

# Investigações sobre os efeitos da relatividade nas medidas de tempo dos relógios dos satélites GNSS

## RESUMO

**Gabriel Willian Reis Suniga**

[gabriel.suniga@unesp.br](mailto:gabriel.suniga@unesp.br)

<https://orcid.org/0009-0009-6257-1486>

Universidade Estadual Paulista (UNESP),  
Presidente Prudente, São Paulo, Brasil.

**Tayná Aparecida Ferreira**

**Gouveia**

[tayna.gouveia@unesp.br](mailto:tayna.gouveia@unesp.br)

<https://orcid.org/0000-0003-1140-752X>

Universidade Estadual Paulista (UNESP),  
Presidente Prudente, São Paulo, Brasil.

**João Francisco Galera Monico**

[galera.monico@unesp.br](mailto:galera.monico@unesp.br)

<https://orcid.org/0000-0003-4101-9261>

Universidade Estadual Paulista (UNESP),  
Presidente Prudente, São Paulo, Brasil

As teorias da relatividade restrita e geral tornaram-se a base teórica de muitas tecnologias presentes na atualidade. Nesse sentido, uma das tecnologias para localização e navegação mais impactantes dos últimos tempos, o GNSS (*Global Navigation Satellite Systems*), sofre grandes influências relativísticas. Devido às altas velocidades dos satélites GNSS, assim como as grandes altitudes em que se encontram (diferentes campos gravitacionais), surgem efeitos relativísticos não desprezíveis sobre os relógios atômicos a bordo. Neste trabalho, é feita uma revisão teórica dos efeitos relativísticos e o impacto causado nos sistemas GNSS. Nesse sentido, são apresentadas as teorias da relatividade restrita e geral. Também, deduz-se a transformação relativística convencional, que calcula a somatória dos efeitos relativísticos sobre as medições de tempo dos sistemas GNSS. Aplicando a transformação, obteve-se uma diferença de 38,47  $\mu\text{s}$  entre as medidas de tempo dos relógios de um satélite GPS (*Global Positioning System*). Para outros sistemas GNSS (GLONASS, Galileo e Beidou), a transformação relativística apresentou resultados entre 37 e 41  $\mu\text{s}$ , o que mostrou boa concordância com a literatura. Finalmente, foi apresentado o desvio de frequência realizado sobre os relógios dos satélites GPS antes de entrarem em órbita, e a importância de correções relativísticas sobre sistemas GNSS.

**PALAVRAS-CHAVE:** Relatividade. Relógios atômicos. GNSS.

## INTRODUÇÃO

Em dezembro de 2008, em uma noite de inverno na cidade de Paris, dois jovens empreendedores, Travis Kalanick e Garrett Camp, não conseguiram encontrar um táxi no caminho de volta para casa. No ano seguinte, desenvolveram um aplicativo para smartphone que permitia ao usuário solicitar viagens de forma rápida e prática. Assim nasceu a Uber, que em 2015 alcançou a marca de um bilhão de viagens (UBER, 2022).

A bem-sucedida empresa de viagens utiliza em sua estrutura de funcionamento a localização e posicionamento em tempo real, de forma que o usuário estabeleça sua localização atual, seu destino e saiba onde o motorista está e quanto tempo levará para alcançá-lo.

A multibilionária empresa de tecnologia Google possui uma ferramenta de localização chamada Google Maps, que funciona como um serviço de pesquisa de imagens de satélite e visualização de mapas. A ferramenta permite ao usuário, entre muitas coisas, receber a localização das áreas no mapa online e estabelecer rotas de viagem.

Através dos exemplos citados, pode-se notar a importância que a geolocalização, processo de identificação de informações geográficas, captadas por meio de dispositivos conectados à internet, satélite ou radiofrequência, possui nas sociedades tecnológicas. Um dos métodos de geolocalização mais utilizados é o Sistema de Posicionamento Global, sigla GPS (*Global Positioning System*), que opera com a captação e transmissão de dados de satélites artificiais em órbita e receptores na superfície terrestre (MONICO, 2008).

Para que o sistema de posicionamento funcione de forma eficiente, muitos efeitos físicos devem ser levados em conta. Alguns dos efeitos mais importantes que afetam a precisão de informação e dados do GPS são descritos pelas teorias da relatividade restrita e geral, formuladas pelo físico alemão Albert Einstein (1879-1955).

Dessa forma, este artigo busca fazer uma breve revisão sobre os principais modelos GNSS (NAVSTAR-GPS, GLONASS, Galileo e BeiDou Compass) abordando suas estruturas e funcionamento. Também serão introduzidas as teorias da relatividade restrita e geral, abordando os efeitos da dilatação temporal e do desvio de frequência gravitacional. Por fim, objetiva-se calcular e apresentar os efeitos relativísticos que atuam nas medidas de tempo dos relógios embarcados nos satélites GNSS.

## BREVE HISTÓRIA DOS GNSS

O homem busca, desde os primórdios da humanidade, localizar-se no mundo em que vive. Por centenas de anos, o ser humano determinou as posições de pontos na superfície da Terra por meio de observações de objetos distantes. Um exemplo são as navegações marítimas do século XV, com as observações do Sol, das estrelas e dos planetas para guiar as viagens.

Para auxiliar no posicionamento, instrumentos de observação foram elaborados e amplamente utilizados no decorrer da história. A bússola, criada pelos chineses, foi um importante instrumento de posicionamento e orientação

nas navegações marítimas, assim como o astrolábio, instrumento capaz de medir a altura dos astros acima do horizonte. Instrumentos mais precisos foram elaborados no decorrer dos séculos, tais como o quadrante de Davis e o sextante. Entretanto, mesmo com excelentes instrumentos, a navegação celeste era capaz de proporcionar apenas valores aproximados da posição (MONICO, 2008).

Com o desenvolvimento da eletrônica, surgiram diversos sistemas de posicionamento, como o Loran (*Long-Range Navigation System*) e o Omega (*Global low frequency navigation system*), ambos baseados em ondas de rádio. Entretanto, os sistemas apresentavam limitações, onde o primeiro não possuía uma cobertura global (além de uma baixa acurácia) e o segundo apresentava um custo elevado (MONICO, 2008).

