

## Estado da arte dos fundamentos e ideias da Lógica Fuzzy aplicada as Ciências e Tecnologia

### RESUMO

Este trabalho apresenta uma introdução aos princípios, ideias, vantagens e desvantagens, além de distintos trabalhos que vem utilizando a Lógica Fuzzy como ferramenta de estudo, com foco em Ciências. Lógica é a ciência que tem por objetivo o estudo das leis do raciocínio. A lógica clássica é desde o tempo de Aristóteles onde se baseia na bivalência de  $V$  (verdadeiro) ou  $F$  (falso). A lógica fuzzy ou nebulosa é baseada na teoria dos conjuntos *fuzzy*. A partir dos anos 70, a lógica fuzzy foi disseminada em aplicações industriais, após inúmeras tentativas frustradas do Prof. Mandani em controlar uma máquina a vapor com distintos controladores, conseguindo bons resultados a partir do sistema *fuzzy*. No decorrer das décadas sua utilização vem avançando em distintas áreas de estudos, pesquisas e desenvolvimento. Vale destacar que, atualmente, a lógica fuzzy é fundamental para aplicações em áreas incertas, onde a partir desta pode-se quantificar e qualificar as variáveis estudadas.

**PALAVRAS-CHAVE:** Lógica Nebulosa. Ciências. Incerteza. Variáveis. Sistema Fuzzy.

#### Luciana Maria da Silva

[lumasilva15@gmail.com](mailto:lumasilva15@gmail.com)  
[orcid.org/0000-0001-9544-9748](https://orcid.org/0000-0001-9544-9748)  
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, São Paulo, Brasil.

#### Esdras Jafet Aristides da Silva

[esdras.jafet@upe.br](mailto:esdras.jafet@upe.br)  
[orcid.org/0000-0001-7510-6238](https://orcid.org/0000-0001-7510-6238)  
Universidade de Pernambuco (UPE),  
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Pernambuco, Brasil.

#### Leandro Mendes Ferreira

[leandroimail@gmail.com](mailto:leandroimail@gmail.com)  
[orcid.org/0000-0003-0680-1100](https://orcid.org/0000-0003-0680-1100)  
Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, São Paulo, Brasil.

#### Rodrigo Mikosz Gonçalves

[rodrigo.mikosz@gmail.com](mailto:rodrigo.mikosz@gmail.com)  
[orcid.org/0000-0002-5066-1910](https://orcid.org/0000-0002-5066-1910)  
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Pernambuco, Brasil.

#### Betânia Queiroz da Silva

[bethqueiroz@gmail.com](mailto:bethqueiroz@gmail.com)  
[orcid.org/0000-0002-7406-765X](https://orcid.org/0000-0002-7406-765X)  
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Pernambuco, Brasil.

## INTRODUÇÃO

Atualmente através de um determinado conjunto com dados qualitativos e quantitativos vem se desenvolvendo novos métodos para análise de áreas que apresentam incertezas, onde se destaca as variáveis presentes na área de estudo. Para as variáveis atribuem-se pesos proporcionais à influência da incerteza desta na área estudada, ou seja, de acordo com regras criadas logicamente.

A lógica foi criada por Aristóteles, que estabeleceu um conjunto de regras rígidas para que conclusões pudessem ser aceitas logicamente válidas. O emprego da lógica leva a uma linha de raciocínio lógico baseado em premissas e conclusões. A lógica Ocidental, assim chamada, tem sido binária, isto é, uma declaração é falsa ou verdadeira, não podendo ser ao mesmo tempo parcialmente verdadeira e parcialmente falsa (MONTEIRO, 2002).

A Lógica Nebulosa é uma ferramenta capaz de capturar informações imprecisas, descritas em linguagem natural, e convertê-las para um formato numérico (VELLASCO, 2010). Um sim ou um não como resposta é na maioria das vezes, incompleta. Na verdade, entre a certeza de ser e a certeza de não ser, existem infinitos graus de incerteza. Esta incerteza intrínseca à informação representada numa linguagem natural tem sido tratada matematicamente no passado com o uso da teoria das probabilidades. Contudo, a lógica *fuzzy*, com base na teoria dos conjuntos *fuzzy* tem se mostrado mais adequada para tratar imperfeições da informação do que a teoria das probabilidades (UEM, 2018a; SILVA, 2013).

Um conjunto *fuzzy* é um conjunto que reflete classes de elementos e não têm fronteiras bem definidas (RODRIGUES; SANTOS, 2005). Consequentemente, neste conjunto é difícil de distinguir os elementos que pertencem e que não pertencem ao conjunto. Entretanto, na lógica *fuzzy*, uma premissa varia em grau de verdade de 0 a 1, o que leva a ser parcialmente verdadeira ou parcialmente falsa (JUNGES, 2006). As primeiras noções da lógica dos conceitos de multivalência foram desenvolvidas por um lógico polonês Jan Lukasiewicz (1878-1956) que em 1920 introduziu conjuntos com graus de pertinência sendo: 0,  $\frac{1}{2}$  e 1 (3 valores). Mais tarde, em 1930 expandiu um número infinito de valores entre 0 e 1 (n valores) para lidar com o Princípio da Incerteza na Mecânica Quântica.

Em meados da década de 60, Lotfi Asker Zadeh observou que os recursos tecnológicos disponíveis eram incapazes de automatizar as atividades relacionadas a problemas de natureza industrial, biológica ou química, que compreendessem situações ambíguas, não passíveis de processamento através da lógica computacional fundamentada na lógica booleana. Procurando solucionar esses problemas o Prof. Zadeh publicou em 1965 um artigo resumindo os conceitos dos conjuntos fuzzy, revolucionando o assunto com a criação de sistemas fuzzy. Lotfi Asker Zadeh foi o pioneiro na criação da lógica fuzzy que combinou os conceitos da lógica clássica e os conjuntos de Lukasiewicz mais tarde expandindo um número infinito de valores entre 0 e 1. Os conceitos fundamentais de lógica fuzzy podem ser visto em Zadeh (1965).

Atualmente sua utilização é fundamental para aplicações que tenham determinados graus de incertezas destacando-se, por exemplo, os controladores *fuzzy* de plantas nucleares, refinarias, processos biológicos e químicos, trocador de calor, máquina diesel, tratamento de água e sistema de operação automática

de trens (UEM, 2018b; CUNHA; MENNA; SANTOS, 2012), análise de vulnerabilidade á erosão (SILVA, 2013; SILVA et al., 2013). Segundo Fernandes (2005), desde então, os sistemas baseados em conjuntos *fuzzy* vem avançando tanto do ponto de vista teórico quanto prático, para Corcoll-Spina (2010), a lógica *fuzzy* traduz em valores numéricos expressões verbais, vagas, imprecisas e qualitativas, comuns na comunicação humana, permitindo converter a experiência humana em uma linguagem decodificável por computador, sendo uma característica fundamental.

