RECIT
Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia

Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia
ISSN: 2175-1846

https://periodicos.utfpr.edu.br/recit

A transformada de fourier e o processamento eletrônico dos sinais

Claudia Schwartzbach
cladiaschwartzbach@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Medianeira, Paraná, Brasil

Tásia Hickmann
hickmann@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Medianeira, Paraná, Brasil

RESUMO

Apresenta-se neste artigo uma breve biografia sobre o cientista Joseph Fourier acompanhada de algumas áreas em que é aplicada sua famosa técnica matemática, chamada Transformada de Fourier. Como caso particular para fim de estudo e entendimento desta técnica, é abordado o processamento eletrônico de dados vinculado ao som. O processo da captação ao tratamento dos dados para obtenção de sinais eletrônicos analógicos ou digitais através da aplicação da Transformada de Fourier para conservação dos dados é descrita na sequência. É possível desta forma converter os sinais eletrônicos e ainda obter uma reprodução do sinal inicial sem grandes perdas na qualidade do som.

PALAVRAS-CHAVE: Som, Captação, Dados.

INTRODUÇÃO

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) nasceu na França e ficou órfão ainda criança. Estudou na Escola Normal Superior da França, onde teve como professores Laplace e Legendre. Tornou-se professor e criou um novo ramo da Física teórica, chamada Física – Matemática, destacando-se pelo desenvolvimento de solução analítica para a equação diferencial parcial da difusão do calor através de séries em termos de senos e cossenos, mais conhecidas como Séries de Fourier, além da Transformada de Fourier que consiste em uma versão contínua da série, obtida considerando-se um número infinito de frequências, servindo para analisar sinais e abrir o mundo a outro domínio de tempo e frequência. As séries podem ser associadas a funções que representam situações físicas como sinais musicais, de imagem ou elétricos ou utilizadas para resolver equações diferenciais parciais, como a equação da onda e do calor, enquanto que a Transformada de Fourier tem maior aplicabilidade na física e química quântica, sendo tipicamente utilizada para decompor um sinal nas suas componentes em frequências e suas amplitudes.

Fourier não poderia imaginar quando desenvolveu sua teoria sobre a Transformada o quão versátil seria o uso da mesma. Hoje ela é utilizada em vários campos da Física e da Matemática, de acordo com LOURENÇO JÙNIOR (2014) pode ser na teoria de probabilidades, processos estocásticos, codificação de fonte, codificação para controle de erros, processamento de sinais e imagens, análise harmônica de estruturas, movimentos ondulatórios, propagação eletromagnética, projeto de filtro, teoria da modulação, harmônicos em sistema de potências e poluição eletromagnética, concordando com LOURENÇO JÚNIOR (2014), FILHO (2006) e CASTRO (2014). Dentro destes campos de aplicações, a Transformada de Fourier possibilita que equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes sejam transformadas em equações algébricas ordinárias, fazendo com que o comportamento em cada frequência seja resolvido independentemente. HIGUTI (2003) diz que sua aplicação na operação de convolução transforma-a em operações simples, permitindo que cálculos como multiplicação polinomial, cálculo da função densidade de probabilidade de uma soma de variáveis aleatórias, entre outros, sejam efetuados de forma mais simples.

Na sua versão discreta, a Transformada facilita o cálculo em computadores ao utilizar algoritmos baseados na Transformada rápida de Fourier de acordo com PUHLMANN (2014), enquanto a Transformada integral é conveniente para problemas de dependência espacial, podendo ainda ser útil na busca de solução para equações diferenciais.

Uma teoria com amplo campo de aplicações que permitiu e ainda permite o desenvolvimento de tecnologias deve ser continuamente estudado a fim de se compreender como é feito na prática a utilização da Transformada de Fourier. Portanto, busca-se apresentar neste artigo uma das muitas aplicações da Transformada de Fourier ao se fazer a transformação do som em sinal analógico, destacando os conceitos matemáticos que associam a prática da reprodução sonora com o conceito matemático em questão

PROCESSAMENTO ELETRÔNICO DE SINAIS

O sistema de mídia eletrônico consiste em um conjunto de aparatos tecnológicos que tem por função copiar sinais físicos de natureza aleatória. Inicialmente essa cópia é feita de forma analógica, ou seja, num formato elétrico, na sequência é transformado em um formato numérico que permite o processamento computacional dos sinais. Através deste é possível fazer uma análise a respeito da qualidade desse sistema de mídia eletrônica, sendo esta análise feita por meio de decomposição de sinais em frequências que se baseiam na transformada de Fourier. Essencialmente o que se faz é captar um sinal, transformando-o para o formato elétrico e então aplicando sobre ele diversas operações de forma a manter a essência básica e posteriormente reconstituir o sinal que está no formato elétrico para o seu formato original.

