1-x/9-y/16),x=-10..10,y=-10..10);
```

E, conseqüentemente, obtém-se o seguinte gráfico; qual seja:



Inúmeros outros gráficos de funções de duas variáveis podem ser editados através da função *plot3d*. Entretanto, deve-se observar que, na forma enunciada anteriormente, as funções devem ser tomadas, necessariamente, como $z = f(x, y)$.

Para exemplificar algumas das inúmeras possibilidades de representação, considere os exemplos (elementares) a seguir apresentados; quais sejam:

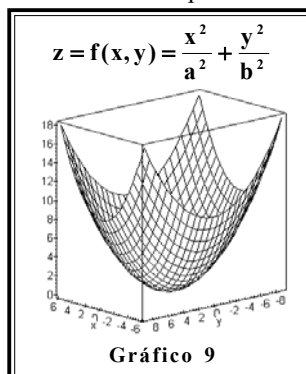
Exemplo 1b: Representação gráfica do parabolóide elíptico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, em

que toma-se $a = 2$, $b = 3$ e $(x, y) \in [-6, 6] \times [-9, 9] \subset \mathfrak{R}^2$

Para editar-se o correspondente gráfico, tomam-se as instruções:

`plot3d((x^2)/4+(y^2)/9,x=-6..6,y=-9..9);`

cujo respectivo gráfico será dado por:

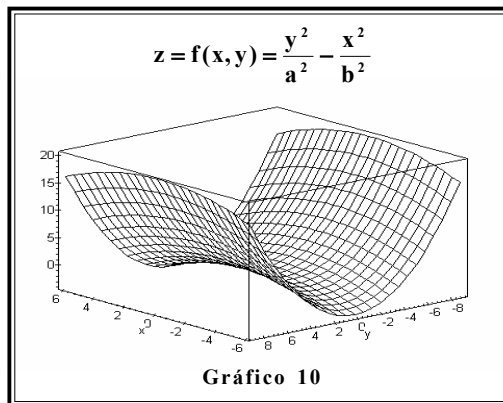


Exemplo 2b: Representação gráfica do parabolóide hiperbólico, $z = \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}$
em que toma-se $a = 2$, $b = 3$ e $(x, y) \in [-6, 6] \times [-9, 9] \subset \mathfrak{R}^2$

Para editar-se o correspondente gráfico, tomam-se as instruções:

```
plot3d((y^2)/4-(x^2)/9,x=-6..6,y=-9..9);
```

cujo respectivo gráfico será dado por:



De forma análoga ao considerado para a especificação *plot* gráficos de diversas funções (definidas em um mesmo domínio) podem ser editados simultaneamente (em conjunção) através da instrução *plot3d*. Ou seja, podem ser geradas, através de *plot3d*, gráficos de relações.

Para tanto, deve-se tomar a seguinte forma geral se se pretende editar o conjunto de n -funções de variáveis independentes x e y (sendo as n -funções enunciadas por $z_1 = f_1(x, y)$, $z_2 = f_2(x, y)$, ..., $z_n = f_n(x, y)$ definidas para todos os pares ordenados $(x, y) \in [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \subset \mathfrak{R}^2$); qual seja:

```
plot3d({f1(x, y),f2(x, y),...,fn(x, y)},x=x0..x1,y=y0..y1);
```

Também, como evidenciado para a função *plot*, através de *plot3d* é possibilitado a edição do gráfico de superfícies (e/ou de volumes) quando estes são definidos através de equações paramétricas.

Assim, veja-se que a forma geral para se editar o gráfico de uma superfície definida por equações paramétricas corresponde à seguinte instrução; qual seja:

```
plot3d([f(u,v),g(u,v),h(u,v)],u=u1..u2,v=v1..v2);
```

```
plot3d([f(u,v),g(u,v),h(u,v)],u=u1..u2,v=v1..v2);
```

Já a correspondente forma geral para se editar o gráfico de várias superfícies (definidas na forma paramétrica) simultaneamente é dada por:

```
plot3d([f1(u,v),g1(u,v),h1(u,v)], [f2(u,v),g2(u,v),h2(u,v)], ..., [fn(u,v),gn(u,v),hn(u,v)]), u=u1..u2, v=v1..v2);
```

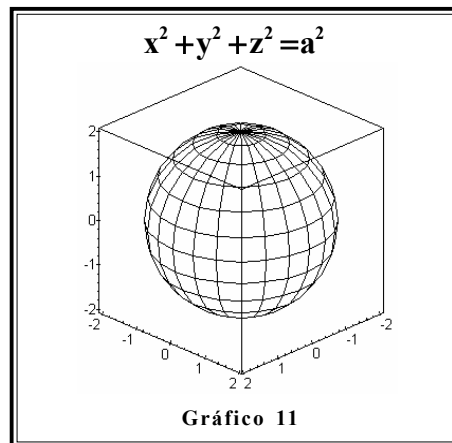
Assim sendo, considere os gráficos das superfícies a seguir representadas mediante a aplicação das correspondentes sintaxes enunciadas anteriormente.

Exemplo 3b: Representação gráfica da superfície definida por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, onde toma-se $a = 2$

Para editar-se o correspondente gráfico, tomam-se as instruções:

```
plot3d([2*(cos(u))*sin(v), 2*(sin(u))*sin(v), 2*cos(v)], u=0..2*Pi, v=0..2*Pi);
```

cujo respectivo gráfico (o da esfera) será dado, obviamente, por:

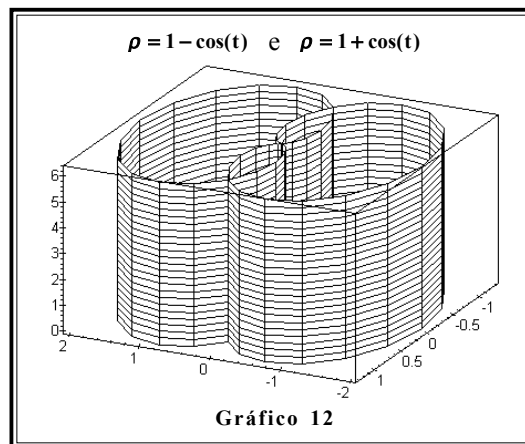


Exemplo 4b: Representação gráfica simultânea das superfícies geradas pelas seguintes equações $\rho = 1 - \cos(t)$ e $\rho = 1 + \cos(t)$.

Para editar-se o correspondente gráfico, tomam-se as instruções:

```
plot3d({[(1-cos(u))*cos(u),(1-cos(u))*(sin(u)),v],  
[(1+cos(u))*cos(u),(1+cos(u))*sin(u),v]},u=0..2*Pi,v=0..2*Pi);
```

cujo respectivo gráfico será dado por:



5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conquanto seja desnecessário observar que as observações apresentadas ao longo deste texto estejam muito distantes das amplas possibilidades de aplicação do MAPLE V na manipulação de conceitos matemáticos, ressalte-se, que o mesmo não constitui, em absoluto, algo conclusivo, no sentido estrito da palavra; uma vez que mesmo os poucos temas tratados poderiam ser objeto de extensas experimentações através dos recursos do MAPLE V. O texto apresentado, em essência, poderia ser considerado como um ensaio centrado na premissa maior de motivar o leitor quanto ao assunto abordado.

Todavia, os poucos exemplos apresentados bem podem mostrar a potencialidade dos recursos de que dispõe o MAPLE V para experimentações dos mais variados conceitos matemáticos.

Várias foram, entretanto, as simplificações e omissões na apresentação deste compêndio, uma vez que não se poderia expandir mais detalhadamente as observações consideradas sem adentrar-se em nível de particularização incompatível com o propósito de sua apresentação. Assim, esclareça, uma vez mais, que as considerações aqui estabelecidas não cobrem totalmente a abrangência dos comandos *plot* e *plot3d* do MAPLE V para a edição de

gráficos de conjuntos de pontos em espaços reais bidimensionais e tridimensionais, e, nem tão pouco se limitam àquelas apresentadas para a manipulação de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral elementar. Corresponde, pois, o presente texto a uma simples introdução ao assunto subjacente e a uma pequena amostra das potencialidades do referido Software Algébrico como auxílio no estudo de questões matemáticas.

Ressalte-se que, quanto à edição de gráficos, por exemplo, diversas outras instruções existem no MAPLE V que permitem a otimização e manipulação de quaisquer que sejam os gráficos a representar. Comandos existem para se rotacionar, inverter ou girar superfícies em torno dos eixos coordenados; instruções específicas podem ser utilizadas para editar o gráfico de superfícies ou volumes em coordenadas esféricas ou cilíndricas; parâmetros podem ser definidos para a configuração da forma, da dimensão e da cor dos respectivos gráficos; podem ser evidenciadas características de uma curva tais como assíntotas, curvatura, pontos críticos e outras; instruções avançadas existem para se editar gráficos em movimento; podem ser acrescentadas informações particulares aos gráficos tais como títulos, legendas, fórmulas, denominação dos eixos coordenados; podem ser definidas distintas texturas dos gráficos a representar; e, muitas outras características podem ser incorporadas nas correspondentes edições de gráficos.

Como se objetivou evidenciar, as possibilidades de utilização do MAPLE V são ilimitadas e, como se apresentou, as formas de implementação são, em certa medida, muito simples. Contudo, a despeito das potencialidades de um tal software, julga-se sempre necessário afirmar que o mesmo não ensina Matemática a pessoa alguma. Pode, sim, facilitar o trabalho e possibilitar o estabelecimento de um campo ilimitado de investigações e experimentações; pois, máquinas, dispositivos eletrônicos, calculadoras ou softwares não realizam “inferências”, “não sabem pensar” e, conseqüentemente, somente executam aquilo para o qual foram programados, estando a realização de quaisquer tarefas através dos mesmos condicionadas à concepção com a qual tenham sido elaborados e ao conhecimento das teorias da Matemática que se devam possuir.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DIAS, C. M. C. *A Matemática através de aplicativos computacionais*. Curitiba: C.M.C. DIAS, 1995.

_____. *Compêndios de matemática e lógica matemática: uma abordagem extemporânea*. Curitiba: C.M.C. DIAS, 1998.