O primeiro sistema de posicionamento baseado em satélites artificiais a operar globalmente foi o NNSS (*Navy Navigation Satellite System*), ou Transit, sistema esse criado e monitorado pela Marinha dos Estados Unidos. O Transit utilizava o Efeito Doppler (*Doppler's shift*), além do uso de sinais em frequências diferentes (150 e 400 MHz), a fim de reduzir o efeito causado pela camada ionosférica. O sistema foi desativado em 1996, com o surgimento do NAVSTAR - GPS (*Navigation Satellite with Time and Ranging - Global Positioning System*) e sua tecnologia superior (MONTENBRUCK et TEUNISSEN, 2017, cap. 1, p. 4-5).

De forma independente e paralela ao GPS, surgiu na antiga URSS o GLONASS (*Global Orbiting Navigation Satellite System*), e próximos aos anos 2000 foram anunciados, pela Agência Espacial Europeia, o desenvolvimento do Galileo, e pela China, o BeiDou Compass.

Os sistemas de posicionamento como o GPS, GLONASS, Galileo e BeiDou Compass são chamados GNSS (*Global Navigation Satellite Systems*), e durante a 10ª Conferência de Navegação Aérea, a ICAO (*International Civil Aviation Organization – Organização Internacional de Aviação Civil*) reconheceu que a navegação aérea do século XXI teria como fonte primária o GNSS (MONICO, 2008).

Este artigo está estruturado em três capítulos. Inicialmente, é apresentada uma revisão da literatura acerca da estrutura e funcionamento dos quatro principais modelos GNSS: GPS, GLONASS, Galileo e BeiDou Compass (MONICO, 2008; MONTENBRUCK et TEUNISSEN, 2017; JEREZ et ALVES, 2018; SILVA et al., 2020). Na terceira seção são introduzidas as teorias da relatividade restrita e geral, no contexto do trabalho (NUSENZVEIG, 2014). Para uma maior compreensão das teorias, indicam-se os artigos originais (EINSTEIN, 1905; 1915). Ainda, discutir-se-á acerca das escalas de tempo utilizadas na Geodésia, assim como a dedução da transformação relativística convencional (KOUBA, 2002; ASHBY, 2003; KOUBA, 2004; CARARO et al., 2010; MONTENBRUCK et TEUNISSEN, 2017). Por fim, calcula-se o impacto dos efeitos relativísticos sobre as medições de tempo dos relógios GNSS (KULBIEJ, 2016).

## PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS GNSS

### NAVSTAR-GPS

O NAVSTAR-GPS ou simplesmente GPS – Sistema de Posicionamento Global – é um sistema de navegação por satélite operado pelos Estados Unidos. O programa

teve início no começo da década de 1970 e foi declarado totalmente operacional em 1995 (MONTENBRUCK et TEUNISSEN, 2017, cap. 7, p. 197).

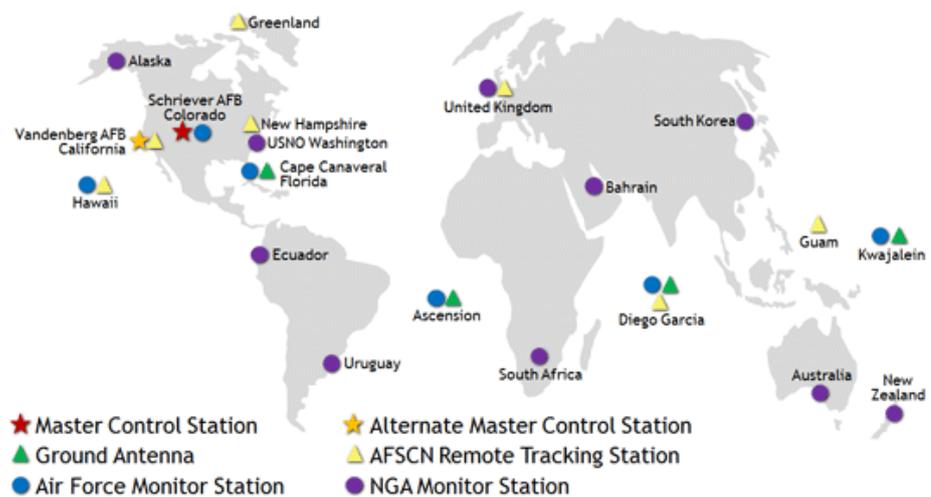
O sistema é composto por três segmentos principais, responsáveis por seu funcionamento: Espacial, Controle e Usuários. Essa composição de segmentos é uma característica dos GNSS.

O sistema espacial consiste em, no mínimo, 24 (vinte e quatro) satélites MEO (*Medium Earth Orbits*) distribuídos em seis planos orbitais uniformemente espaçados, nos quais estão contidos quatro satélites por plano orbital em uma altitude de, aproximadamente, 20.200 km. Satélites extras são colocados em órbita de forma a manter a cobertura global sempre que algum dos satélites base esteja em manutenção (GPS, 2023).

Essa orientação espacial permite que, em qualquer instante e lugar da superfície terrestre, pelo menos quatro satélites possam ter seus sinais rastreados no horizonte visível. Esta é a quantidade mínima necessária para possibilitar o posicionamento por meio de satélites artificiais (três satélites para coordenadas espaciais e um satélite para coordenada temporal) (MONICO, 2008).

O segmento de controle é composto por estação de controle central (MCS – *Master Control Station*) localizada em Colorado Springs, Colorado, assim como estações de controle alternativas e antenas de controle. A localização das instalações de controle pode ser vista na Figura 1.

Figura 1 – Mapa do segmento de controle



Fonte: GPS (2023).

Algumas das principais funções desse segmento são: monitorar e controlar, de forma contínua, o sistema de satélites; determinar o sistema de tempo GPS; prever as efemérides dos satélites e; atualizar periodicamente as mensagens de navegação de cada satélite (MONICO, 2008).

Já o segmento de usuários é relacionado aos receptores GPS, que podem se destinar a diversos propósitos, como navegação marítima ou terrestre, Geodésia (ciência que tem por objetivo determinar a forma e as dimensões da Terra e os parâmetros definidores do campo de gravidade) e agricultura. Pode-se ainda dividir a categoria de usuários em civil e militar (MONICO, 2008).