O sinal que será levado em consideração para este estudo é o acústico. De acordo com LAZZARINI (1998) o som é uma qualidade perceptiva que é resultado da ocorrência de distúrbios das moléculas de um meio em um certo espaço de tempo, apresentando-se na forma de ondas em sua propagação pelo meio. Segundo SOUZA (2011) a perturbação causada pela onda é descrita, em um dado instante, por um deslocamento sofrido pelo ar que se encontrava em uma posição inicial definida. Utilizam-se os sinais elétricos para a codificação do som, pois esses podem ser transmitidos a longas distâncias e armazenados em pouco espaço e por longo tempo, tratados para minimizar ruídos, copiados para serem ouvidos por vários usuários, convertidos numericamente, modelados computacionalmente, de modo que ao serem reproduzidos contenham a informação original.

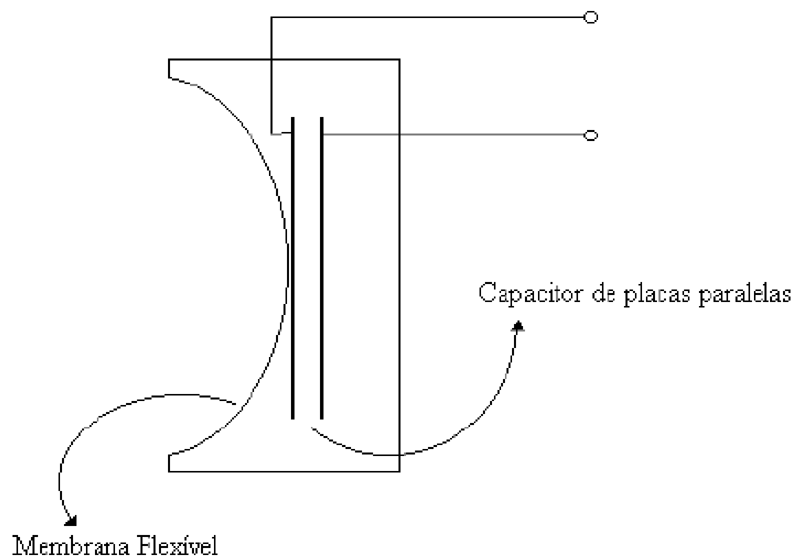
Segundo TAKAHASHI (2002) quando o sinal está expresso em uma sequência de números, este pode ser submetido a qualquer operação que possa ser expressa numericamente, o que amplia o número de procedimentos que podem ser aplicados ao sinal, especialmente por meio do computador, que é uma ferramenta de mídia tecnológica. Um destes procedimentos trata-se da transformada de Fourier que depende do sinal estar na sua forma numérica para ser aplicada.

Um sistema de mídia eletrônico é visto como um mapeamento reversível, pois os elementos dos terminais são transdutores, os quais traduzem o sinal (som) na forma elétrica e sinais na forma elétrica na sua forma original (som). Quando o tratamento do sinal elétrico é feito no formato analógico o sistema é dito analógico, e quando o tratamento destes sinais é feito na forma digital o sistema é dito digital. O tratamento destes sinais elétricos, tanto na forma analógica quanto digital, é realizado por meio de circuitos no interior do sistema. Ainda segundo TAKAHASHI (2002) o objetivo destes sistemas é produzir na saída um sinal o mais fiel possível ao sinal de entrada e o grande problema de garantir a qualidade de um sistema de mídia eletrônica é garantir a viabilidade da reversibilidade de todas as transformações.

O MICROFONE NA CAPTAÇÃO DO SOM

O microfone produz um sinal elétrico de gráfico idêntico ao gráfico de um sinal acústico. Ele possui uma membrana flexível exposta a ondas sonoras e atrás da membrana encontra-se uma placa móvel que se move de acordo com a membrana e se aproxima de uma placa fixa no cabo do microfone (Figura 1). Além disso, é criado um circuito elétrico para energizar o microfone e manter a carga do capacitor constante.

Figura 1. Esquema construtivo de um microfone (Encontrada em TAKAHASHI (2002))



Quando a membrana é atingida pelo som ela vibra e o seu deslocamento é proporcional a diferença de pressão:

$$\Delta_x(t) = K_m \Delta_p(t), \tag{1.0}$$

Onde:

$\Delta_x(t)$ é a variação da placa móvel do capacitor em relação a sua posição inicial;

$\Delta_p(t)$ corresponde ao sinal sonoro;

K_m é a constante de proporcionalidade (de uma mola).

Como as placas se movem, a distancia entre elas será dada por:

$$d(t)=d_0+\Delta_x(t), \tag{2.0}$$

onde d_0 é a distância entre as placas antes da oscilação. Substituindo a equação (1.0) na equação (2.0), tem-se:

$$d(t)=d_0+K_m\Delta_p(t). \tag{3.0}$$

Como a capacitância é uma grandeza inversamente proporcional às distâncias entre as placas do capacitor, essa é dada por:

$$C(t)=\alpha\frac{1}{d(t)}, \tag{4.0}$$

Já a carga (Q) do capacitor é um valor constante e a tensão ($v(t)$) entre os seus terminais obedece a seguinte lei:

$$Q=C(t)v(t), \tag{5.0}$$

Através das a equações (4.0) e (5.0), chega-se a:

$$v(t)=\frac{Q}{\alpha}d(t). \tag{6.0}$$

Substituindo a equação (3.0) na equação (6.0) tem-se:

$$v(t)=\frac{Q}{\alpha}¿ \tag{7.0}$$

Como $\frac{Q}{\alpha}d_0=\beta$, pois é uma constante e $\frac{Q}{\alpha}K_m=\gamma$, pois também é uma constante, pode-se reescrever a equação (7.0) como:

$$v(t)=\beta+\gamma\,\Delta_p(t). \tag{8.0}$$

Portanto, ao considerar o gráfico do sinal sonoro $\Delta_p(t)$ e o gráfico do sinal $v(t)$ que corresponde a saída de um microfone, é notável que o que diferencia os dois é apenas a escala e um fator deslocamento.

O sinal sonoro captado pelo microfone possui uma determinada composição de frequência ao entrar no sistema de mídia eletrônico, que se caracteriza por uma soma de senóides com diversas frequências e amplitudes. Ao passar pelo sistema de mídia é possível bloquear parte destes senóides se os componentes não forem de boa qualidade, podendo assim degradar o sinal, sofrendo uma perda de qualidade quando reproduzido para o ouvinte. Então o problema consiste em analisar com quais frequências as senóides são adequadamente transmitidas e com quais frequências são bloqueadas nestes componentes. Esta análise está associada com a transformada de Fourier.

A fim de entender a análise do tratamento do som retratado até este momento, apresentam-se na seção a seguir, definições matemáticas relacionadas com a transformada de Fourier, com a finalidade de se compreender as funções e operações necessárias para a realização desse processo.

DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS RELEVANTES AO ESTUDO

Para entender a processabilidade de sinais se faz necessário inicialmente apresentar algumas definições básicas relacionadas a transformada de Fourier, operações com sinais e alguns sinais especiais. Nesta situação em particular a transformada de Fourier é entendida como sendo a classe das distribuições construídas a partir da Função Delta de Dirac denominada função impulso.

Definição: A Função Delta de Dirac é designada como:

$$\delta(t)=\begin{cases} 0, \forall\ t \neq 0 \\ \infty, t=0 \end{cases}, \tag{9.0}$$

Cuja integral é dada por:

$$\int_{0^{-¿}} 0^{+¿}\delta(t)\,dt=1¿, \tag{10.0}$$

Essa integral é então entendida como a função escada:

$$U(t)=\int_{0^{-¿}} 0^{+¿}\delta(t)\,dt=\begin{cases} 0, t<0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}.¿ \tag{11.0}$$

Esta função quando deslocada e multiplicada por escalares gera funções descontínuas combinadas com o conjunto das funções contínuas, e suas derivadas serão escritas como combinações de $\delta(t)$ e suas derivadas.

Definição: O conjunto de funções Δ é formado por todas as funções geradas como combinação da função $\delta(t)$, de suas derivadas e de suas integrais.

Definição: O conjunto de funções generalizadas, ou distribuições D é dado por:

$$D = C^{\infty} + \Delta . \qquad (12.0)$$

Definição: Um sinal $x(t) \in D$ é definido como uma distribuição se satisfaz as condições de Dirichlet:

1. $\int_T |x(t)| dt < \infty \, \forall \; T$;

2. $x(t)$ tem um número finito de mínimos e máximos em todo intervalo T;

3. $x(t)$possui um número finito de descontinuidades em todo intervalo T, sendo T um intervalo finito de R.

Como os sinais são o objeto desse estudo, parte-se do pressuposto que todos os sinais serão funções de uma única variável real, o tempo, e terão uma única dimensão no espaço. O fato das amostras de sinais serem descontínuas é o que classifica os sinais no conjunto das distribuições, pois sinais físicos são compostos por trechos que contêm pulsos de pouca duração e elevada amplitude que os caracteriza como uma função delta de Dirac.

O conjunto dos sinais é fechado para a operação soma e multiplicação por um escalar real, mas além destas operações se faz necessário outras duas, a convolução e a multiplicação entre sinais. Segundo FERNÁNDEZ (2009) a convolução é uma operação entre duas funções cujo resultado é ainda uma função, logo ela também é fechada para o conjunto dos sinais.

Definição: Dados os sinais $a(t) e \, b(t)$,o operador convolução, $[\circledast]$, é definido como a seguinte integral imprópria:

$$a(t) \circledast b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(T) b(t-T) dT. \tag{13.0}$$

Definição: Se $a(t) e b(t)$, são dois sinais, define-se como multiplicação o operador $[\cdot]$, dado por:

$$a(t) \cdot b(t) = a(t) b(t). \tag{14.0}$$

O objetivo no processo da Transformada Discreta de Fourier é fornecer aproximações da Transformada de Fourier de sinais. A Transformada discreta parte de funções periódicas com domínios discretos, sendo muito utilizada computacionalmente, principalmente porque em situações reais não se consegue amostras infinitamente contínuas, então quando a quantidade de amostras é suficientemente grande consegue-se a aproximação desejada para a Transformada de Fourier. Segue definição da Transformada de Fourier para sinais e da Transformada discreta de Fourier.