A lógica *fuzzy* é baseada em fundamentos de pertinência a eventos que não são prováveis, mas são eventos reais. Quando se faz uma série de inferências ou declarações preditivas, esses são predicados modificadores de descrições prévias que representam vários graus de certeza com relação à ocorrência, e que são determinísticos na sua origem. Em conjunto *fuzzy* é difícil de distinguir os elementos que pertencem e que não pertencem ao conjunto. Em contraste, em um conjunto clássico a pertinência é binária, ou seja, um elemento claramente pertence ou claramente não pertence a um conjunto, mais detalhes podem ser visto em Rodrigues e Santos (2004).

Em suma, a lógica *fuzzy* é uma extensão da lógica booleana que admite valores lógicos intermediários entre o F (0) e o V (1). Por exemplo, o valor médio 'TALVEZ' (0,5). Isto significa que um valor lógico difuso é um valor qualquer no intervalo de valores entre 0 e 1. Este tipo de lógica engloba de certa forma conceitos estatísticos principalmente na área de Inferência (SILVA et al., 2010). Para Filippini (2003), a lógica suporta os modos de raciocínio que são aproximados, ao invés de exatos, como naturalmente estar-se acostumado a trabalhar.

## **ESTADO DA ARTE DOS CONJUNTOS FUZZY, SUAS FUNÇÕES DE PERTINÊNCIAS E OPERAÇÕES**

Segundo Rezende (2005), a teoria dos conjuntos *fuzzy* pode ser vista como uma extensão da teoria clássica de conjuntos, e foi criada para tratar graus de pertinência. O conjunto *fuzzy* F de um universo U é caracterizado por uma função de pertinência, representada por  $\mu_F : U \rightarrow [0, 1]$ , onde associa a cada  $x \in U$  um número real  $\mu_F(x)$  no intervalo [0, 1], representando o grau de pertinência de x em F. Sendo U o conjunto universo, logo F é o subconjunto de pontos de U, para o qual  $\mu_F(x)$  é positivo (ZADEH, 1965; REZENDE, 2005). Pode-se definir um conjunto universo U discreto que reúne todos os números entre -10 e 10 do conjunto Z dos números inteiros, esta definição pode ser expressa pela Equação 1.

$$U : \{x \in \mathbb{Z} / \text{módulo}(x) \leq 10\} \quad (1)$$

Segundo Fernandes (2005), a teoria de conjuntos fuzzy é vista como uma extensão da teoria de conjuntos clássicos, associado aos conceitos básicos de funções de pertinência, operações com conjunto fuzzy, números nebulosos, relações fuzzy, regras fuzzy etc. A utilização dos conjuntos fuzzy é de um tipo de

computação baseada na regra composicional de inferência, com seus operadores associados, resulta em sistemas de decisão, estruturados no formato de uma base de regras nebulosas, adequados para processos dedutivos.

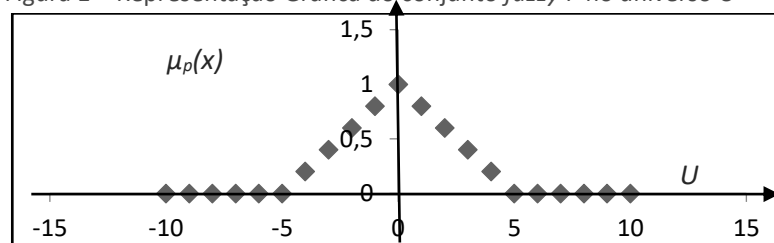
Na lógica *fuzzy*, o grau de pertinência de um dado elemento em relação ao conjunto universo é definido por uma função de pertinência, que assume os valores ao intervalo real [0,1], podendo ter uma pertinência, total e não pertinência. Sendo representado algebricamente por:  $\mu_p(x):U \rightarrow [0, 1]$ . Sendo assim, pode-se dizer que  $\mu_p(x)$  estabelece a cada  $x$  um grau de pertinência ao conjunto  $P$ , como  $\mu_p(x) \in [0, 1]$ . Onde esse valor representa a probabilidade do elemento  $x \in P$  (Rezende, 2005).

No conjunto universo mostrado na Equação 1, pode-se ter um conjunto *fuzzy*, denotado por  $P$  sendo o “conjunto de números pequenos”, onde o grau de pertinência dos elementos de  $U$  em  $P$  é definido pela Equação 2:

$$\mu_p(x) = \begin{cases} 0,0 & , \text{se } \text{módulo}(x) > 5 \\ \frac{5 - \text{módulo}(x)}{5} & , \text{se } \text{módulo}(x) \leq 5 \end{cases} \quad (2)$$

A Figura 1 representa o conjunto *fuzzy* variando no intervalo real [0,1] e os graus de pertinência dos elementos de  $U$  no conjunto  $P$ .

Figura 1 – Representação Gráfica do conjunto *fuzzy*  $P$  no universo  $U$



Fonte: Silva (2013) adaptado de Rezende (2005)

As funções de pertinência podem ser representadas em formatos distintos, existindo alguns que são mais utilizados, como: o triangular, trapezoidal e gaussiana, como mostram as Equações 3, 4 e 5. Além destes formatos, existe um bem utilizado em aplicações práticas: singleton (conjunto unitário), Equação 6. A função triangular tem os seguintes parâmetros ( $a, m, b$ ), onde  $a \leq m \leq b$ , logo a Equação 3 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mu_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{se } a < x \leq m \\ \frac{b-x}{b-m} & \text{se } m < x \leq b \\ 0 & \text{se } x > b \end{cases} \quad (3)$$

A função trapezoidal tem os seguintes parâmetros ( $a, m, n, b$ ), onde  $a \leq m, n \leq b$  e  $m < n$ , logo a Equação 4 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mu_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{se } a < x \leq m \\ 1 & \text{se } m < x \leq n \\ \frac{b-x}{b-n} & \text{se } n < x \leq b \\ 0 & \text{se } x > b \end{cases} \quad (4)$$

A função Gaussiana tem os seguintes parâmetros  $(m, \sigma_k)$ , onde  $\sigma_k > 0$ , logo a Equação 5 pode ser escrita da seguinte forma:

$$(x) = e^{-\sigma_k(x-m)^2} \quad (5)$$

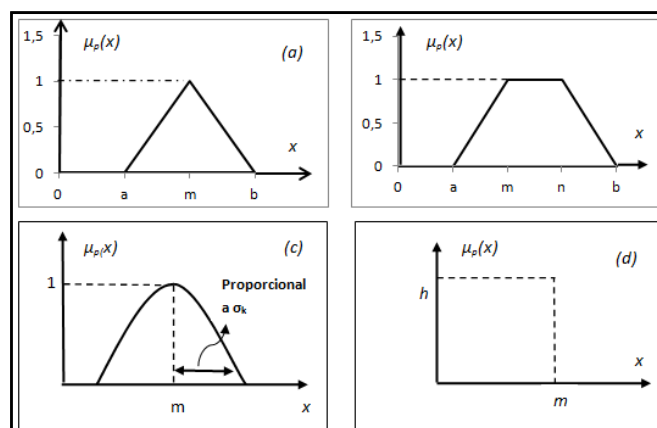
onde:  $\begin{cases} m: \text{valor modal} \\ \sigma_k: \text{dispersão} \end{cases}$

A função unitária (*singleton*) tem os seguintes parâmetros  $(m, h)$ , logo a Equação 6 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mu_p(x) = \begin{cases} h & \text{se } x=m \\ 0 & \text{caso } x \neq m \end{cases} \quad (6)$$

Para melhor visualização e compreensão dos formatos das Equações de pertinência descritos, a Figura 2 especificará os parâmetros associados a cada caso.