## GLONASS

O GLONASS (*Global Orbiting Navigation Satellite System*) foi concebido também no início da década de 1970, na já extinta URSS (União das Repúblicas Socialistas Soviéticas) pelo *Soviet Union's Scientific Production Association of Applied Mechanics*. Atualmente é desenvolvido e operado pela *Russian Federation Space Forces*. De forma similar ao GPS, o sistema é composto de três segmentos (Espacial, Controle e Usuário) (MONICO, 2008).

Devido à dissolução da URSS em 1991, o GLONASS que a princípio obteve sua constelação completa em um período próximo ao do GPS, passou por um longo período de degradação, causado em grande parte pela falta de investimentos e lançamentos de novos satélites para substituição dos antigos (JEREZ et ALVES, 2018).

De fato, um dos grandes avanços da tecnologia GNSS é o uso de dados combinados de seus sistemas. No caso do GLONASS, devido à instabilidade e degradação do sistema, tornou-se inviável já no final da década de 1990 o uso de dados combinados GPS/GLONASS.

Após esse período de degradação, teve início no ano de 2001 um plano de reestabelecimento e modernização do sistema, o que inicialmente visaria a cobertura completa do território russo e, posteriormente, a cobertura global. Em 2011 o GLONASS foi reestabelecido com sua constelação de 24 satélites operacionais (JEREZ et ALVES, 2018).

O segmento espacial do sistema consiste em uma constelação de 24 satélites ativos e três reservas. Eles distribuem-se em três planos orbitais separados de 120° com uma inclinação de 64,8°, cada plano contendo oito satélites espaçados de maneira equidistante. As órbitas são aproximadamente circulares com uma altitude de aproximadamente 19.100k m e de um período orbital de 11h15min (MONICO, 2008; GLONASS, 2023).

Já o segmento de controle é composto por um sistema de controle central (centro de controle terrestre localizado em Moscou), uma central de sincronização de tempo, além de várias estações de comando e rastreo.

Esse segmento é responsável por: prever as órbitas dos satélites; transferir as efemérides e as correções dos relógios em cada um dos satélites e; sincronizar os relógios dos satélites com o sistema de tempo do GLONASS (MONICO, 2008).

Assim como no GPS, o segmento de usuários do GLONASS está diretamente associado aos aparelhos receptores.

## GALILEO

O Galileo vem sendo desenvolvido pela ESA (*European Space Agency* – Agência Espacial Europeia), de forma a ser interoperável com o GPS e o GLONASS. Os primeiros satélites do sistema foram lançados em 2005 e 2008, para validação de órbita. A partir de 2014, os satélites Galileo vêm sendo continuamente lançados com o propósito de atingir a fase operacional completa do sistema. Em dezembro de 2016, serviços iniciais do Galileo foram anunciados pela ESA (SILVA et al., 2020).

Análogo ao GPS e GLONASS, o sistema europeu é composto por três segmentos: Espacial, Controle e Usuários.

O segmento espacial é planejado de forma a ter 30 satélites MEO com 6 satélites reservas distribuídos igualmente em três planos orbitais. Os satélites percorrerão uma órbita circular com um raio próximo de 29.600 km, a uma altitude de 23.229 km e um período orbital de 14 horas.

O segmento de controle do Galileo é composto pelo GCS (*Ground Control Segment* – Segmento de Controle Terrestre) para controle da constelação e o GMS (*Ground Mission Segment* – Segmento de Missão Terrestre) responsável pelas tarefas referentes ao serviço. O centro do segmento de controle mundial do Galileo está localizado em dois lugares: Oberpfaffenhofen (Alemanha) e Fucino (Itália) (GALILEO, 2023).

Nas funções de controle e monitoramento do sistema Galileo, o GCS é responsável por todas as funções referentes à coordenação e controle dos satélites, ao passo que o GMS mede e monitora os sinais Galileo, gera as mensagens de navegação e as distribui aos satélites por meio de uma rede de estações de comunicação (SILVA et al., 2020).

Já o segmento de usuários é composto pelos receptores e dispositivos que coletam os sinais do sistema e calculam sua localização.

## BEIDOU COMPASS

O Sistema de Navegação por Satélite BeiDou (BDS – *BeiDou Navigation Satellite System*) foi construído pela China em um esforço para as necessidades de segurança do país e para o desenvolvimento econômico e social. O sistema é composto por três segmentos (Espacial, Controle e Usuário) (BEIDOU, 2023).

O segmento espacial é composto por satélites em diferentes órbitas, sendo 27 satélites GEO (*Geostationary Earth Orbit*), 3 satélites IGSO (*Inclined Geo-Synchronous Orbit*) e 5 satélites MEO. (BEIDOU, 2023; MONTENBRUCK et TEUNISSEN, 2017, cap. 10, p. 286).

O segmento de controle consiste em várias estações terrestres, incluindo estações de controle centrais, de monitoramento e gerenciamento. Já o segmento de usuários é composto por vários tipos de produtos, sistemas e serviços BDS (BEIDOU, 2023).

## TEORIAS DA RELATIVIDADE

### TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

Einstein apresentou, na introdução de um de seus artigos da relatividade, uma aparente assimetria provinda das equações de Maxwell (equações diferenciais parciais que compõem a base do eletromagnetismo clássico) quando se deslocava uma espira condutora em relação a um ímã em repouso e quando se deslocava o ímã em relação à espira em repouso. No primeiro caso, origina-se uma força eletromotriz, que cria uma corrente na espira. No segundo caso, surge um campo elétrico que também origina uma corrente na espira. Einstein questionou se o que

é importante é o movimento relativo entre a espira e o ímã, por que a física descreveria os dois casos de formas distintas? De forma a responder isso, ele propôs que as equações de Maxwell deveriam ser mantidas, e o que precisava ser alterado era a Transformação de Galileu (transformações de coordenadas entre sistemas de referência) (PIRES, 2011).

Dessa forma, no artigo denominado “Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento”, publicado em 1905, Einstein apresentou dois postulados, que viriam a ser a base da Teoria da Relatividade Restrita:

- As leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais (referenciais em repouso ou em movimento retilíneo uniforme) e;
- A velocidade da luz no vácuo ( $c$ ) é a mesma em todas as direções e é independente do movimento da fonte.