Definição: Sendo $x(t)$ um sinal, sua Transformada de Fourier é definida como a distribuição complexa $X(\omega)$ tal que:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{15.0}$$

Como $X(\omega)$ pode ser decomposta na sua representação polar de raio $\rho(\omega)$ e ângulo $\theta(\omega)$, sendo $X(\omega) = \rho(\omega) e^{i\theta(\omega)}$, e da equação (13.0) obtém-se:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\omega) e^{i\theta(\omega)} e^{i\omega t} d\omega,$$

$$¿ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\omega) e^{i(\omega t + \theta(\omega))} d\omega. \tag{16.0}$$

Na distribuição $X(\omega)$, a função $\rho(\omega)$ deve ser par enquanto a função $\theta(\omega)$ deve ser ímpar, sendo estas condições necessárias para que $x(t)$seja uma distribuição real, logo:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\rho(\omega)e^{i(\omega t+\theta(\omega))}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\rho(\omega)e^{i(\omega t-\theta(\omega))}d\omega$$

$$¿\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\rho(\omega)(e^{i(\omega t+\theta(\omega))}+e^{-i(\omega t+\theta(\omega))})d\omega \tag{17.0}$$

,

Pela formula de Euler, tem-se:

$$\rho\cos(\omega t+\theta)=\frac{\rho}{2}e^{i(\omega t+\theta)}+\frac{\rho}{2}e^{-i(\omega t-\theta)} \tag{18.0}$$

,

Substituindo a equação (18.0) na equação (17.0), chega-se a:

$$x(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\rho(\omega)\cos ¿¿¿. \tag{19.0}$$

Assim $\rho(\omega)$ é a distribuição que traz a informação a respeito de quais cossenóides existem em $x(t)$ e qual a amplitude dos mesmos, enquanto $\theta(\omega)$ informa qual o afastamento relativo entre as diversas cossenóides que compõem o sinal $x(t)$. A transformada de Fourier $X(\omega)$ é portanto uma distribuição complexa que integra todas as informações citadas anteriormente a respeito dos cossenóides que compõem os sinais $x(t)$.

Para efeito de notação, a Transformada de Fourier será representada como $F(x(t))$ para $X(\omega)$ e $F^{-1}(X(\omega))$ para a sua inversa, ou seja,$x(t)$, assim como para suas componentes polares será utilizada a notação $(\rho(\omega),\theta(\omega))=F(x(t))$ e $x(t)=F^{-1}(\rho(\omega),\theta(\omega))$.

Definição: Seja $x[k]$ uma sequência discreta e periódica de período N. A Transformada Discreta de Fourier de $x[k]$ é dada por:

$$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-ik\frac{2\pi n}{N}}. \tag{20.0}$$

Dentre os sinais específicos, quatro são necessários ter-se conhecimento pra seguir o desenvolvimento de processamento de sinais, sendo eles o sinal impulso elétrico, o sinal senoidal, o sinal Trem de Impulso e o sinal janela quadrada ou sinal *sinc*.

O sinal impulso elétrico possui mesma definição que a função delta de Dirac, logo se ressalta aqui apenas duas propriedades do mesmo:

P1. $F(\delta(t))=(\rho,\phi), com\, \rho(\omega)\equiv 1\, e\, \phi(\omega)\equiv 0$;

P2. $a(t)\circledast\delta(t-\tau)=a(t-\tau)$.

Definição: Um sinal senoidal é definido por:

$$x(t)=sen(\omega_0 t+\phi_0), \tag{21.0}$$

e sua transformada de Fourier será dada por:

$$\begin{gathered} F(\delta(t))=(\rho,\phi) \\ \rho(\omega)=\frac{1}{2}\delta(-\omega_0)+\frac{1}{2}\delta(\omega_0) \\ \phi(\omega)=-\phi_0\delta(-\omega_0)+\phi_0\delta(\omega_0). \end{gathered} \tag{22.0}$$

Definição: Um sinal Trem de Impulso é definido por:

$$d(t,T)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT), \tag{23.0}$$

e sua transformada de Fourier é dada por:

$$\begin{gathered} F(d(t,T))=(D,\phi) \\ D(\omega,T)=d(\omega,\frac{2\pi}{T}) \\ \phi(\omega)\equiv 0. \end{gathered} \tag{24.0}$$

Definição: O Sinal janela quadrada, $h(t,T)$, é definido por:

$$h(t,T)=\begin{cases} 1, se -T\leq t\leq T \\ 0, se\, t\leq -T ou\, t>T \end{cases}, \tag{25.0}$$

Sua transformada de Fourier será dada por:

$$F(h(t,T))=H(\omega) \tag{26.0}$$

$$H(\omega)=\frac{2\,sen(T\omega)}{\omega} \tag{27.0}$$

$$ou\,\Gamma(\omega,T)=\left|\frac{2\,sen(T\omega)}{\omega}\right| \quad (28.0)$$

$$\Phi(\omega,T)=\left(1-sinal\left(\frac{2\,sen(T\omega)}{\omega}\right)\right)\frac{\pi}{2} \quad (29.0)$$

.