Figura 2 – Representação Gráfica das funções de pertinências: (a) triangular, (b) trapezoidal, (c) gaussiana, (d) singleton



Fonte: Silva (2013) adaptado de Fernandes (2005)

Segundo Fernandes (2005) a escolha do formato mais adequado nem sempre é óbvia, podendo inclusive não estar ao alcance do conhecimento do especialista para a aplicação em questão. Mas, existem sistemas *fuzzy*, cujos

parâmetros das funções de pertinência são completamente definidos pelo especialista. As funções de pertinências triangulares e trapezoidais são mais adequadas para utilização, pois a ideia de regiões de pertinências de ambas pode ser total, média e nula sendo bem mais objetivas do que as especificações ligadas aos parâmetros das funções Gaussianas, como aplicado por Silva et al. (2013) na análise de vulnerabilidade à erosão costeira.

Cada vez mais os sistemas nebulosos buscam adaptar os parâmetros das funções de pertinências para obter resultados otimizados, a partir dos dados de entrada e saída. Segundo Jang et. al (1997) e Fernandes (2005), nos sistemas que exigem a necessidade do ajuste dos parâmetros pelo método gradiente, a função Gaussiana é bem mais utilizada devido às suas propriedades matemáticas de continuidade e diferencial. A partir dos conjuntos *fuzzy* pode-se realizar diversas operações elementares, sendo que as mais comuns são união, intersecção e complemento.

O conjunto *fuzzy* "A" é um subconjunto de um conjunto *fuzzy* "B" se o grau de pertinência de cada elemento do conjunto universo U no conjunto A é menor ou igual que seu grau de pertinência no conjunto B; ou seja, para todo  $x \in U$ ,  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$  e indicamos  $A \subseteq B$  (REZENDE, 2005). O complemento de um conjunto *fuzzy* "A" em relação ao conjunto universo U é indicado por  $A'$  e a equação de pertinência é definida pela Equação 7.

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in U \quad (7)$$

A partir da equação (7) observa-se que se um elemento  $X \in U$  tem grau de pertinência 0,8 no conjunto *fuzzy* "A", seu grau de pertinência em  $A'$  será 0,2. A união de dois conjuntos *fuzzy* "A" e "B" é um conjunto *fuzzy* indicado por  $A \cup B$  e a equação de pertinência é definida pela Equação 8.

$$\mu_{A \cup B} = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad \forall x \in U \quad (8)$$

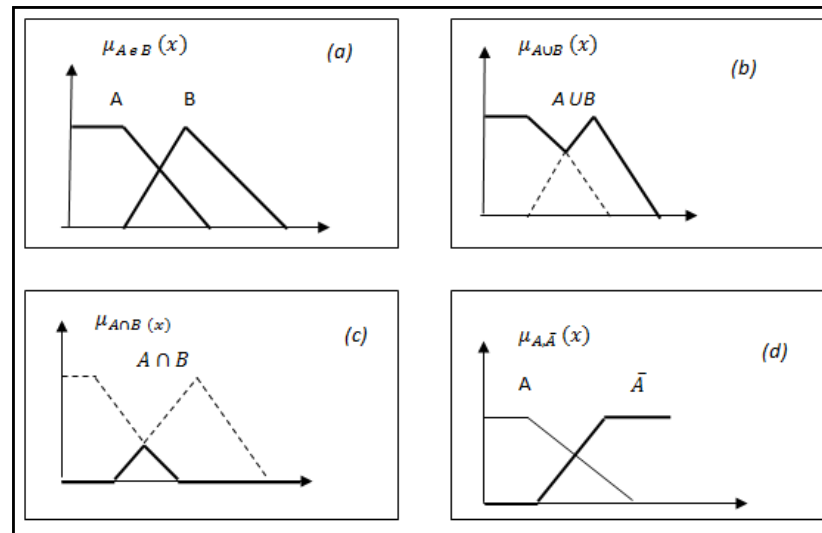
Analisando a equação 8, supondo os predicados limpa e protegida de uma praia. Se a praia  $x$  é 0,5 (razoavelmente limpa) e tem um valor de proteção igual a 0,7, então:  $\mu_{A \cup B} = 0,7$ . A intersecção de dois conjuntos *fuzzy* "A" e "B" é um conjunto *fuzzy* indicado por  $A \cap B$  e a equação de pertinência é definida pela Equação 9.

$$\mu_{A \cap B} = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad \forall x \in U \quad (9)$$

Analisando a equação (9), supondo os predicados limpa e protegida de uma praia. Se a praia  $x$  é 0,5 (razoavelmente limpa) e tem um valor de proteção igual à

0,7, então:  $\mu_{A \cap B} = 0,5$ . A Figura 3 mostra a representação gráfica das Equações (7, 8 e 9) em um conjunto *fuzzy* A e B.

Figura 3 – Representação Gráfica com conjunto nebuloso: (a) conjuntos A e B; (b) união; (c) intersecção; d (complemento)



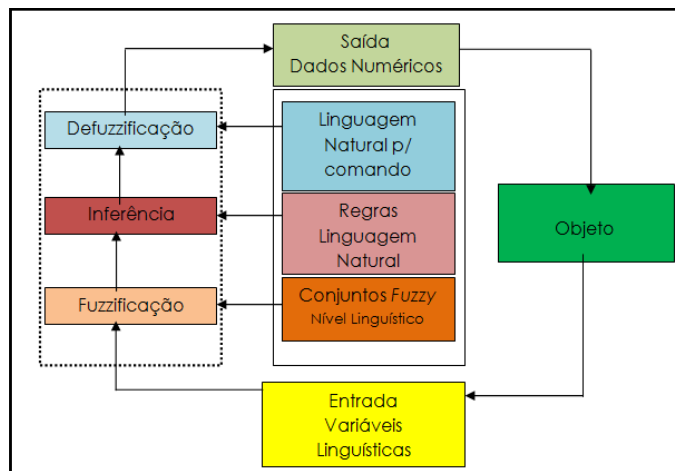
Fonte: Silva (2013) adaptado de Fernandes (2005)

### FORMULAÇÃO DO RACIOCÍNIO E DAS REGRAS DA LÓGICA FUZZY PARA MODELAGEM APLICADA AS CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS

A formulação do raciocínio *fuzzy* é formada por três etapas: a fuzzificação, a inferência e a defuzzificação, como mostrado na Figura 4. Essas três etapas são muito utilizadas em sistemas de controle para resolver diversos tipos problemas em diversas áreas de estudos. Segundo Gomide, Gudwin e Tanscheit (2009), o controle *fuzzy* trata do relacionamento entre entradas e saídas, agregando vários parâmetros de processo e de controle. Isso permite a consideração de processos complexos, de modo que os sistemas de controle resultantes proporcionam um resultado mais acurado, além de um desempenho estável e robusto. A grande simplicidade de implementação de sistemas de controle *fuzzy* pode reduzir a complexidade de um projeto a um ponto em que problemas anteriormente intratáveis passam agora a ser solucionados.