O segundo postulado, em específico, apresenta uma contradição à Mecânica Newtoniana, que considerava o tempo como absoluto. Segundo o postulado, se a velocidade da luz é uma constante universal ( $c = 2,99 \times 10^8$  m/s), então espaço e tempo devem variar de forma a manter essa constância, já que:

$$\text{velocidade} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{intervalo de tempo}} \quad (1)$$

Muitos físicos da época se posicionaram de forma diametralmente oposta às ideias de Einstein. Uma das razões era que a velocidade da luz ser considerada uma constante vinha das recém-formuladas Equações de Maxwell e, em contrapartida, a ideia de tempo absoluto provinha da Mecânica Newtoniana e da relatividade de Galileu (Transformações de Galileu), que perduravam por séculos.

Todavia, Einstein permaneceu confiante em sua teoria, e deduziu a partir de seus postulados as novas transformações de coordenadas, chamadas hoje de Transformação de Lorentz:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (2)$$

Nesta equação,  $(x, y, z, t)$  são as coordenadas no referencial S e  $(x', y', z', t')$  do referencial S', que se move com velocidade constante  $v$  em relação a S. A velocidade da luz no vácuo é uma constante, definida como  $c = 299.792.458$  m/s. O desenvolvimento teórico de (2) pode ser visto em (NUSSENZVEIG, 2014).

O termo  $\gamma$  é chamado Fator de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

A Transformação de Lorentz Inversa é dada por (NUSSENZVEIG, 2014):

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \quad (4)$$

Na física, é denominado valor próprio de uma grandeza o valor dessa grandeza medido em um referencial no qual o corpo a ela associado encontra-se em repouso (NUSSENZVEIG, 2014).

Considere um relógio no referencial  $S'$ , que se move com velocidade  $v$  em relação a  $S$ , e um relógio em  $S$ . No referencial do relógio em  $S'$ , ele se encontra em repouso, e marca um tempo próprio  $t'$ . Tomando a segunda expressão na equação (4), pode-se dizer que  $x' = 0$  (o relógio está em repouso no centro dos eixos coordenados). Se  $t$  é o tempo marcado pelo relógio em  $S$ , temos:

$$t = \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right) = \gamma t' \quad (5)$$

ou seja:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6)$$

Note que, como  $\gamma > 1$ , então  $\Delta t > \Delta t'$ , isto é, um intervalo de tempo marcado por um relógio no referencial  $S$  é maior que o intervalo marcado por outro relógio em  $S'$ , com a condição de que haja uma velocidade relativa  $v$  entre ambos. Em outras palavras, o intervalo de tempo marcado por um observador em repouso é maior que o intervalo marcado pelo observador em movimento. Esse fenômeno é chamado Dilatação do Tempo, e mostra que o tempo não é mais uma entidade absoluta, segundo a teoria da relatividade restrita (NUSSENZVEIG, 2014).

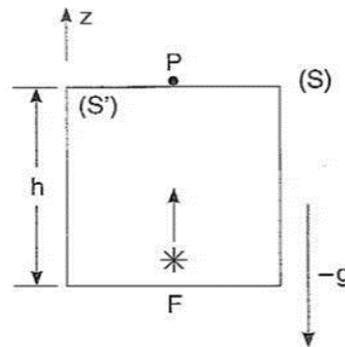
## TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

A Mecânica Newtoniana é capaz de fornecer todas as grandezas físicas envolvidas no movimento dos corpos. Entretanto, ela só é válida quando se considera sistemas de referência inerciais, isto é, não acelerados. É possível estender a Mecânica Newtoniana a referenciais acelerados apenas se considerarmos as chamadas forças fictícias (força inexistentes aplicadas aos corpos em movimento acelerado).

A teoria da relatividade restrita, assim como a Mecânica Newtoniana, em sua forma sem forças fictícias, só é válida para referenciais inerciais. Contudo, Einstein percebeu que um sistema de referência acelerado poderia ser tratado como inercial na presença de um campo gravitacional. Ele notou que a gravidade poderia ser tratada como uma força fictícia, na qual sua existência estaria relacionada com a escolha do referencial (PIRES, 2011). De forma mais aprofundada, Einstein reconheceu o sentido físico na igualdade entre a massa inercial de um corpo (propriedade intrínseca do corpo) e sua massa gravitacional (massa do corpo em um campo gravitacional), formulando o chamado Princípio da Equivalência (NUSSENZVEIG, 2014).

Para observar como um campo gravitacional pode afetar a marcha de um relógio, considere um recinto em queda livre, com aceleração  $-g$ . No momento que inicia a queda, um dispositivo em seu interior (em F) emite um raio de luz monocromático, com frequência  $f_0$ , verticalmente para cima, a uma altura  $h$  do teto. A Figura 2 ilustra essa situação.

Figura 2 – Recinto em queda livre



Fonte: Adaptado de Nussenzveig (2014).

Pelo Princípio da Equivalência, para um observador no referencial  $S'$ , o raio de luz atinge o teto (em P) no instante  $t = h/c$ , e sua frequência permanece  $f_0$ . Já para um observador no referencial S, que sente o campo gravitacional  $g$ , o raio se afasta dele a uma velocidade  $v = gt$  ( $v_0 = 0$ ). Dessa forma, a frequência  $f$  da luz medida no referencial S sofre um Efeito Doppler, dado por (NUSSENZVEIG, 2014):

$$f = f_0 \left(1 - \frac{gt}{c}\right) = f_0 \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \quad (7)$$

A equação (7) diz que o desvio de frequência  $f/f_0$  é dado por  $1 - gh/c^2$ , isto é, a diferença entre o potencial gravitacional  $gh$  no teto e no chão do recinto, dividido pela velocidade da luz ao quadrado.

Tomando-se o potencial gravitacional newtoniano de um corpo de massa  $M$  como  $\varphi(r) = -GM/r$ , pode-se escrever (NUSSENZVEIG, 2014):

$$\Delta t = \Delta t_\infty \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right) = \Delta t_\infty \left(1 + \frac{\varphi(r)}{c^2}\right) \quad (8)$$

Onde  $G$  é a constante gravitacional. A equação (8) não será explicitamente utilizada neste artigo, mas sua importância reside no fato de que o campo gravitacional gerado por um corpo massivo afeta as medições de tempo de relógios a uma distância  $r$  desse campo. Quanto menor a distância, maior o efeito, e vice-versa. Em outras palavras, o campo gravitacional afeta a marcha de um relógio (NUSSENZVEIG, 2014).

Muitas tecnologias sofrem grandes efeitos relativísticos devido às suas composições e estruturas de funcionamento. Devido às suas órbitas, os satélites GNSS sofrem grande influência do campo gravitacional da Terra, o que, juntamente com o efeito da Dilatação do tempo, afeta as medições de tempo dos relógios atômicos.

## ESCALAS DE TEMPO NA GEODÉSIA

Pode-se dividir as escalas de tempo utilizadas na Geodésia em dois grupos: as escalas dinâmicas e as atômicas. As escalas de tempo dinâmicas têm como base as teorias dinâmicas do movimento, em contraste com as escalas atômicas, que se baseiam nas físicas nuclear e quântica.

Antes de 1960, o segundo era definido como 1/86400 de um dia solar médio. No entanto, devido a irregularidades no padrão de rotação da Terra, uma definição mais precisa se fez necessária. O novo segundo, denominado de *ephemeris second*, estava relacionado com uma determinada fração do ano trópico de 1900 e foi utilizado de 1960 a 1967, quando o desenvolvimento de relógios atômicos proporcionou uma definição ainda mais precisa do segundo, que desde 1963 é tida como “a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos no estado fundamental do átomo de césio 133”. Essa definição é a utilizada no Sistema Internacional de Unidades (SI), e é a base da escala de tempo atômica (MONTENBRUCK et TEUNISSEN, 2017, cap. 1, p. 25).

O tempo dinâmico está diretamente relacionado com os movimentos planetários no sistema solar, e sua duração é baseada nos movimentos orbitais da Terra, da Lua e dos planetas. O TDT (*Terrestrial Dynamical Time* – Tempo Dinâmico Terrestre) tem duração de 86.400 segundos (SI) sobre o geóide. Na resolução IV de IAU (1991) é apresentada a nova escala TT (*Terrestrial Time* – Tempo Terrestre), que é considerada equivalente ao TDT (MONICO, 2008).

A escala TAI (*International Atomic Time* – Tempo Atômico Internacional) foi introduzida em janeiro de 1972, sendo uma escala muito estável, mantida por relógios atômicos (precisão de  $10^{-13}$  a  $10^{-15}$ ). O TAI se relaciona com o TDT e TT como se segue:  $TT = TDT = TAI + 32,184s$  (MONTENBRUCK et TEUNISSEN, 2017, cap. 1, p. 27).

O Tempo GPS ( $t_{GPS}$ ) é uma escala de tempo atômica mantida por um conjunto independente de relógios atômicos, e está relacionado com o TAI como  $t_{GPS} = TAI - 19s$  (MONICO, 2008).

Ainda, nas resoluções III e IV de (IAU, 1991) são apresentadas as novas escalas de tempo TCB (*Barycentric Coordinate Time* – Tempo Coordenado Baricêntrico) e TCG (*Geocentric Coordinate Time* – Tempo Coordenado Geocêntrico), com base nos referenciais geocêntricos e baricêntricos.

O TCG é uma escala de tempo relativística nas vizinhanças do geocentro de uma Terra não-rotacional, sendo o tempo utilizado para posicionamento e estudos geofísicos no ITRF (*International Terrestrial Reference Frame*). O padrão de vibração de um relógio em movimento, externo à Terra, que marcha no tempo  $T$  é relacionado ao TCG através de transformações relativísticas com precisão na ordem de  $10^{-18}$  (KOUBA, 2002; CARARO et al., 2010):

$$\frac{dT}{dTCG} = 1 - \left[ \frac{V(x,y,z) + \Delta V(x,y,z) + \frac{v^2}{2}}{c^2} \right] \quad (9)$$

Na equação 9,  $V$  e  $\Delta V$  são os potenciais gravitacional da Terra e de marés sobre o relógio em  $(x, y, z)$  e  $v$  é a velocidade do relógio.

Entretanto, o TCG não é uma escala de tempo observável na prática, e deve ser realizado através do TT. A relação entre as escalas TCG e TT é dada por (KOUBA, 2002; CARARO et al., 2010):

$$\frac{dTT}{dTCG} = 1 - \frac{W_0}{c^2} = 6,2636856000 \times 10^7 \quad (10)$$

Em que  $W_0$  é o potencial gravitacional sobre o geóide em rotação, ao nível médio dos mares. De acordo com a equação (11), o TT difere do TCG por uma taxa constante.

Pode-se ainda escrever  $W_0$  em termos de um raio de referência  $R_0$  (KOUBA, 2002; CARARO et al., 2010):

$$R_0 = \frac{GM_{\oplus}}{W_0} = 6,363672560 \times 10^6 m \quad (11)$$

Dessa forma, ao relacionar as equações (9) e (10), pode-se transformar o tempo próprio  $T$  de um relógio com movimento exterior à Terra para uma escala de tempo observável:

$$\frac{dT}{dT} = 1 - \left[ \frac{V(x,y,z) - W_0 + \Delta V(x,y,z) + \frac{v^2}{2}}{c^2} \right] \quad (12)$$

### TRANSFORMAÇÃO RELATIVÍSTICA CONVENCIONAL

Assumindo-se que a escala de tempo GPS,  $t$ , é equivalente ao TT, e denotando por  $T_{sat}$  o tempo marcado por um relógio a bordo de um satélite GPS, com posição  $(x, y, z)$ , pode-se reescrever a equação (12) como:

$$\frac{dT_{sat}}{dt} = 1 - \left[ \frac{V(x,y,z) - W_0 + \Delta V(x,y,z) + \frac{v^2}{2}}{c^2} \right] \quad (13)$$

Convenciona-se que em  $t = 0$ ,  $t = T_{sat} = 0$ , isto é, as escalas de tempo estão alinhadas. Para descobrir como  $T_{sat}$  evoluiu no tempo, em relação a  $t$ , basta integrar ambos os lados da equação (13):

$$\int dT_{sat} = \int dt - \int \left[ \frac{V(x,y,z) - W_0 + \Delta V(x,y,z) + \frac{v^2}{2}}{c^2} \right] dt$$

$$T_{sat}(t) = t - \frac{1}{c^2} \int \left[ V(x,y,z) - W_0 + \Delta V(x,y,z) + \frac{v^2}{2} \right] dt \quad (14)$$

Para resolver (14), algumas simplificações serão consideradas, segundo o documento ICD-GPS-200C (1993):

- Negligencia-se o potencial de marés ( $\Delta V = 0$ );
- Considera-se o potencial Newtoniano  $V = \mu / r$ ;
- Utilizam-se as equações da dinâmica orbital kepleriana, dadas por (KOUBA, 2002; CARARO et al., 2010; MONTENBRUCK et TEUNISSEN, 2017, cap. 3, p. 61):

$$v = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (15)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad (16)$$

$$E(t) = E(0) + nt + \text{sen}(E)e \quad (17)$$

onde  $\mu = GM_{\oplus} = 3,986004415 \times 10^{14} m^3/s^2$ ,  $a$  é o semieixo maior da órbita,  $r$  o raio da órbita,  $e$  a excentricidade e  $E$  a chamada anomalia excêntrica.

Fazendo  $\Delta V = 0$  e utilizando (11) e (15), pode-se escrever (14) como:

$$T_{sat}(t) = t - \frac{1}{c^2} \int \left[ \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{R_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \right) \right] dt = t - \frac{1}{c^2} \int \left[ \frac{2\mu}{r} - \mu \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2a} \right) \right] dt$$

$$T_{sat}(t) = t + \frac{\mu}{c^2} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2a} \right) t - \frac{1}{c^2} \int \frac{2\mu}{r} dt \quad (18)$$

Para resolver a integral, reescreveremos a equação (16) multiplicando ambos os lados por  $\sqrt{\mu a}$ , o que resulta:

$$\sqrt{\mu a} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\mu}{r} \quad (19)$$

Passando os limites de integração (0 a  $t$ ) e utilizando (19), pode-se reescrever (18) como:

$$T_{sat}(t) = t + \frac{\mu}{c^2} \left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2a} \right) t - \frac{1}{c^2} \int_0^t 2\sqrt{\mu a} \frac{\partial E}{\partial t} dt \quad (20)$$

Anulando-se a derivada parcial com a integral, computando-se os limites de integração e aplicando a equação (17), a equação (20) se torna:

$$T_{sat}(t) = t + \frac{\mu}{c^2} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a} \right) t - \frac{2e\sqrt{\mu a}}{c^2} \text{sen}(E) \quad (21)$$

Isolando-se o primeiro termo da (21):

$$t = T_{sat}(t) - \frac{\mu}{c^2} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a} \right) t + \frac{2e\sqrt{\mu a}}{c^2} \text{sen}(E) \quad (22)$$

A equação (22) pode ser reescrita como:

$$t = T_{sat}(t) - \Delta t_{rel,conv} \quad (23)$$

onde o termo:

$$\Delta t_{rel,conv} = \frac{\mu}{c^2} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a} \right) t - \frac{2e\sqrt{\mu a}}{c^2} \text{sen}(E) \quad (24)$$

é a transformação relativística convencional para o tempo GPS, que engloba ambos os efeitos relativísticos da dilatação do tempo, devido a velocidade dos satélites, e do desvio de frequência gravitacional, graças a diferença de potencial entre os relógios.

Por fim, o termo  $(2e\sqrt{\mu a})\text{sen}(E)/c^2$  poderá ser reescrito como (KOUBA, 2002; MONTENBRUCK et TEUNISSEN, 2017, cap. 5, p. 152):

$$\frac{2e\sqrt{\mu a}}{c^2} \text{sen}(E) = \frac{2}{c^2} (\mathbf{v}_l \times \mathbf{r}) \quad (25)$$

onde  $v_l$  é a velocidade linear do relógio na superfície da Terra e  $r$  a posição do relógio a bordo do satélite.

### EFEITOS RELATIVÍSTICOS SOBRE OS SISTEMAS GNSS

Devido às altas velocidades dos satélites GNSS (aproximadamente 4000 m/s) (KULBIEJ, 2016), assim como as grandes altitudes em que se encontram (diferentes campos gravitacionais), surgem efeitos relativísticos não desprezíveis sobre os relógios atômicos a bordo. De fato, a diferença de potencial gravitacional e a dilatação do tempo causada pela velocidade dos satélites, provocam desvios de frequência e consequentes diferenças nos tempos marcados de relógios sobre o geóide e em órbita.

Segundo Ashby (2003) e Cararo et al. (2010), enquanto a dilatação temporal causa um atraso nos relógios sobre o geóide e um consequente desvio de frequência para o vermelho (menor frequência), a diferença de potencial ocasiona o efeito contrário, adiantando esses relógios e causando um desvio de frequência para o azul. Para órbitas baixas, como a do Ônibus Espacial (*Space Shuttle*), predomina o efeito da dilatação temporal. Para  $a \cong 9545 \text{ km}$ , cerca de 3000 km acima da superfície terrestre, os efeitos se cancelam. Já para satélites como o GPS, que se encontram em uma altitude ainda maior, predomina o desvio para o azul. De forma a calcular os efeitos relativísticos sobre os sistemas GNSS, utilizar-se-á os dados da Tabela 1.

Tabela 1 - Dados dos satélites dos sistemas GNSS

| Sistemas | Nome/número do satélite | $a$ (km) | $h$ (km) | Velocidade (m/s) | Período Orbital (s) |
|----------|-------------------------|----------|----------|------------------|---------------------|
| GPS      | GPS IIF                 | 26559,4  | 20183,5  | 3873,9           | 43077,6             |
| GLONASS  | 13                      | 25508,0  | 19132,0  | 3669,6           | 40543,9             |
| Galileo  | Galileo – 101           | 29599,8  | 23014,5  | 3952,9           | 50688,0             |
| BeiDou   | COMPASS – M3            | 27910,0  | 21527,5  | 3779,3           | 46403,4             |

Fonte: Adaptado de Kulbiej (2016) e Montenbruck et Teunissen (2017)

Considerando o sistema de referência do satélite GPS, e tomando um intervalo de tempo próprio  $\Delta t' = 43077,6 \text{ s}$ , com velocidade  $v = 3873,9 \text{ m/s}$ ,

pode-se utilizar a equação (6) para descobrir o tempo medido em um referencial na superfície da Terra:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{43077,6}{\sqrt{1 - \frac{3873,9^2}{299792458^2}}} = 43077,6000036 \text{ s} \quad (26)$$

Dessa forma, a diferença entre as medições de tempo é:

$$\Delta t' - \Delta t = (43077,6 \text{ s}) - (43077,6000036 \text{ s}) = -3,6 \mu\text{s} \quad (27)$$

Onde o sinal negativo indica o efeito de atraso nos relógios, e  $\mu = 10^{-6}$ . Para encontrar o atraso em um dia (86400 s), deve-se fazer:

$$-3,6 \left( \frac{86400}{43077,6} \right) = -7,22 \mu\text{s} \quad (28)$$

Dessa forma, a diferença entre as medições acumularia em uma taxa de  $-7,22 \mu\text{s}$  por dia, ou seja, por conta da alta velocidade dos satélites, os relógios na superfície da Terra pareceriam estar atrasados (dilatação temporal) cerca de  $-7,22 \mu\text{s}$  a cada dia.

A velocidade linear de rotação de Terra é de aproximadamente  $v_l = 465 \text{ m/s}$ . Utilizando as equações (11) e (25), os dados da Tabela 1 e tomando o período de 1 dia ( $t = 86.400 \text{ s}$ ), pode-se calcular a somatória dos efeitos relativísticos sobre a medição de tempo GPS:

$$\Delta t_{rel,conv} = \frac{(3,986004418 \times 10^{14})}{(299.792.458)^2} \left( \frac{1}{(6.363.672,500)} - \frac{3}{2(26.559.400)} \right) (86.400) - \frac{(465)(20.183.500)}{(299.792.458)^2} = 38,47 \mu\text{s} \quad (29)$$

De fato, se (29) é a somatória dos efeitos da dilatação do tempo (relatividade restrita) e da diferença de potencial (relatividade geral), então  $38,47 \mu\text{s} + 7,22 \mu\text{s} = 45,69 \mu\text{s}$  é a contribuição da relatividade geral para as medidas de tempo do GPS.

Substituindo (29) em (23) e considerando  $T_{sat} = 86.400 \text{ s}$ , temos:  $t = 86.400,000000 \text{ s} - 0,00003847 \text{ s} = 86.399,999953 \text{ s}$ . Isso mostra que a somatória dos efeitos relativísticos (29) produz um adiantamento dos relógios em Terra ( $t$ ) com relação aos em órbita ( $T_{sat}$ ).

Cálculos semelhantes aos realizados de (26) à (29) podem ser feitos sobre os outros sistemas GNSS. De fato, utilizando os valores da Tabela 1 em (6), pode-se encontrar o atraso nos relógios devido à dilatação temporal. Ainda, aplicando os dados em (24), encontra-se a somatória dos efeitos relativísticos sobre cada sistema GNSS. Por fim, pode-se calcular o efeito de adiantamento nos relógios devido ao desvio de frequência gravitacional por (24) – (6). Os resultados são apresentados na Tabela 2.

A transformação relativística convencional apresenta erros devido a aproximações e simplificações em sua dedução. Uma transformação mais precisa, que envolve a influência do potencial perturbador gerado pelo achatamento terrestre, é mostrada em (KOUBA, 2004; CARARO et al., 2010).

Tabela 2 – Contribuições relativísticas aos sistemas GNSS

| Sistemas | Dilatação temporal ( $\mu s/dia$ ) | Desvio de frequência gravitacional ( $\mu s/dia$ ) | Somatória relativística ( $\mu s/dia$ ) |
|----------|------------------------------------|--|---|
| GPS      | -7,22                              | 45,69  | 38,47                                   |
| GLONASS  | -6,48                              | 44,06  | 37,58                                   |
| Galileo  | -7,50                              | 48,18  | 40,68                                   |
| BeiDou   | -6,87                              | 46,38  | 39,51                                   |

Fonte: Autoria própria (2023).

Os valores obtidos na Tabela 2 apresentam excelente concordância com a literatura (KULBIEJ, 2016), mas uma observação se faz necessária. A Tabela 2 foi, em sua maioria, construída com as informações dos satélites mostradas em (KULBIEJ, 2016), entretanto, o valor do semieixo maior ( $a$ ) para o sistema BeiDou foi extraído de (MONTENBRUCK et TEUNISSEN, 2017, p. 1234). Isso se fez necessário pois, utilizando-se a equação (24) para  $a = 21528km$  (KULBIEJ, 2016), o desvio de frequência gravitacional e a somatória relativística ( $40,49\mu s$  e  $33,62\mu s$ , respectivamente) se mostraram muito abaixo da literatura. Em contrapartida, com o valor de  $a$  extraído de MONTENBRUCK et TEUNISSEN (2017, p. 1234), os resultados obtidos foram satisfatórios.

Uma correção para os efeitos relativísticos é feita sobre a frequência dos relógios. Na equação (24), o termo  $\mu/c^2(1/R_0 - 3/2a)$  é constante, ao passo que o termo  $2e\sqrt{\mu a} \sin(E)/c^2$  é periódico, e depende das características instantâneas da órbita do satélite. Sobre a parte constante é realizado um desvio de frequência nos relógios em órbita, buscando compensar os efeitos relativísticos sobre eles. Esse desvio é realizado antes do lançamento do satélite, e é dado por (CARARO et al., 2010):

$$f = f_0 \left[ 1 - \frac{\mu}{c^2} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{3}{2a} \right) \right] \quad (30)$$

onde  $f$  é a frequência corrigida e  $f_0 = 10,23MHz$  é a frequência nominal dos relógios. Pela correção da parte constante ser efetuada antes de se conhecer a órbita final do satélite, toma-se o valor nominal  $a = 26.561.400 m$  (CARARO et al., 2010). Calculando-se:

$$f = (10,23) \left[ 1 - \frac{3,986004418 \times 10^{14}}{299.792.458^2} \left( \frac{1}{(6.363.672.500)} - \frac{3}{2(26.561.400)} \right) \right] = (10,23)(1 - 4,4647 \times 10^{-10}) = 10,22999999543MHz \quad (31)$$

Logo, a frequência de um relógio de um satélite GNSS que entrará em órbita deve ser reajustada para  $f = 10,22999999543MHz$ , de forma que, após iniciar o movimento orbital, ela seja reajustada para a frequência nominal dos satélites na Terra, ou seja,  $f_0 = 10,23MHz$ .

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sistemas de geolocalização, como os GNSS, são imprescindíveis no mundo atual, e um grande esforço é necessário para mantê-los operando de forma eficiente e precisa. Nesse sentido, efeitos relativísticos se mostram uma grande preocupação em relação à transmissão de sinais de tempo.

De fato, a influência relativística opera diretamente na marcha (*rate*) dos relógios atômicos, e efeitos como a dilatação temporal e o desvio de frequência gravitacional não podem ser desprezados.

O NAVSTAR-GPS, um dos sistemas que integram o GNSS, opera na precisão de nanosegundos. Ao aplicar a equação (24) sobre as medições de tempo dos relógios dos satélites NAVSTAR-GPS, obteve-se uma diferença de  $38 \mu s/dia$ , resultando num erro de  $38.000 ns/dia$ , o que afetaria drasticamente a precisão do sistema. Para outros sistemas GNSS, o erro varia de  $37.000$  a  $41.000 ns/dia$  (Tabela 3).

De modo a minimizar os efeitos físicos da relatividade, correções relativísticas se mostram fundamentais para os sistemas GNSS, sendo uma das mais importantes o desvio de frequência “pré-fabricado” (31).

# Investigations on the effects of relativity on the time measurements of GNSS clocks

## ABSTRACT

The theories of special and general relativity have become the theoretical basis for many technologies in the present day. In this regard, one of the most impactful technologies in recent times, the Global Navigation Satellite Systems (GNSS), is greatly influenced by relativistic effects. Due to the high velocities of GNSS satellites, as well as the large altitudes at which they are located (with different gravitational fields), significant relativistic effects occur on the atomic clocks on board. This work provides a theoretical review of the relativistic effects and the impact on GNSS systems. In this sense, it presented the theories of special and general relativity. Also, it derived the conventional relativistic transformation that calculates the sum of relativistic effects on time measurements in GNSS. By applying the transformation, a time difference of 38,47  $\mu\text{s}$  was obtained between measurements in GPS (Global Positioning System) clocks. To other GNSS systems (GLONASS, Galileo and Beidou), the results ranged from 37 to 41  $\mu\text{s}$ , which showed good agreement with the literature. Finally, the frequency deviation performed on GPS satellite clocks before entering orbit was presented, highlighting the importance of relativistic corrections for GNSS systems.

**KEYWORDS:** Relativity. Atomic Clocks. GNSS.

## REFERÊNCIAS

ASHBY, N. Relativity in the Global Positioning System. **Living Reviews in Relativity**, vol 6, n. 1, 2003.

BEIDOU. BeiDou Navigation Satellite System. Disponível em: <http://en.beidou.gov.cn/>. Acesso em 30/01/2023.

CARARO, A.C. et al. Correções Relativísticas Sobre as Medidas de Tempo GPS. **Bol. Ciênc. Geod.**, sec. Artigos, Curitiba, v. 16, n. 1, p.156-176, jan-mar, 2010.

EINSTEIN, A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. **Annalen der Physik**. **17**: 891, 1905.

EINSTEIN, A. Erklärung der perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen relativitätstheorie. **Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften**, Berlin, v. 2, pp. 831-839. 18/11/1915.

GALILEO. European Global Navigation Satellite System. Disponível em: <https://galileognss.eu/>. Acesso em 30/01/2023.

GLONASS. About GLONASS. Disponível em: [https://glonass-iac.ru/en/about\\_glonass/](https://glonass-iac.ru/en/about_glonass/). Acesso em 20/01/2023.

GPS. The Global Positioning System. Disponível em: <https://www.gps.gov/>. Acesso em 30/01/2023.

IAU. **IAU transactions**, vol 11B. Kluwer, Dordecht, 1991.

ICD-GPS-200C. **Interface control document**. NAVSTAR GPS space segment. Navigation user interface, AIR Inc. Research Corporation, Fountain Valley, California, 10 out. 1993.

JEREZ, G. O.; ALVES, D. B. M. GLONASS: Revisão teórica e estado da arte. **Revista Brasileira de Geomática**, v. 6, n. 2, p. 155–173, 21 jun. 2018. DOI: <http://dx.doi.org/10.3895/rbgeo.v6n2.7368>.

KOUBA, J. Relativistic Time Transformations in GPS. **GPS Solutions**, vol 5, n. 4, pp. 1-9, 2002.

KOUBA, J. Improved relativistic time transformations in GPS. **GPS Solutions**, vol 8, pp. 170-180, 2004.

KULBIEJ, E. Relevance of the relativistic effects in satellite navigation. **Scientific Journals of the Maritime University of Szczecin**, v. nr 47 (119), 2016.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo GNSS**. 2. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2008.

MONTENBRUCK, O.; TEUNISSEN, P. J. G. **Springer Handbook of Global Navigation Satellite Systems**. Springer, 2017.

NUSSENZVEIG, M. **Curso de Física Básica: Ótica, Relatividade e Física Quântica**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2014. v. 4.

PIRES, A. S. T. **Evolução das Ideias da Física**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

SILVA, C. M. DA et al. Galileo: a consolidação do sistema de posicionamento europeu. **Revista Brasileira de Geomática**, v. 8, n. 4, p. 238–255, 28 out. 2020. DOI: <http://dx.doi.org/10.3895/rbgeo.v8n4.11484>.

UBER. Newsroom: Informações da Empresa. Disponível em: <https://www.uber.com/pt-BR/newsroom/>. Acesso em 21/12/2022.

**Recebido:** 27 nov. 2023

**Aprovado:** 25 set. 2024

**DOI:** 10.3895/rbgeo.v12n2.17852

**Como citar:** SUNIGA, G. W. R.; GOUVEIA, T. A. F.; MONICO, J. F. G.. Investigações sobre os efeitos da relatividade nas medidas de tempo dos relógios dos satélites GNSS. **R. bras. Geom.**, Curitiba, v. 12, n. 2, p. 160-178, jul./dez. 2024. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbgeo>>. Acesso em: XXX.

**Correspondência:**

Gabriel Willian Reis Suniga

Rua Roberto Simonsen, 305, CEP 19060-900, Presidente Prudente, São Paulo, Brasil.

**Direito autoral:** Este artigo está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.