Onde $\Gamma(\omega,T)$ é a função módulo do sinal.

Os sinais periódicos podem ser escritos como somas de senóides cuja frequência é múltipla da frequência do sinal, sendo assim possível uma transformada de Fourier para esse tipo de sinal.

Dado um sinal periódico $x(t)$ de período T, pode-se escrever:

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n\,sen(n\,\omega_0 t+\Phi_n). \quad (10.0)$$

Substituindo a equação (23.0) na equação (30.0), obtém-se de Fourier,

$$F(x)=(\rho,\phi) \quad (11.0)$$

$$\rho(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\delta(-n\,\omega_0)+\delta(n\,\omega_0)) \quad (12.0)$$

$$\phi(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(-\delta(-n\,\omega_0)+\delta(n\,\omega_0)) \quad (13.0)$$

.

Para poder aplicar a transformada de Fourier no tratamento de sinais empíricos existem certas restrições provenientes dos sinais, pelo fato de serem empíricos, e que devem ser analisadas, pois definem qual é a melhor aproximação para a transformada. Para essa análise são usados procedimentos discutidos na próxima seção e que se caracterizam como amostragem, filtragem anti-aliasing, janelamento e periodificação.

PROCESSAMENTO DE SINAIS

As medidas físicas dos sinais limitam seus cálculos mesmo existindo uma fórmula analítica para isso, devido à baixa quantidade de informações disponíveis, pois só se possui alguns pontos e não todo o sinal. Portanto para poder obter uma aproximação para a transformada de Fourier se faz necessário que o sinal esteja no formato numérico finito uma vez que não é possível reter todos os infinitos valores que um sinal assume em um determinado intervalo de tempo, já que a medição deve ter um início e um fim e é feita dentro de um intervalo de tempo limitado.

Quando se considera uma aproximação para a transformada de Fourier composta de um número finito de valores, obtém-se o que se caracteriza como transformada discreta de Fourier, pois o sinal é representado por um conjunto de amostras. O que permite validar a transformada com erros quase desprezíveis é o fato de que as tecnologias de processadores atuais permitem a utilização de um número suficientemente grande de dígitos do sinal na sua forma digital.

A Transformada Discreta de Fourier é composta por quatro operações, sendo elas: a amostragem, que consiste em tomar amostras de um sinal contínuo; a filtragem anti-falseamento, que consiste em tomar um intervalo de comprimento finito da transformada de Fourier de um sinal; o janelamento, que consiste em tomar um sinal de duração finita em um sinal de duração infinita; e a operação de periodificação, que consiste em tomar amostras da transformada de Fourier de um sinal.

Iniciando o processo de tratamento do sinal pela amostragem, com um processo físico obtém-se uma sequência de valores que o sinal assume nos instantes de transmissão sendo entendida como o resultado da amostragem um valor para cada instante '*t*' de tempo. Para modelar esta situação deve-se obter uma operação analítica que represente o processo de transformação de um sinal contínuo em um sinal amostrado e este deverá ser definido de forma analítica para que seja representado de forma contínua e não apenas em instantes. Para tanto se define amostragem da seguinte forma:

Definição: Seja um sinal $x(t)$. A operação de amostragem de $x(t)$ é a taxa de amostragem em T definida como a operação de multiplicação do sinal $x(t)$ pelo trem de impulso $d(t,T)$:

$$x_s(t)=x(t)\cdot d(t,T), \tag{14.0}$$

Onde:

$x_s(t)$ é chamado de sinal amostrado e é o sinal resultante;

$\frac{2\pi}{T}$ é a frequência da amostra do sinal.

Se as transformadas de cada elemento da equação, for dada por $F(x)=X, F(x_s)=X_s\, e\, F(d)=D$, pela dualidade tempo frequência, tem-se:

$$X_s=X \circledast D. \tag{15.0}$$

Logo, pela primeira propriedade do sinal impulso, o sinal contínuo terá o módulo de sua transformada de Fourier representado sobre cada um dos módulos da transformada dos sinais do trem de impulso, gerando um sinal amostrado cujo módulo de sua transformada de Fourier é contínuo.

Se ao representar esses módulos de transformadas houver sobreposição de curvas, é dito que ocorre uma deformação no sinal chamado "aliasing". Então, o conjunto de amostras obtidas não corresponde as senóides originais, mas a senóides de frequência menor, que é caracterizada como um erro que pode causar distorção na reconstituição do sinal. Para eliminar esse erro é usado um filtro "anti-aliasing", que deve ser aplicado antes da amostragem.