A Fuzzificação é a primeira etapa do tratamento do raciocínio fuzzy, pois é através dela que se transformam as variáveis do problema em valores fuzzy que se encontram na forma determinística ou Crisp (número) em forma fuzzy (pertinência) (SILVA, 2008). Os valores numéricos são em termos da linguagem natural para cada valor de entrada associamos uma função de pertinência, que permite obter o grau de verdade da proposição: determinar o grau de pertinência de cada conjunto (proposição), limitar o valor da entrada entre 0 e 1.

Figura 4 – Esquema da Formulação do Raciocínio *Fuzzy*



Fonte: Silva (2013) adaptado de Kohagura (2007)

A Inferência é a segunda e a mais importante das etapas do raciocínio *fuzzy*, pois é através dela que é feita a tomada da decisão e se constrói o conjunto de regras obtendo os valores dos termos das variáveis de saída. Segundo Silva (2012), Silva e Gonçalves (2012a, b), Silva (2013) e Silva et al. (2013), pode-se destacar que nesse processo ocorre, o seguinte:

- Aplicam-se os operadores *fuzzy* assim como os operadores da lógica booleana. (Os operadores usados na lógica *fuzzy* são and e or, conhecidos como operadores de relação. Onde, eles são utilizados para definir o grau máximo e mínimo de pertinência do conjunto);
- Aplica-se a implicação (usada para definir o peso no resultado e remodelar a função, ou seja, consiste em criar a hipótese de implicação);
- Combinam-se todas as saídas *fuzzy* possíveis (em um único conjunto *fuzzy*, algo semelhante ao processo de união e intersecção, na teoria dos conjuntos booleanos, ou seja, ocorre a combinação de todas as saídas).

A partir da inferência é efetuado o raciocínio permitindo conclusões a partir de fatos conhecidos (min-max) e das variáveis linguísticas de entrada e saída. Segundo Silva (2008), a inferência possui duas fases distintas, a avaliação da implicação de cada regra e a composição das conclusões de todas as regras em um valor consolidado. Em Mendel (2001) é mostrado que existem muitos procedimentos inferenciais na lógica *fuzzy*, porém os mais utilizados são o Mamdani e o Takagi-Sugeno-Kang (TSK).

A defuzzificação é a terceira e última etapa do tratamento *fuzzy*, pois nessa etapa ocorre a transformação das variáveis que se encontram na forma fuzzificada para forma determinística (Crisp), determinando o valor real da(s) saída(s) (SILVA, 2008). De forma geral pode-se dizer que a defuzzificação transforma o resultado *fuzzy* em um resultado nítido, ou seja, ele transforma o dado nebuloso em dado quantitativo (consiste em retornar os valores, obter um valor numérico dentro da faixa estipulada pela lógica *fuzzy*).



Os métodos mais utilizados para defuzzificação ou conversão *fuzzy* em escalar são: Centro de Massa (CoM), Média do Máximo (MoM), Centro da Área (CoA), Média Ponderada (MP), mais detalhes pode ser visto em Gomide; Gudwin (1994), Fernandes (2005), Rezende (2005), Shaw; Simões (2007); Silva (2008); Silva (2013). Em suma, o conhecimento do Raciocínio *Fuzzy* é representado através de proposições ou regras. Segundo Rezende (2005) as regras *fuzzy* são a maneira mais comum de armazenar informações em uma base de conhecimento *fuzzy*. A regra normalmente é formada por duas declarações principais: *if* e *then*. Essas declarações relacionam as variáveis do modelo com os conjuntos *fuzzy*, ou seja, relacionam os antecedentes com os consequentes.

As regras *fuzzy* são baseadas em implicações lógicas que estando associada à lógica *fuzzy* requer definição de conceitos distintos das proposições e implicações. Elas podem ser condicionais ou incondicionais e sua ordem de execução depende do modelo adotado. No caso de modelos com somente regras condicionais ou incondicionais, a ordem é irrelevante. Se o modelo contém ambos os tipos de regras, a ordem é importante. As regras incondicionais devem ser executadas antes e são geralmente usadas como “*DEFAULT*” isto é, se nenhuma regra condicional é executada, então o valor da solução é determinado pela regra incondicional (SILVA, 2008).

A construção das regras requer algumas propriedades como:

- Combinação das variáveis de entrada utilizando os conectivos *and* (mínimo) e *or* (máximo);
- Cada conjunto de regras deve ter uma saída correspondente, mas não é necessário as saídas serem distintas;
- Duas ou mais regras com as mesmas entradas devem ter saídas mutuamente exclusivas. Caso contrário, as regras são inconsistentes.

De acordo com uma regra ou um conjunto delas que modelam o comportamento de um sistema *fuzzy*, o objetivo do controle é gerenciar o comportamento de alteração de uma ou mais entrada, ou seja, substitui o papel do modelo matemático por um conjunto de regras que descrevem o comportamento desse sistema. Segundo Fernandes (2005) os sistemas dependem da especificação de uma série de elementos, que incluem a quantidade e o tipo de regras *fuzzy*, os parâmetros das funções, a semântica das regras que participam do raciocínio aproximado e os operadores do mecanismo de inferência utilizados para obter uma saída, a partir dos dados de entrada, mais detalhes também pode ser visto em Takagi, Sugeno (1983), Lee (1990) e Sugeno e Yasuakawa (1993).

O conjunto de regras definem os procedimentos das variáveis de entradas, o seu formato é do tipo: Se (*IF*) = antecedente; Então (*THEN*) = consequente.

## **MODELAGEM DO SISTEMA FUZZY APLICADA AS CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS**

Existem diversos modelos de sistema *fuzzy*, os quais são utilizados de acordo com as propriedades sintáticas definidas. O modelo de processamento definido do sistema de conhecimento vai depender basicamente do armazenamento de informações das variáveis escolhidas (REZENDE, 2005). O antecedente geralmente é formado por proposições linguísticas e a distinção entre os modelos

se dão através das regras *fuzzy* (FERNANDES, 2005). Entre os modelos mais conhecidos destacam-se o Modelo de Mamdani e o Modelo de Takagi-Sugeno-Kang (TSK).

O Modelo de Mamdani utiliza conceitos da lógica *fuzzy* em processamento de conhecimento, sendo consequente das regras *fuzzy*. A saída é representada por um conjunto *fuzzy* resultante da agregação da inferência de cada regra. Para se obter a saída utilizam-se métodos de defuzzificação: CoM, MoM e CoA. O modelo de TSK é representado por uma função das variáveis de entrada. A saída é obtida através de MP das saídas.

## MODELO MAMDANI

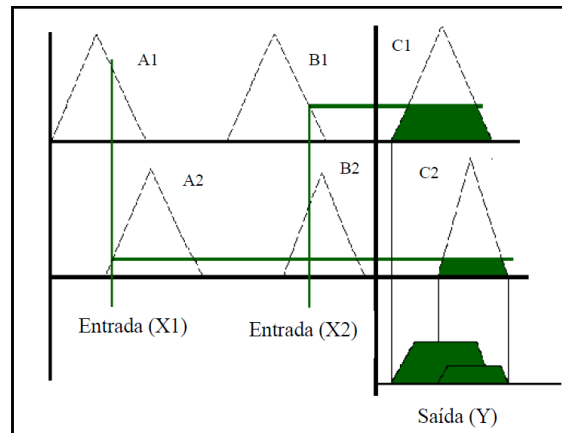
No modelo Mamdani as regras possuem relações *fuzzy* em seus antecedentes como em seus consequentes, onde são mapeados através de conjuntos *fuzzy*. Segundo Rezende (2005) o modelo Mamdani inclui módulos de interface que transformam as variáveis de entrada em conjuntos *fuzzy* equivalentes e, posteriormente, as variáveis *fuzzy* geradas em variáveis numéricas proporcionais, adequadas para os sistemas de atuação existentes.

A regra de inferência tradicional utilizada para o processamento do modelo de Mamdani é a inferência Máx-Min, onde utiliza as operações de união e intersecção entre os conjuntos da mesma forma. Caso haja mais de uma variável de entrada é necessário aplicar uma técnica de agregação dos conjuntos antecedentes, a fim de que seja gerado um conjunto consequente para cada regra de inferência, onde a combinação desses conjuntos consequentes gera um conjunto final de saída que é geralmente resultado do operador união (máximo), como mostra a Figura 5. A partir da regra de produção *fuzzy* genérica, como apresentada na Equação 10.

$$\text{if } x_1 = A_1 \text{ and } x_2 = A_2 \text{ and...and } x_p = A_p \text{ then } y_1 = B_1 \text{ and } y_2 = B_m \quad (10)$$

Na equação 10,  $x_i$  são as entradas do sistema,  $A_1, \dots, A_p$  são os termos primários definidos nas partições *fuzzy* de cada variável de entrada,  $y_1$  e  $y_2$  são variáveis de saída e  $B_1, \dots, B_m$  são termos primários em suas partições *fuzzy*. Sabe-se que o raciocínio *fuzzy* é formado pela fuzzificação, inferência e defuzzificação. A fuzzificação em Mamdani passa pelo processamento de transformação de informações quantitativas em qualitativas, onde é calculado para a  $k$ -ésima regra da Base de Conhecimento um coeficiente de disparo  $D(k)$ ,  $T$  a norma. Os índices  $k$  nos conjuntos *fuzzy* denotam os termos primários que compõem a regra na Base de Conhecimento, como mostra a Equação 11.

Figura 5 – Processo Máx-Min de Mamdani



Fonte: Fernandes (2005)

$$D^{(k)} = T [\mu_{A_1^k}(x_1), \mu_{A_2^k}(x_2), \dots, \mu_{A_p^k}(x_p)] = \min [\mu_{A_1^k}(x_1), \mu_{A_2^k}(x_2), \dots, \mu_{A_p^k}(x_p)] \quad (11)$$

O processo de inferência através da Equação 12 mostra a composição deste conjunto para o caso da saída  $y_2$  da regra mostrada na Equação 10, onde o universo de discurso desta variável de saída é composto pelos elementos de  $y \in U_{y_2}$ . O processo transforma uma informação qualitativa em outra informação qualitativa.

$$\mu_{B_i}(y) = \bigvee_{k=1 \dots n} [T(D^{(k)}, \mu_{B_i}(y))] = \max_{k=1 \dots n} [\min(D^{(k)}, \mu_{B_i}(y))], \forall y \in U_{y_2} \quad (12)$$

Segundo Rezende (2005) o conjunto *fuzzy* gerado durante o processo de inferência pode ser utilizado diretamente em um diagnóstico qualitativo de tomada de decisão ou será convertido em um valor escalar proporcional para atuação externa por meio de atuadores convencionais, no caso de sistema de controle. No processo de defuzzificação utilizam-se os métodos CoM, MoM e CoA.

CoM é calculado para um dado conjunto *fuzzy* com a saída proveniente de dados do conhecimento codificado, a abscissa do ponto de CoM correspondente é utilizado como valor da defuzzificação. CoM é o resultado da transformação de C (conjunto nebuloso definido em um universo qualquer chamado Z) em um valor não *fuzzy*, e  $\mu_C$  é a função de pertinência em C e Z.

MoM é o valor numérico do conjunto de saída correspondente a média dos pontos máximos locais da função de pertinência, produzido pelo processo de inferência.

Segundo Fernandes (2005), CoA, também, é chamado de Centro de Gravidade, pois calcula o centroide da área composta na qual representa o termo

de saída *fuzzy* ( $\mu_{out}$ ), esse termo de saída *fuzzy* é composto pela união de todas as contribuições de regras. O método CoA calcula o centroide da área. O centroide é um ponto que divide a área de  $\mu_{out}$  em duas partes iguais.

#### MODELO TAKAGI-SUGENO-KANG

O modelo TSK é um modelo que funciona como um aproximador para sistema que pode ser completo ou representado apenas por meio de suas relações de entrada e saída. Assim como o modelo de Mamdani, o TSK é também baseado na utilização de uma base de regras condicionais de inferência. Sendo que, enquanto em Mamdani as regras são formadas através de relações *fuzzy*, no TSK é composto por equações paramétricas relacionadas às entradas e saídas. Na Equação 13 é mostrada a regra genérica de um modelo TSK.

$$\text{if } x_1 = A_i \text{ and } x_2 = A_j \text{ and...and } x_p = A_m \text{ then } y = \phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p) \quad (13)$$

O processamento em TSK é similar ao dos modelos de Mamdani. Sendo que a distinção é que, em Mamdani a norma T utilizada na maioria das aplicações é em função “min”. Então em TSK tem-se a k-ésima regra da Base de Conhecimento um coeficiente de disparo  $D(k)$ , onde o índice  $k$  nos conjuntos *fuzzy* denotam os termos primários que compõem a regra na Base de Conhecimento, como mostra a Equação 14.

$$D^{(k)} = T [\mu_{A_1^k}(x_1), \mu_{A_2^k}(x_2), \dots, \mu_{A_p^k}(x_p)] \quad (14)$$

Segundo Rezende (2005) um modelo TSK com múltiplas saídas sempre pode ser transformado em múltiplos modelos de saída única. A saída numérica é calculada diretamente pela soma das saídas das regras, ponderada pelos valores de ativação  $D(k)$ .