Definição: Seja uma operação de amostragem realizada na frequência $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$. O filtro anti-aliasing associado a esta amostragem é definido como o filtro cuja resposta em frequência (L_m, L_f) é dada por:

$$L_m(\omega)=\begin{cases} 1, \vee\omega\vee \leq \dfrac{\omega_s}{2} \\ 0, |\omega| > \dfrac{\omega_s}{2} \end{cases} \qquad (16.0)$$

$$L_f(\omega) \equiv 0.$$

Seja $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$ a frequência da amostragem, (L_m, L_f) a resposta em frequência do filtro e $\iota(t)$ a resposta ao impulso desse filtro, ou seja:

$$(L_m(\omega), L_f(\omega)) = F(\iota(t)) = L(\omega), \qquad (17.0)$$

e$x(t)$ o sinal a ser amostrado, então:

$$x_\iota(t) = \iota(t) \circledast x(t) \qquad (18.0)$$

$$x_s(t) = d(T, t) \cdot x_\iota(t). \qquad (19.0)$$

Na frequência:

$$X_\iota(\omega) = L(\omega) \cdot X(\omega) \qquad (40.0)$$

$$X_s(\omega) = D(T, \omega) \circledast X_\iota(\omega). \qquad (20.0)$$

Na prática, o filtro anti-aliasing elimina as frequências desnecessárias, ou seja, aquelas cuja ausência não irá interferir no sinal que se deseja reproduzir. Quando se trata de som, as frequências captadas, maiores que a audição humana suporta podem ser eliminadas, uma vez que sua reprodução ou não reprodução não ira interferir na auscultação. Captar um sinal é feito pelo processo chamado janelamento.

Definição: Seja $x(t)$ um sinal arbitrário e considere ainda o sinal janela quadrada $h(t, T)$. O janelamento do sinal $x(t)$ pela janela quadrada $h(t, T)$ é definido por:

$$x_q(t) = x(t) \cdot h(t, T), \qquad (42.0)$$

onde $x_q(t)$ é denominado janela de $x(t)$.

Aplicando a transformada de Fourier, conclui-se que:

$$X_q(\omega) = X(\omega) \circledast H(\omega, T). \qquad (432$$

1.0)

Tem-se ainda os seguintes limites:

$$\lim_{T \to \infty} H(\omega, T) = \delta(\omega)$$ (442

2.0)

$$\therefore \lim_{T \to \infty} X_q(\omega) = X(\omega).$$ (45.0)

Donde, quando T tem um valor muito grande, porém finito, $H(\omega, T)$, atinge um valor elevado para $\omega = 0$ e decresce rapidamente para $\omega \neq 0$.

Supondo que o sinal em questão, seja periódico e tenha período T_x, ou seja:

$$x(t + T_x) = x(t) \forall\ t,$$ (46.0)

então $X(\omega)$ irá conter apenas frequências discretas, múltiplas da frequência fundamental $\omega_x = \frac{2\pi}{T}$, logo:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\delta(\omega - n\omega_x) + \delta(\omega + n$$ (47.0)

.

Da propriedade P2 do sinal impulso:

$$X_q(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (H(\omega - n\omega_x) + \delta(\omega +$$ (482

3.0)

Desta forma o janelamento substitui as componentes do sinal por um conjunto de frequências descritas pela função $H(\omega, T)$, que acaba por desfocar o sinal.

Para transformar um sinal não periódico em um periódico realiza-se a convolução no tempo do sinal por um trem de impulso com o período desejado, ou seja, faz-se uma repetição periódica do sinal ao longo do eixo do tempo.

Definição: Seja um sinal $x(t)$. A períodificação desse sinal para um período T_p é dada por:

$$x_p(t) = x(t) \circledast d(t, T_p).$$ (49.0)

Neste caso o sinal é limitado no tempo de forma a ser copiado sem sofrer deformação. Porém, se o sinal tiver duração maior que o período, deverá ser feito um janelamento para limitar sua duração. Assim, a periodificação está associada a uma limitação fundamental que se aplica a todo processamento de sinais empíricos, uma vez que só é possível conhecer uma duração finita de sinais com duração infinita e para se obter uma aproximação da transformada de Fourier, deve-se considerar o sinal como se fosse periódico, pois essa consideração permite supor que o espectro (o resultado da Transformada de Fourier no domínio da frequência, segundo PUHLMANN (2014)) que está sendo calculado é discreto, ou seja, composto por um número finito de valores.

Feitas todas as ponderações necessárias para a compreensão e análise da aplicação da transformada de Fourier no sinal, apresenta-se na próxima seção o procedimento necessário para a transformação do sinal empírico em um sinal passível de aplicação da transformada.

CÁLCULO EMPÍRICO DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Partindo de sinais físicos que são medidos empiricamente, pode-se definir a partir deles uma operação exata, a Transformada Discreta de Fourier, que aplicada ao sinal com seu devido tratamento prévio de amostragem, filtragem anti-aliasing, janelamento e periodificacao pode fornecer uma aproximação para a Transformada de Fourier. Se os sinais em questão atenderem alguns requisitos, consegue-se obter um algoritmo capaz de realizar o calculo exato da Transformada de Fourier. Os requisitos são:

1. O sinal $x(t)$ deve ser periódico: $x(t)=x(t+\tau)$;
2. Sua amostragem deve ter período Tque deve ser submúltiplo de τ: $x_s(t)=x(t)\cdot d(t,T)$, onde $T=\dfrac{\tau}{N}$;
3. A frequência ω_s deve ser maior que o dobro da frequência do sinal;
4. O sinal deve ter N amostras.