Geralmente, o modelo TSK é utilizado para substituir um modelo matemático convencional em esquema de controle ou modelagem de sistemas reais. Sendo que há necessidade do modelo ser ajustado para representar o comportamento do sistema real (REZENDE, 2005).

O algoritmo de mínimos quadrados recursivos (MQR) pode ser utilizado para estimar a minimização do erro quadrado entre a saída do modelo TSK e os dados de saída disponível. Para estimar-se o MQR considera-se uma matriz  $X$  de dimensões  $m \times k$  ( $p+1$ ), onde  $m$  são os padrões,  $k$  as regras e  $p$  são as entradas, e um vetor  $Y$  de dimensão  $m$  e um vetor  $P$  de parâmetros de dimensão  $k$  ( $p+1$ ). Mais detalhes do processamento de TSK podem ser visto em Takagi e Sugeno (1983); Sugeno e Yasukawa (1993), Rezende (2005), entre outros.

## CARACTERÍSTICAS, VANTAGENS E DESVANTAGENS DA LÓGICA FUZZY

A lógica *fuzzy* é conceitualmente fácil de entender, tem uma ampla flexibilidade e está baseada em uma linguagem natural e não em números, ou seja, os valores verdades são expressos linguisticamente. Por exemplo: ausente, presente, instável, moderada, estável, muito vulnerável, vulnerável, não vulnerável, etc. Vale destacar que esta lógica apresenta algumas características, tais como:

- Vários modificadores de predicado, como por exemplo: muito, não, pouco, bastante, médio, etc.
- Um amplo conjunto de quantificadores, como por exemplo: poucos, vários, em torno de, usualmente, etc.
- Faz uso das probabilidades linguísticas, como por exemplo: provável, improvável, que são interpretados como números nebulosos e manipulados pela sua aritmética.
- Manuseia todos os valores entre 0 e 1, tomando estes, como um limite apenas.
- Há uma tolerância na imprecisão dos dados.
- Faz a modelagem da função não linear.
- Combina as técnicas de controle convencionais sendo construída com base na experiência dos especialistas.

Para a aplicação da lógica *fuzzy* é realizada uma relação entre o dado e o agrupamento que varia de 0 a 1, onde o 0 exclui totalmente esse dado do agrupamento e o 1 indica a inclusão total do dado no agrupamento (GUIERA et al., 2005).

Algumas vantagens e desvantagens da utilização da Lógica *Fuzzy* vêm sendo estudada e aperfeiçoada desde o seu pioneirismo em 1965 por Zadeh. Há uma série de vantagens, as quais se podem citar:

- Requer poucas regras, valores e decisões;
- Mais variáveis observáveis podem ser valoradas e o uso de variáveis linguísticas nos deixa mais perto do pensamento humano;
- Simplifica a solução de problemas e proporciona um rápido protótipo dos sistemas;
- Simplifica a aquisição da base do conhecimento e manuseia todos os valores entre o intervalo de 0 e 1;
- Proporciona um rápido protótipo dos sistemas possibilitando a captura do pensamento humano através da utilização de variáveis linguísticas.

Assim como a lógica apresenta vantagens, há algumas desvantagens ao trabalhar com relações físicas naturais, pois há uma necessidade maior para verificar a causa e o efeito das variáveis trabalhadas. Segundo Silva (2008), sistemas baseados em lógica nebulosa são mais fáceis de entender, manter e testar, são robustos e operam com falta de regras ou com regras defeituosas.

Sendo assim as desvantagens que apresentam são: fazer mais simulações e testes; quem manuseia não aprende facilmente; há dificuldades em estabelecer regras corretamente; e não há uma definição matemática precisa, mas com o conhecimento matemático pode-se obter as repostas que solucionam os problemas.

## **APLICAÇÕES DA LÓGICA FUZZY EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS**

Várias pesquisas têm utilizado a lógica *fuzzy* como ferramenta de estudo, em Cartografia e Geodésia, por exemplo: Antunes; Lingnau; Centeno (2003) explicitam a classificação de imagens digitais de alta resolução com base na orientação a objeto, considerando descritores de forma e textura através das regras *fuzzy*, em uma área teste na zona agrícola no município de Nova Esperança-PR, onde se propôs mapear a mata ciliar ao longo do Rio Porecatú. Em contrapartida, Lazzarotto, Sluter e Dalmolin (2005) utilizaram os indicadores e sistema de inferência *fuzzy* como avaliação da qualidade de base cartográfica. Kersting e Centeno (2007) fazem a categorização dos objetos por meio de classificador *fuzzy*, a partir da definição das funções de pertinência baseadas nos descritores de forma, textura e relação entre os objetos. Já, Ximenes et al. (2008) verificam a eficácia do modelo da dinâmica do desmatamento na Amazônia através de uma simulação do índice de similaridade *fuzzy* elevado. Fernandes, Bastos e Mello (2010) utilizam a lógica *fuzzy* e os sistemas de informações geográficas como apoio a decisão do planejamentos do uso do espaço, onde elaboraram um mapa de sugestão, onde o conjunto difuso é utilizado para analisar o resultado dos mapas.

Benz et al. (2004) utilizam objetos *fuzzy* para análise orientada através de dados de sensoriamento remoto e informações SIG prontas. Lizarazo (2010) utiliza a lógica *fuzzy* para estimar áreas de superfície impermeáveis através de imagens de alta resolução. Hester et al. (2010) utilizaram imagens de alta resolução para detecção de mudanças na cobertura da terra com base no raciocínio *fuzzy* desenvolvendo mapa temático. Hanson et al. (2010) exploram uma metodologia para resultados dedutivo para análise geomorfológica através de conceitos da lógica *fuzzy* onde reconhece a não linearidade da morfologia costeira. Prado e Galo (2009, 2010) utilizam técnicas tradicionais de classificação de imagens multiespectrais como ferramenta usual para o mapeamento temático da cobertura da terra.

Outras pesquisas vêm sendo desenvolvidas utilizando lógica *fuzzy* seja em questões relacionadas a solo (JUANG et al., 1996) ao potencial de erosão, (MITRA et al., 1998; ALVES; MARQUES; SOUSA, 2002) áreas susceptíveis a escorregamentos (LEE; JUANG, 1992), impactos de áreas com aterros sanitários (LIMA, 1995; MACBEAN; ROVERS; FARQHAR, 1995) e resíduos (MENEZES, 1995); análise espaço-temporal de áreas alagadas (SILVA; SILVA, 2012a); análise de mudanças na dinâmica da paisagens da foz do Rio São Francisco (SILVA; SILVA, 2012b); classificação temporal de áreas costeiras (SILVA; GONÇALVES, 2012a; 2012b). Modelagem *fuzzy* na detecção de vulnerabilidade à erosão a partir de mapas temáticos e temporais (SILVA, 2013; SILVA et al., 2013).

## CONCLUSÕES

A lógica *fuzzy* ou nebulosa tem contribuído em muitas áreas, sendo necessário o conhecimento de seus aspectos e estruturas fundamentais. A contribuição da lógica *fuzzy* nos últimos anos tem contribuído com o potencial de manuseio de incertezas e de controle de sistemas complexos. Sendo assim cada vez mais se espera que a Lógica *Fuzzy* sirva como ferramenta para diversas áreas.

A obtenção de resultados utilizando a modelagem *fuzzy* apresenta distintas vantagens, como: custo baixo, análise visível e rápida, diagnóstico rápido, mas o pesquisador tem que estar atento as desvantagens como construção de regras defeituosas e criação de simulações e testes. Algumas dificuldades podem ser encontradas como: na análise dos ranges associados a funções de pertinências analisando qual o intervalo das variáveis e a construção das regras envolvendo todas as variáveis no processo de inferência.

# State-of-art of fundamentals and ideas of Fuzzy Logic applied to Science and Technology

## ABSTRACT

This work presents an introduction to the principles, ideas, advantages, and disadvantages, as well as different works that have been using Fuzzy Logic as a study tool, with a focus on Science. Logic is the science that aims to study the reasoning laws. Classical logic is since Aristotle's time where is based on the bivalence of T (true) or F (false). Fuzzy logic is based on the theory of fuzzy sets. From the 70s, fuzzy logic was disseminated in industrial applications, after countless frustrated attempts by Prof. Mandani to control a steam engine with different controllers, achieving good results from the fuzzy system. Over the decades, its use has been advancing in different areas of studies, research, and development. It is worth mentioning that, currently, fuzzy logic is fundamental for applications in uncertain areas, where from this one can quantify and qualify the variables studied.

**KEYWORDS:** Fuzzy Logic. Science. Uncertainty. Variables. Fuzzy System.



## REFERÊNCIAS

- ALVES, A., MARQUES, M. E SOUZA, F.J. Análise do potencial erosivo dos solos em bacias hidrográficas: Aplicação da Lógica Nebulosa (Fuzzy) no diagnóstico ambiental. *Pesquisa Agropecuária e Desenvolvimento Sustentável*, **PESAGRORIO**, v. 1, n. 1, p.1-13, 2002.
- ANTUNES, A. F. B.; LINGNAU, C.; CENTENO, J. A. S. Object Oriented Analysis and Semantic Network for high Resolution Image Classification. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 9, n. 2, p. 233-242, 2003.
- BENZ, U. C.; HOFMANN, P.; WILLHAUCK, G.; LINGENFELDER, I.; HEYNEN, M. Multi-resolution, object-oriented fuzzy analysis of remote sensing data for GIS-ready information. **ISPRS Journal of Photogrammetry & Remote Sensing**: Elsevier. vol. 58, p. 239-258, 2004.
- CORCOLL-SPINA, C. O. **Lógica Fuzzy: reflexões que contribuem para a questão de subjetividade na construção do conhecimento matemático**. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de São Paulo, 2010. 165p.
- CUNHA, A. M.; MENNA, L. M.; SANTOS, O. J. S. Inteligência Artificial. Curso de Especialização em Análise de Ambiente Eletromagnético. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2012.
- FERNANDES, R. T. *Supervisão de um Sistema Híbrido eólico/diesel usando Lógica Fuzzy*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2005. 118p.
- FERNANDES, E.; BASTOS, L. C.; MELLO, R. Apoio à decisão ao Planejamento do uso do espaço com a utilização de Sistemas de Informações Geográficas e Lógica Difusa. **Revista Brasileira de Cartografia**, n. 62, p. 43-54, 2010.
- FILIPPINI, F. **Metodologias para tomada de decisão a partir de Informações Qualitativas**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Ciências da Computação, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003, 82p.
- GOMIDE, F. A. C.; GUDWIN, R. R. Modelagem, Controle, Sistemas e Lógica Fuzzy. **SBA Controle & Automação**, v. 4, n. 3, p. 97-115, 1994.
- GOMIDE, F. A. C.; GUDWIN, R. R.; TANSCHKEIT, R. Conceitos Fundamentais da Teoria de Conjuntos Fuzzy, Lógica Fuzzy e Aplicações. Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial (DCA), 2009, 38 p.
- GUIERA, A. J. A.; CENTENO, T. M.; DELGADO, M. R.; MÜLLER, M. Segmentação por Agrupamentos Fuzzy Cmeans em Imagens LiDAR Aplicados na Identificação de Linhas de Transmissão de Energia Elétrica. Espaço Energia. 3 ed., 2005, 9p.

HANSON, S.; NICHOLLS, R J.; BALSON, P.; BROWN, I.; FRENCH, J.R.; SPENCER, T.; SUTHERLAND, W. J. Capturing coastal geomorphological change within regional integrated assessment: an outcome-driven fuzzy logic approach. **Journal of Coastal Research**: West Palm Beach (Florida), v.26, n.5, p. 831–842, 2010.

HESTER, D. B.; NELSON, S. A. C.; CAKIR, H. I.; KHORRAM, S.; CHESHIRE, H. High-resolution land cover change detection based on fuzzy uncertainty analysis and change reasoning. Taylor & Francis: **International Journal of Remote Sensing**, v. 31, n. 2, p. 455-475, 2010.

JANG, J. S.; MIZUTANI, E.; SUN, C. T. Neuro – Fuzzy and soft computing: A computational approach to learning and machine intelligence. Londres: Prentice Hall, 1997.

JUANG, C. H., HUANG, X. H., HOLTZ, R. D. E CHEN, J. W. Determining Relative Density of Sands From CPT Using Fuzzy Sets. **Journal of Geotechnical Engineering**, ASCE, v. 122, n. 1, p.1-6, 1996.

JUNGES, L. C. D. Introdução a Lógica Fuzzy. Departamento de Automação de Sistemas Industriais Inteligentes, 2006.

KERSTING, A. P. B.; CENTENO, J. A. S. Object Oriented Transmission Line Corridors Classification using LIDAR Technology and a Non-Metric Digital Camera. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 13, n. 2, p. 295-315, 2007.

KOHAGURA, T. **Lógica Fuzzy e suas Aplicações**. Trabalho de conclusão de Curso, Programa de Graduação em Ciência da Computação, Universidade Estadual de Londrina, 2007. 61p.

LAZZAROTTO, D. R.; SLUTER, C. R.; DALMOLIN, Q. Avaliação da qualidade de base Cartográfica por meio de indicadores e Sistema de Inferência Fuzzy. **Boletim de Ciências Geodésicas**: Resumos. v. 11, n. 2, p.297-299, 2005.

LEE, C. C. Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller: Parte II. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, v. 20, n. 2, p. 419-435, 1990.

LEE, D. H.; JUANG, C.H. Evaluation of failure potential in mudstone slopes using fuzzy sets. **ASCE Geotechnical Special Publication N. 31**, Stability and Performance of Slopes and Embankments – II, v. 2, p. 1137-1151, 1992.

LIMA, G. S. **Seleção de Áreas para Implantação de Aterros Sanitários: Uma Proposta Baseada na Análise do Valor e Lógica Fuzzy**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1995, 153p.

LIZARAZO, I. Fuzzy image regions for estimation of impervious surface areas. Taylor & Francis: **Remote Sensing Letters**, v. 1, n. 1, p.19-27, 2010.

MACBEAN, E. A., ROVERS, F.A. E., FARQHAR, G. J. **Solid Waste Landfill Engineering and Design**. PrenticeHall Inc. Englewood Cliffs. New Jersey, USA, 1995, 521p.

MENDEL, J. M. Uncertain rule-based fuzzy logic systems: Introduction and New Directions. 2001. Londres: Prentice Hall, 2001.

MENEZES, D. B. **Diagnóstico dos Impactos do Depósito de Resíduos Sólidos de São Carlos no Meio Físico**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade de São Paulo, 1995, 102p.

MITRA, B., SCOTT, D., DIXON, C. E MCKIMMEY, J. Application of fuzzy logic to the prediction of soil erosion in a large watershed. **Geoderma**, v. 86, n. 4, p.183- 209, 1998.

MONTEIRO, R. D. V. **Uma proposta de aprendizagem interativa da Lógica utilizando simuladores artificiais inteligentes**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Ciências da Computação, Universidade Federal de Santa Catarina, 2002, 100p.

PRADO, F. A.; GALO, M. L. B. T. Classificação de Imagens Multiespectrais Baseada em Abordagem Fuzzy. **Revista Brasileira de Cartografia**, v.61, n.03, p.233-244, 2009.

PRADO, F. A.; GALO, M. L. B. T. Desenvolvimento de um Sistema Hierárquico de Classificação com Aplicação Baseada em Abordagem Fuzzy. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 16, n. 2, p.309-331, 2010.

REZENDE, S. O. **Sistemas Inteligentes Fundamentos e Aplicações**. 1ª ed. Barueri – SP: Manole, 2005.

RODRIGUES, S. A.; SANTOS, S. A. A Lógica Fuzzy na Administração de Empresas. VII SEMEAD Administração Geral, p. 1-12, 2004.

RODRIGUES, F.Z.; SANTOS, S.A. A Lógica Fuzzy na Administração de Empresas. VII SEMEAD Administração Geral, 2005, 3 p.

SHAW, I.S.; SIMÕES, M.G. **Controle e Modelagem Fuzzy**. 2ª ed. São Paulo: Blücher, 2007.

SILVA, M. A. **Aplicação de Lógica Nebulosa para Previsão do Risco de Escorregamentos de Taludes em Solo Residual**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Estadual do Rio de Janeiro, 2008, 150p.

SILVA, V. A. D.; CASTRO, D. B.; SOUSA, G. R.; LAMIM FILHO, P. C. M.; BRITO, J. N. Estudo Comparativo entre as Funções de Pertinência inseridas na Entrada e na Saída de um Sistema Fuzzy desenvolvido na Plataforma Labview 9.0. Nono Simpósio de Mecânica Computacional Universidade Federal de São João Del-Rei – MG, **Anais...**, p. 1-8, 2010.

SILVA, L. M.; SILVA, B. Q. Análise espaço-temporal de áreas alagadas Pantanal, utilizando geotecnologias como ferramenta para detecção dos impactos. 4º Simpósio de Geotecnologias no Pantanal, **Anais...**, p. 168 – 10, 2012(a).

SILVA, B. Q.; SILVA, L. M. Utilização da Lógica Fuzzy para análise de mudanças na dinâmica da paisagem da foz do Rio São Francisco. IX Simpósio Nacional de Geomorfologia, **Anais...**, p. 1 -6, 2012(b).

SILVA, L. M. **Modelagem Fuzzy da interface continente e oceano através de dados geodésicos para identificar locais vulneráveis.** Projeto de Qualificação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal de Pernambuco, 2012, 44p.

SILVA, L. M.; GONÇALVES, R. M. Classification of Temporal Beach Environment in Boa Viagem - Recife – PE: Using Fuzzy Logic Analysis. 8th FIG Regional Conference, **Anais...**, p. 1-10, 2012(a).

SILVA, L. M.; GONÇALVES, R. M. **Uma revisão da modelagem fuzzy da interface continente e oceano para identificar locais vulneráveis à erosão.** In: Quinta-Ferreira, M., Barata, M. T., Lopes, F.C., Andrade, A. I., Henriques, M. H., Pena dos Reis, R., Ivo Alves, E. (Coords). Para Desenvolver a Terra. In: Memórias e Notícias de Geociências no Espaço Lusófono. Imprensa da Universidade de Coimbra, Cap. 15 (in press), v. 1, p. 100-110, 2012(b).

SILVA, L. M. **Modelagem Fuzzy como subsídios para a espacialização da vulnerabilidade costeira à erosão.** Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, Universidade Federal de Pernambuco, 2013, 180p.

SILVA, L. M.; GONÇALVES, R. M.; LIRA, M. M. S.; PEREIRA, P. S. Modelagem Fuzzy aplicada na detecção da vulnerabilidade à erosão costeira. **Boletim de Ciências Geodésicas: Curitiba**, v. 19, n. 4, P. 746-764, 2013.

SUGENO, M.; YASUKAWA, T. A Fuzzy-Logic-Based Approach to Qualitative Modeling. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 1, n. 1, p.1-25, 1993.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control. **IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics**, v. 15, n.1, p. 116-132, 1983.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ – (UEM). Conjuntos Nebulosos. Maringá/PR. Disponível em: <http://www.din.uem.br/~ia/intelige/difusa/Ideias.htm>. Acesso em: 22 novembro 2018(a).

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ – (UEM). Conjuntos Nebulosos. Maringá/PR. Disponível em: <http://www.din.uem.br/~ia/intelige/difusa/Historico.htm>. Acesso em: 22 novembro 2018(b).

VELLASCO, M. M. B. R. Lógica Nebulosa. ICA: Núcleo de Pesquisa em Inteligência Computacional Aplicada PUC - Rio de Janeiro, 2010.

XIMENES, A. C.; ALMEIDA, C. M.; AMARAL, S.; ESCADA, M. I. S.; AGUIAR, A. P. D. Modelagem Dinâmica do desmatamento na Amazônia. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 14, n.3, p. 370-391, 2008.

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets, **Inform. and Control**. n.8, p. 338-353, 1965.

**Recebido:** 17 jan. 2019

**Aprovado:** 01 out. 2019

**DOI:** 10.3895/rbgeo.v7n3.9365

**Como citar:** SILVA, L. M.; GONÇALVES, R. M.; FERREIRA, L. M.; SILVA, E. J. A.; SILVA, B. Q.. Estado da arte dos fundamentos e ideias da Lógica Fuzzy aplicada as Ciências e Tecnologia. **R. bras. Geom.**, Curitiba, v. 7, n. 3, p. 149-169, jul/set. 2019. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbgeo>>. Acesso em: XXX.

**Correspondência:**

Luciana Maria da Silva

Rua Cora Coralina, Cidade Universitária, CEP 13083-896, Campinas, São Paulo, Brasil.

**Direito autoral:** Este artigo está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.