Portanto parte-se da amostra do sinal dada por:

$$x[k]=x(t_0+kT)\,k=0,\ldots,N-1.$$

Esse sinal determina uma sequência periódica de período N, com o sinal amostrado têm-se as informações necessárias para descrever completamente o sinal e fazendo operações finitas de soma e multiplicação de números complexos chega-se a Transformada Discreta de Fourier que coincidirá com a Transformada de Fourier do sinal.

Tendo como base a equação da transformada discreta de Fourier (20.0) é valida a relação:

$$x[n]=\sum_{n=0}^{N-1} X[k]e^{ik\frac{2\pi n}{N}}. \qquad (240.0)$$

Para se obter amostras para a Transformada de Fourier do sinal $x(t)$, são seguidos os seguintes quesitos:

- A sequência fundamental de $x(t)$ é dada por $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$;

- O sinal deve ter apenas sequências múltiplas da sequência fundamental, ou seja, $\omega_k=k\cdot\omega_0$;

- A frequência máxima do sinal deve ser igual a metade da frequência da amostragem, que é $\omega_m=\frac{\pi}{T}$;

- O sinal possui $\frac{N}{2}$ senóides com frequências igualmente espaçadas de zero até ω_m, com intervalo medindo ω_0;

- O sinal amostrado gera $x_s(t)$, tendo este espectro periódico na frequência, de modo que o que ocorre em uma frequência ocorre nas demais, como $0\,a\,\omega_m$ ocorre de $\omega_m+\omega_0\,a\,2\,\omega_m$;

- Os N valores complexos de $X[k]$ obtidos na Transformada Discreta de Fourier correspondem ao módulo e a fase das N senóides com frequência $0\,a\,2\,\omega_m$.

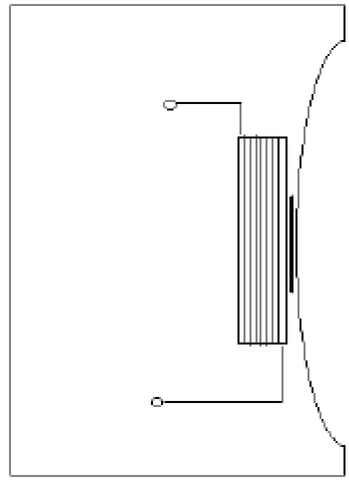
Portanto a Transformada Discreta de Fourier, neste caso, é um mecanismo para o cálculo exato da Transformada de Fourier de um sinal $x(t)$ que atendam aos quatro requisitos citados inicialmente nesta seção, uma vez que a sequência $X[k]$ corresponde aos coeficientes de Fourier do sinal amostrado $x_s(t)$.

Uma vez que se tem o sinal Físico na sua forma elétrico ou digital, pode-se restaurá-lo novamente na sua forma física, para que seja interpretável pelos sentidos humanos.

OBTENÇÃO DO SINAL FÍSICO PELO SINAL ELÉTRICO COM A CAIXA ACÚSTICA

Segundo TAKAHASHI (2002), a caixa acústica faz o processo inverso do microfone, transforma um sinal elétrico com gráfico similar ao de um sinal acústico em um sinal físico. Nela existe uma membrana flexível que produz vibrações no ar produzindo o som e atrás dela uma bobina com centro constituído por um material magnético, próxima o suficiente para que quando aplicado um sinal na bobina esta produzirá um campo magnético. O campo magnético variável produz uma força variável sobre o elemento magnético que está fixado á membrana flexível, produzindo vibrações na membrana e na pressão do ar, o que constituí o som e assim o sinal será percebido pelos sentidos humanos.

Figura 2. Diagrama construtivo de uma caixa acústica (Encontrada em TAKAHASHI (2002))



Esse processo de transforma um sinal físico em um sinal elétrico ou analógico e depois transformar o sinal elétrico ou analógico em sinal físico constituí o que chamamos de mapeamento reversível e tem por objetivo produzir em sua saída um sinal o mais fiel possível ao obtido em sua entrada. Podendo ser caracterizado pelo diagrama abaixo:

A operação matemática que se faz necessária na transformação do sinal analógico ou digital para a forma física do sinal é a aplicação da Transformada inversa de Fourier, sendo definida como:

Definição: Seja F a Transformada de Fourier de f, então f é dita a Transformada inversa de Fourier de F e é dada por:

$$f(t)=F^{-1}(F(\omega))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d \qquad (5125.0)$$

OBSERVAÇÕES FINAIS

De uma forma geral, captar sinais como som, imagens, luz, movimento, entre outros, do meio ambiente exige uma intensa aplicação de conceitos matemáticos. A forma física desses sinais podem ser captados na forma de ondas, como no caso do som, medidos por aparelhos que captam a diferença na pressão atmosférica a sua volta e transformando os mesmos em sinais analógicos, por meio de cargas elétricas, ou ainda em sinais digitais, por meio de números.

O sinal digital de certa forma acaba por ser mais conveniente, por ser mais fácil seu armazenamento para uma possível reprodução posterior e sem perda na qualidade do sinal captado originalmente. Para que isso ocorra faz-se necessário o tratamento destes sinais. Esses tratamentos têm por objetivo armazenar tudo que for necessário para uma reprodução posterior de ótima qualidade, mas também, tem por finalidade eliminar dados como frequências em excesso de acordo com a finalidade desejada. Dentro desse processo de armazenamento de sinais é indispensável a utilização de algoritmos matemáticos, mais especificamente a Transformada de Fourier, que permite a leitura desse sinal digital.

Para que um sinal possa ser digitalizado pela transformada de Fourier deve primeiro atender determinadas caraterísticas, que não são obtidas na coleta direta do sinal, pois essa operação trata de somas infinitas de senóides e quando se trata de amostras de sinais não há a possibilidade de se conseguir uma quantidade infinita de dados. Logo, tratam-se as informações coletadas pela amostragem, de forma a atender as características necessárias para se trabalhar com a transformada discreta de Fourier que configura uma aproximação relativamente boa para o cálculo da Transformada de Fourier, já que permite trabalhar com um número consideravelmente grande de amostras.

Em suma, esse processo de armazenamento de sinais é utilizado em muitas situações cotidianas, seja ao tirar uma foto, fazer uma filmagem, gravar uma música ou outras situações, sem que se dê conta de todo o processo necessário para o armazenamento dos sinais que são registrados. A Matemática mais uma vez tem permitido o desenvolvimento tecnológico com a finalidade de simplificar a vida das pessoas.

https://periodicos.utfpr.edu.br/recit

THE FOURIER TRANSFORM AND THE ELETRONIC SIGNAL PROCESSING

ABSTRACT

It is presented in this article a brief history of the scientist Joseph Fourier accompanied by some areas it is applied his famous mathematical technique, called Fourier Transform. As a particular case in order to study and understanding of this technique, is the electronic data processing is approached linked to sound. The process of capturing the data processing for obtaining analog or digital electronic signals by applying Fourier Transform to the data storage is described in sequence. It can thus convert electronic signals and still get a reproduction of the original signal without large losses in sound

quality.

KEYWORDS: Sound, Catchment, Data.

REFERÊNCIAS

CASTRO, A. S. de. **Oscilador harmônico: Uma análise via séries de Fourier.** Departamento de Física e Química, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Guaratinguetá, SP, Brasil. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 36, n. 2, 2701, 2014.

FERNÁNDEZ, Adán J. Corcho; CAVALCANTE, Marcos Petrúcio Cavalcante. **Introdução à Análise Harmônica e Aplicações.** 27º Colóquio Brasileiro de Matemática – impa: Rio de Janeiro, 2009.

FILHO, Valter Bianchi. **Aplicações das Séries de Fourier para análise de retornos de ativos financeiros.** 2006. 91f. Dissertação (Mestrado em administração) – Escola de Administração, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

HIGUTI, R.T.; KITANO, C.. **Sinais e Sistemas.** Ele 0331 princípios de comunicações. Departamento de engenharia elétrica da faculdade de Engenharia Elétrica de Ilha Solteira - UNESP. São Paulo: Ilha Solteira, Julho/2003.

LORENÇO JÚNIOR, Edgard**. Transformada de Fourier: teoria como base para aplicações em mecânica celeste.** Dissertação (Mestrado em Matemática

Universitária) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências exatas. Rio Claro, 2014.

LAZZARINI, Victor E P. **Elementos de Acústica**. Music Department. NationalUniversityofIreland, Maynooth. 1998.

PUHLMANN, H.. **Processamento Digital de Sinais – DSP – Parte 2.** *Embarcados,* 5 mar. 2014. Disponível em: < http://www.embarcados.com.br/processamento-digital-de-sinais-dsp-parte-2/>. Acesso em: 20 set. 2015.

SOUZA, Anderson R.; AGUIAR, Carlos E.. **Pressão e Deslocamento nas Ondas Sonoras**. XIX Simpósio Nacional de Ensino de Física – SNEF 2011- Manaus, AM. Instituto de Física – UFRJ.

TAKAHASHI, Ricardo H.C.. **Transformada Discreta de Fourier: Motivações e Aplicações.**I Bienal de Matemática – SBM – UFMG. Belo Horizonte, 2002.

Recebido: 01 dez. 2016.
Aprovado: 09 ago. 2017.
DOI:
Como citar: SCHWARTZBACH, C. ; HICKMANN, T. ; A transformada de Fourier e o processamento eletrônico de sinais. R. Eletr. Cient. Inov. Tecnol, Medianeira, Edição Especial Cadernos Matemática, E – 5099. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/recit>. Acesso em: XXX.
Correspondência: