Revista Brasileira de Geomática
ISSN: 2317-4285

https://periodicos.utfpr.edu.br/rbgeo

Estudo das quantidades de soluções para os casos V e VI dos triângulos esféricos oblíquos

Carlo Henrique Oliveira da Rocha
carlos.rocha@eng.uerj.br
orcid.org/0000-0001-7121-6536
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

RESUMO

Os entes humanos ao se tornarem sedentários começaram a perceber a necessidade de se conhecer a própria localização. Ao estudarem as estrelas, perceberam um referencial seguro para tal localização e passaram a utilizá-las para o cálculo da posição, surgindo assim a Astronomia de Posição. Para o cálculo da posição, por sua vez, foi necessário um modelo matemático, sendo natural pensar-se na Esfera. Natural ainda foi estender a Trigonometria Plana à Esfera, surgindo assim a Trigonometria Esférica. O estudo da Trigonometria Esférica se faz necessário para a formação dos engenheiros cartógrafos e agrimensores, pois o conhecimento das ferramentas para a resolução do Triângulo Esférico vai ser fundamental para a compreensão dos mecanismos de posicionamento quer seja pela Astronomia de Posição quer seja pela Geodésia. De modo a contribuir com o ensino da Trigonometria Esférica, a revisão conceitual apresentada neste trabalho se propõe a estudar a quantidade de soluções para os triângulos esféricos oblíquos do Caso V e do Caso VI, respectivamente, quando são conhecidos dois lados e o ângulo oposto a um dos lados e quando são conhecidos dois ângulos e o lado oposto a um dos ângulos. Os triângulos pertencentes a estes casos podem apresentar nenhuma, uma solução, duas ou infinitas soluções. O conhecimento sobre determinado assunto somente pode ser de caráter científico quando há o conhecimento sobre as etapas dedutivas relacionadas àquele assunto, por isso apresenta-se o presente trabalho para que o estudante possa conhecer cientificamente partes da Trigonometria Esférica.

PALAVRAS-CHAVE: Trigonometria Esférica. Triângulo Esférico Oblíquo. Dedução da quantidade de soluções.

INTRODUÇÃO

Os entes humanos, principalmente, depois de se tornarem sedentários começaram a perceber a necessidade de se conhecer a própria localização, seja por motivos científicos, seja por motivos práticos, seja por motivos religiosos.

Perceberam nas estrelas e em seu padrão de movimento, referencial seguro para o conhecimento da própria localização e passaram a utilizá-las para o cálculo da posição, surgindo assim a Astronomia de Posição. O cálculo da posição demanda modelo matemático, sendo natural pensar-se na Esfera como modelo para o Universo. Por ser a figura fechada mais simples, o Triângulo também é uma escolha natural, deste modo surgia a Trigonometria Esférica.

O estudo da Trigonometria Esférica está na base da formação dos engenheiros cartógrafos e agrimensores, pois o conhecimento das ferramentas para a resolução do Triângulo Esférico, causa final do estudo da Trigonometria Esférica, vai ser utilizado para a compreensão dos mecanismos de posicionamento quer seja pela Astronomia de Posição quer seja pela Geodésia.

Resolver um triângulo esférico é obter os valores dos três ângulos e dos três lados que o compõem. Para isso pelo menos três elementos devem ser conhecidos *a priori*, podendo os demais assim serem determinados mediante equações. De acordo com os elementos conhecidos, há diversas possibilidades para a configuração do triângulo esférico oblíquo e tais possibilidades foram divididas em seis casos, como recurso didático, e numeradas em algarismos romanos de I a VI, esta divisão pode ser encontrada em Coutinho (2015), Todhunter e Leathem (1886), Casey (1889), Murray (1908) e Ayres Jr (1968)

Quando são conhecidos dois lados e o ângulo oposto a um dos lados conhecidos, trata-se do Caso V, por seu turno quando são conhecidos dois ângulos e o lado oposto a um dos ângulos conhecidos, trata-se do Caso VI. Acontece que para estes dois casos, conforme será visto ao longo deste trabalho, pode haver nenhuma solução, uma solução, duas soluções ou infinitas soluções. Deste modo, a presente revisão tem por objetivo fazer com que o leitor conheça de maneira científica as quantidades de soluções para os Casos V e VI, de modo a contribuir com o ensino da Trigonometria Esférica.

Para a realização de tal intento, há duas atividades principais: apresentar os conceitos necessários para entender as deduções apresentadas; analisar a quantidade de soluções.

A primeira atividade está dividida nas seções:

1. Codivisão dos Triângulos Esféricos.
2. Triângulos Polares.

A segunda parte está dividida nas seções:

1. Resolução dos Triângulos Esféricos.

2. Resolução dos Triângulos Esféricos Oblíquos.

A seção Resolução dos Triângulos Esféricos Oblíquos, por sua vez, está dividida em:

1. Condições para a Solução.

2. Ângulo conhecido A < 90º.

3. Ângulo conhecido A = 90º.

4. Ângulo conhecido A > 90º.

5. Resumo das Soluções.

6. Caso VI.

É importante frisar que não é objetivo deste artigo deduzir as equações que resolvem um triângulo esférico, mas demonstrar a quantidade de soluções. Para as equações sugere-se Coutinho (2015).

Outra informação necessária é que todos os triângulos esféricos tratados neste trabalho são chamados Eulerianos, aqueles em que os lados e os ângulos são menores que 180º (COUTINHO, 2015).

CODIVISÃO DOS TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

A divisão lógica é uma ferramenta utilizada pelas ciências para separar um gênero (todo) em suas diversas espécies (partes) (JOSEPH, 2002). Quando um mesmo gênero pode ser dividido por diversos critérios, também chamado de base da divisão, há uma Codivisão (JOSEPH, 2002).

A seguir serão apresentadas as diversas divisões do gênero Triângulo Esférico, segundo diferentes bases.

Antes de se partir para a classificação dos triângulos esféricos é preciso definir triângulo. Segundo Raap (1991), geodésica é a curva que fornece a menor distância em uma determinada superfície entre dois pontos, no caso de a superfície ser um plano, a geodésica é um segmento de reta e se a superfície for uma esfera, a geodésica será um segmento de círculo máximo. Utilizando tal definição de geodésica, pode-se definir triângulo, segundo Rocha (2017), como uma figura geométrica fechada delimitada por três segmentos de geodésicas. Assim, o triângulo esférico é formado por três segmentos de círculos máximos.

Uma primeira divisão lógica dos Triângulos Esféricos está baseada no valor dos ângulos internos, sendo eles retos ou oblíquos. Deste modo, segundo esta base, pode-se dividir os Triângulos Esféricos em: **Triângulos Esféricos Retângulos**, nesta espécie, o Triângulo Esférico possui pelo menos um ângulo interno reto; **Triângulos Esféricos Oblíquos**, nesta espécie, o Triângulo Esférico não possui nenhum dos ângulos internos com valor igual a um reto. Os Triângulos Esféricos Retângulos podem ainda ser divididos em Tri-Retângulo, Bi-retângulo e Retângulo, conforme possuam três, dois ou um ângulo reto.

Outra divisão possível toma por base o valor numérico dos lados do Triângulo Esférico. Neste caso, pode-se dividir os Triângulos Esféricos em **Retiláteros**, caso possuam algum lado cujo valor é 90º, e em **Não-Retiláteros**, caso não possuam nenhum lado com valor de 90º. Um Triângulo Esférico Retilátero pode ter um lado reto, dois lados retos ou três lados retos; este é chamado Tri-retilátero ou Tri-quadrantal, esse Bi-retilátero ou Bi-quadrantal e aquele Retilátero ou Quadrantal.

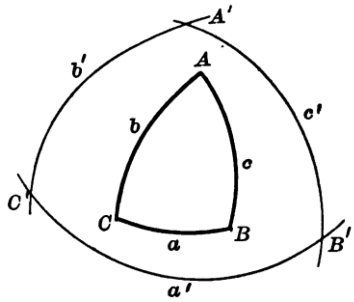
Outra divisão possível toma por base a relação entre os lados do Triângulo Esférico entre si, neste caso, os três lados podem possuir o mesmo valor, dois lados possuírem o mesmo valor ou nenhum lado possuir o mesmo valor. No primeiro caso, temos os **Triângulos Esféricos Equiláteros**, no segundo caso, **Isósceles** e no terceiro, **Escaleno**.

TRIÂNGULOS POLARES

Outro conceito importante a ser lembrado é o de Triângulo Polar.

Sejam A, B e C os vértices de um triângulo esférico, construam-se três círculos máximos tendo tais vértices como polos. Designem-se por A’ a interseção dos círculos máximos tendo B e C como polos e situado no mesmo hemisfério ou lado de BC; por B’ a interseção dos círculos máximos tendo C e A como polos e situado no mesmo hemisfério ou lado de CA; e por C’ a interseção dos círculos máximos tendo A e B como polos e situado no mesmo hemisfério ou lado de AB. O Triângulo Esférico A’B’C’ é chamado Triângulo Polar ou Suplementar de ABC. Os lados deste triângulo são designados pelas letras a’, b’ e c’. Vide Figura 1.

Figura 1 – Triângulo Polar



Fonte: MURRAY (1908).

São dois os teoremas fundamentais relativos aos Triângulos Polares, os quais são apresentados a seguir sem demonstração:

Se A’B’C’ é o triângulo polar de ABC, então ABC é o triângulo polar de A’B’C’;

Em dois triângulos polares, cada ângulo de um dos triângulos é igual ao suplemento do lado correspondente no outro triângulo, assim:

$$A = 180^o - a' \tag{1}$$

$$B = 180^o - b' \tag{2}$$

$$C = 180^o - c' \tag{3}$$

$$A' = 180^o - a \tag{4}$$

$$B' = 180^o - b \tag{5}$$

$$C' = 180^o - c \tag{6}$$

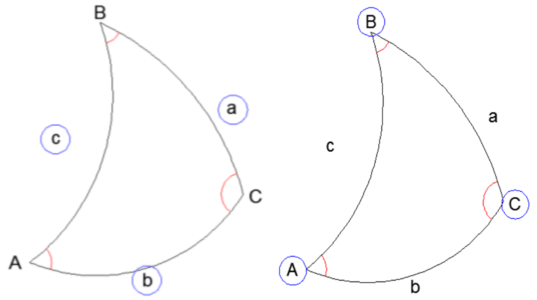
RESOLUÇÃO DOS TRIÂNGULOS ESFÉRICOS OBLÍQUOS

Pode-se dizer que um triângulo esférico possui seis elementos, a saber, três lados e três ângulos. Segundo Coutinho (2015), um triângulo esférico é determinado quando são conhecidos três de seus elementos principais, os outros três podem ser calculados.

São seis os casos a serem considerados quando da resolução dos Triângulos Esféricos Oblíquos (COUTINHO, 2015):

O primeiro caso se dá quando são conhecidos os três lados do triângulo esférico, conforme pode ser visto na Figura 2a. O segundo caso se dá quando são conhecidos os três ângulos do triângulo esférico, conforme pode ser visto na Figura 2b.

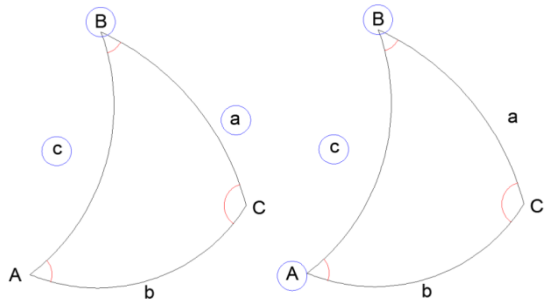
Figura 2 – Exemplo de Triângulos Esféricos do Caso I e do Caso II. Os elementos conhecidos estão marcados com o círculo azul.



Fonte: Autoria própria (2020).

O terceiro caso se dá quando são conhecidos dois lados e o ângulo formado por estes lados, conforme pode ser visto na Figura 3a. O quarto caso se dá quando são conhecidos dois ângulos e o lado compreendido entre eles, conforme pode ser visto na Figura 3b.

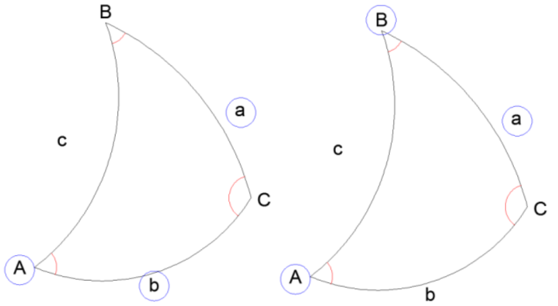
Figura 3 – Exemplo de Triângulos Esféricos do Caso III e do Caso IV. Os elementos conhecidos estão marcados com o círculo azul.



Fonte: Autoria própria (2020).

O quinto caso se dá quando são conhecidos dois lados e o ângulo oposto a um dos lados, conforme pode ser visto na Figura 4a. O sexto caso se dá quando são conhecidos dois ângulos e o lado oposto a um dos ângulos, conforme pode ser visto na Figura 4b. Estes serão os casos tratados neste artigo.

Figura 4 – Exemplo de Triângulos Esféricos do Caso V e VI. Os elementos conhecidos estão marcados com o círculo azul.



Fonte: Autoria própria (2020).

Recomenda-se que as equações que resolvem os casos sejam aquelas que utilizem somente os elementos conhecidos, sem utilizar algum elemento calculado para obter outro elemento desconhecido, contudo tal solução para os casos V e VI depende de artifícios algébricos. Também deve ser dito que as equações que resolvem os triângulos do Caso I podem ser utilizadas para resolver os triângulos do Caso II, desde que seja extraído o triângulo polar destes, pois o triângulo polar do Caso II é um triângulo do Caso I e vice-versa, o mesmo pode ser dito dos triângulos do Caso III e do Caso IV e dos triângulos do Caso V e do Caso VI.

Ademais, os triângulos esféricos dos casos V e VI possuem uma peculiaridade, a saber, de poderem ter nenhuma solução, uma solução, duas soluções ou infinitas soluções. Deste modo, nas próximas seções será feito o estudo sobre a quantidade de soluções dos triângulos esféricos pertencentes a estes dois casos.

RESOLUÇÃO DOS TRIÂNGULOS ESFÉRICOS OBLÍQUOS DOS CASOS V E VI

Suponham-se conhecidos os lados a e b e o ângulo A, conforme a Figura 4a, o cálculo do ângulo B, oposto ao lado conhecido b, dar-se-á pela Analogia dos Senos, conforme a Equação 7.

$$\boldsymbol{sen\ B = \frac{sen\ b\ sen\ A}{sen\ a}} \tag{7}$$

Tendo em vista a restrição de serem tratados somente Triângulos Eulerianos, o seno de B tem que ser positivo, logo o ângulo B pode ser do primeiro ou do segundo quadrante, por isso se diz que a solução pode ser ambígua.

Assim, o presente estudo se propõe a deduzir, a partir das diversas possibilidades de valores para os lados e para os ângulos de um triângulo esférico oblíquo do Caso V e do Caso VI, a quantidade de soluções. Primeiramente, falar-se-á do Caso V e em seguida do Caso VI. A discussão a que se propõe este artigo baseia-se em Todhunter e Leathem (1886).

Usar-se-á a mesma definição de lados e ângulos da Figura 4, contudo o estudo é genérico. Por exemplo, caso fossem conhecidos os lados b e c e o ângulo B, nas expressões abaixo, as letras a, b e A deveriam ser substituídas por b, c e B, respectivamente.

CONDIÇÕES PARA A SOLUÇÃO

Retomando a Equação 7, a primeira condição para haver solução é que:

$$\boldsymbol{sen\,b\,sen\,A \leq sen\,a}, \tag{8}$$

pois, do contrário sen B > 1, o que é impossível.

Passada a primeira condição, a Equação 7 fornecerá duas soluções para o ângulo B, a primeira será chamada de β e a segunda de β', de modo que $\beta' = 180^o - \beta$, sendo $\beta < \beta'$.

A segunda condição será estabelecida a partir das Equações 9 e 10, tomadas das Analogias de Neper, a saber,

$$\boldsymbol{tan\frac{1}{2}(A-B) = cotan\frac{1}{2}C\frac{sen\frac{1}{2}(a-b)}{sen\frac{1}{2}(a+b)}} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{tan\frac{1}{2}(a-b) = tan\frac{1}{2}c\frac{sen\frac{1}{2}(A-B)}{sen\frac{1}{2}(A+B)}} \tag{10}$$

Rearranjando as Equações 9 e 10, de modo a explicitá-las para o ângulo C e o lado c.

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\frac{1}{2}(A-B)\frac{sen\frac{1}{2}(a+b)}{sen\frac{1}{2}(a-b)}} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{tan\frac{1}{2}c = tan\frac{1}{2}(a-b)\frac{sen\frac{1}{2}(A+B)}{sen\frac{1}{2}(A-B)}} \tag{12}$$

Como c < 180º e C < 180º, a metade de cada um será $\frac{1}{2}c < 90^o$ e $\frac{1}{2}C < 90^o$, deste modo, $\cot\text{an}\frac{1}{2}C > 0$ e $\tan\frac{1}{2}c > 0$, que formam a segunda condição para que haja solução.

Ora, na Equação 12, o termo $\frac{1}{2}(A+B)$ será ou do primeiro ou do segundo quadrante, pois (A + B) < 360º e $\frac{1}{2}(A+B) < 180^o$, portanto, o $\text{sen}\frac{1}{2}(A+B) > 0$. A mesma conclusão vale para o termo $\text{sen}\frac{1}{2}(a+b)$, da Equação 11.

Deste modo, para que seja cumprida a segunda condição é necessário e suficiente que (A – B) e (a – b) tenham o mesmo sinal, pois deste modo $\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen}\frac{1}{2}(a-b)}$ e $\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\frac{1}{2}(A-B)}$ serão sempre positivos e a segunda condição fica satisfeita.

Portanto, é preciso verificar se β, uma das soluções da Equação 7, cumpre a condição (A – β) ter o mesmo sinal de (a - b) e ou se β', segunda solução da Equação 7, cumpre a condição de (A – β') ter o mesmo sinal de (a – b). Podendo haver nenhuma solução, uma solução, duas soluções ou infinitas soluções, como será visto adiante.

Em vistas de proceder ao estudo da quantidade de soluções, o problema será dividido em três etapas, de acordo com o valor do ângulo conhecido: A < 90º; A = 90º e; A > 90º.

ÂNGULO CONHECIDO A < 90º

Nesta seção, o problema será dividido de acordo com o valor para o lado b, ou seja, primeiramente para b < 90º, em seguida para b = 90º e depois b > 90º.

b < 90º e a < b

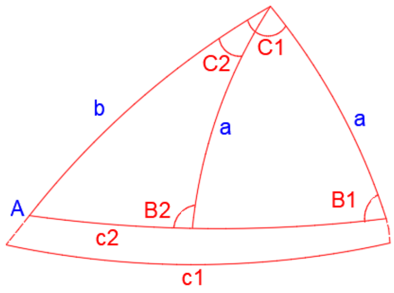
Deste modo, sen a < sen b, (sen b/sen a) > 1 e sen B > sen A, B > A, logo β > A e β’ > A.

Assim, (A – β) < 0 e (A – β’) < 0, como (a - b) < 0, tanto β quanto β’ podem ser solução. Tem-se, portanto, duas soluções.

Para ilustrar esta situação, apresenta-se a seguir um exemplo adaptado de Ayres Jr (1968). Os valores conhecidos são a = 52º19’48”, A = 47º25’06” e b = 81º42’18”.

Utilizando a Equação 7, o valor do ângulo B poderia ser B1 = 67º00’00” ou B2 = 113º00’00”, ambos válidos. Deste modo, dois triângulos satisfazem os dados apresentados: o triângulo a, A, b, B1, c1 e C1 e; o triângulo a, A, b, B2, c2 e C2. Ver Figura 5.

Figura 5 – Exemplo de triângulo esférico com duas soluções. Os elementos em azul são os conhecidos e os em vermelho são os que devem ser calculados.



Fonte: Autoria própria (2020).

b < 90º e a = b

Neste caso, sen a = sen b, (sen b/sen a) = 1 e sen B = sen A, β = A e β’ = 180º - A.

Para que seja verificada a solução, deve-se utilizar a Equação 13, do grupo de equações da Anologia de Neper aos ângulos.

$$\boldsymbol{tan\frac{1}{2}(A+B) = \frac{cos\frac{1}{2}(a-b)}{cos\frac{1}{2}(a+b)}cotan\frac{1}{2}C,} \tag{13}$$

Explicitando-a para o ângulo C:

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\frac{1}{2}(A+B)\frac{cos\frac{1}{2}(a+b)}{cos\frac{1}{2}(a-b)},} \tag{14}$$

Substituindo, a = b e β = A, na Equação 14, tem-se

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\,A\,cos\,A} \tag{15}$$

A Equação 16, do grupo de equações da Analogia de Neper aos lados,

$$\tan\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c, \tag{16}$$

Que rearranjada para explicitar o lado c

$$\tan\frac{1}{2}c = \tan a \cos A, \tag{17}$$

Utilizando as Equações 15 e 17 e sabendo que para haver solução $\text{cotan}\frac{1}{2}\text{C}$ e $\tan\frac{1}{2}\text{c}$ devem ser positivos, bastando para isso que o lado a e o ângulo A sejam do mesmo quadrante, o que ocorre no presente caso. Deste modo, β é solução.

Substituindo o valor β’ = 180º - A, na Equação 7, tem-se:

$$\tan\frac{1}{2}(A + 180° - A) = \frac{\cos\frac{1}{2}(0°)}{\cos a}\text{cotan}\frac{1}{2}C \tag{18}$$

Logo,

$$\tan\frac{1}{2}\text{C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(0°)}{\cos \text{a}}\text{cotan}\,90° = 0 \tag{19}$$

Ora, a tangente de um ângulo é zero para 0º, 180º,...

$\frac{1}{2}\text{C} = 0º$ e C = 0º, o que é impossível.

$\frac{1}{2}\text{C} = 180º$ e C = 360º, o que é impossível.

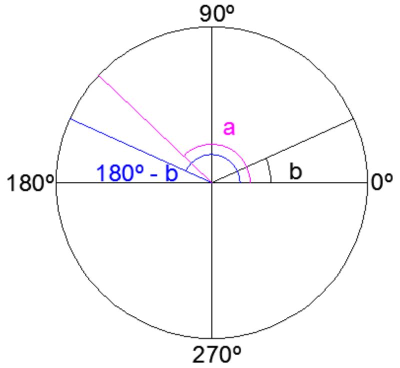
Portanto, β’ não é solução.

Logo para este caso se tem apenas uma solução.

b < 90º, a > b e (a + b) < 180º

Então, se a < 90º, a e b são do primeiro quadrante e sen a > sen b; se a = 90º, então sen a > sen b e; se a > 90º, para que (a + b) < 180º é necessário que 180º - b > a, portanto sen a > sen b, conforme pode ser visto na Figura 6.

Figura 6 – Possibilidade para o lado a, quando a > b e b < 90º.



Fonte: Autoria própria (2020).

Assim, em qualquer possibilidade para a, sen a > sen b, portanto (sen b/sen a) < 1 e sen B < sen A, logo β < A e β' > A. Assim, (A - β) > 0 e (A – β') < 0, como (a - b) > 0, somente β pode ser solução. Logo, para este caso somente há uma solução.

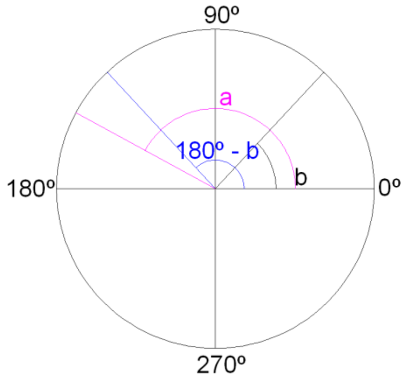
b < 90º, a > b e (a + b) = 180º

Assim, sen a = sen (180º - b), sen a = sen b, portanto β = A e β' > A. Portanto, (A – β) = 0 e (A - β') < 0 e como (a – b) > 0. Logo, não há solução, pois ambos os valores para o ângulo B não cumprem a segunda condição dada acima.

b < 90º, a > b e (a + b) > 180º

Neste caso, 90º < a < 180º, pois (a + b) > 180º e se está tratando de triângulos eulerianos. A situação genérica está representada na Figura 7. Portanto, sen a < sen b, (sen b/sen a) > 1 e sen B > sen A, assim β > A e β' > A, deste modo, (A - β) < 0 e (A - β') < 0, como (a - b) > 0, ambos os valores, β e β', são inadmissíveis. Não há, portanto, solução.

Figura 7 – Possibilidade para o lado a, quando b > 90º, a > b e (a + b) > 180º.



Fonte: Autoria própria (2020).

b = 90º, a < b

Assim, sen b = 1, então sen a < sen b, (sen b/sen a) > 1 e sen B > sen A, portanto β > A e β' > A, deste modo, (A - β) < 0 e (A – β') < 0, como (a – b) < 0, β e β' são ambos admissíveis. Logo, há duas soluções

b = 90º, a = b

Então, β = A e β' = 180º - A, como a = b, não se pode usar o segundo critério estabelecido acima. Para achar a quantidade de soluções, se as houver, substituem-se os valores de β e β' na Equação 14:

Primeiramente substituindo-se β = A na Equação 14,

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\frac{1}{2}(A + A)\frac{cos\frac{1}{2}(2a)}{cos\frac{1}{2}(0)}}, \tag{20}$$

Resolvendo,

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\,A\frac{cos\,90°}{cos\,0°} = 0}, \tag{21}$$

Ora, a cotangente é zero para os ângulos iguais 90º, 270º,...

$\frac{1}{2}C = 90^o$ e C = 180º, o que é impossível.

$\frac{1}{2}C = 270^o$ e C = 540º, o que é impossível.

Portanto, β não é solução.

Agora para β' = 180º - A

Substituindo o valor β' = 180º - A, na Equação 14, tem-se:

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\frac{1}{2}(A + 180° - A)\frac{cos\frac{1}{2}(2a)}{cos\frac{1}{2}(0)}}, \quad \textbf{(22)}$$

Resolvendo,

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\,180°\frac{cos\,90°}{cos\,0°} = 0}\ , \quad \textbf{(23)}$$

Ora, a cotangente é zero para os ângulos iguais 90º, 270º,...

$\frac{1}{2}C = 90^o$ e C = 180º, o que é impossível.

$\frac{1}{2}C = 270^o$ e C = 540º, o que é impossível.

Portanto, β' não é solução.

Logo, não há solução.

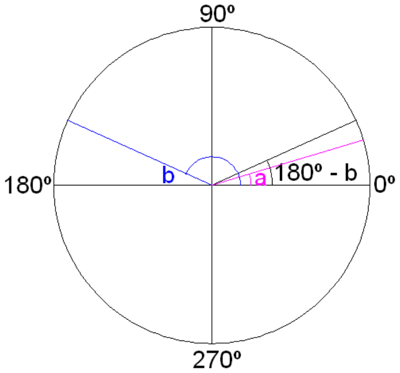
b = 90º, a > b

Neste caso, sen b = 1, como a > 90º, logo sen a < 1 e (sen b/sen a) > 1, portanto sen B > sen A e β > A e β' > A, como consequência (A - β) < 0 e (A – β') < 0, mas (a – b) > 0, portanto β e β' são inadmissíveis, não havendo solução.

b > 90º, a < b, (a + b) < 180º

Na Figura 8, em azul, tem-se o ângulo b; se a fosse igual a 180º - b, em preto na Figura 8, então (a + b) > 180º. Assim, para que a soma seja menor que 180º, o lado a, em magenta na Figura 8, estará situado na região entre o eixo horizontal e a linha preta. Deste modo, sen a < sen b, (sen b/sen a) > 1 e sen B > sen A, logo β > A e β' > A e (A – β) < 0 e (A – β') < 0, como (a – b) < 0, β e β' podem ser solução, portanto há duas soluções.

Figura 8 – Possibilidades para o lado a.



Fonte: Autoria própria (2020).

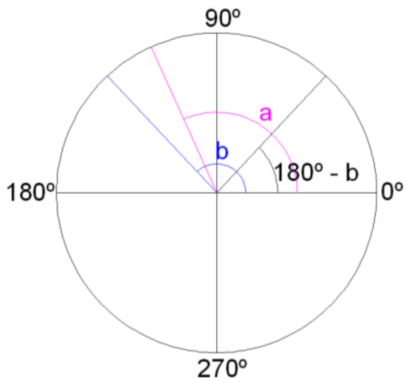
b > 90º, a < b, (a + b) = 180º

Neste caso, sen a = sen (180º - b), sen a = sen b, portanto β = A e β' > A, logo (A – β) = 0 e (A – β') < 0, como (a – b) < 0, β não pode ser solução e β' pode solução, tem-se, portanto, uma solução.

b > 90º, a < b, (a + b) > 180º

Analisando a Figura 9, o valor do lado a terá que se situar entre a linha preta que marca o ângulo (180º - b) e a linha azul que marca o valor do lado b, portanto, sen a > sen b, (sen b/sen a) < 1 e sen B < sen A, logo β < A e β' > A, assim (A - β) > 0 e (A – β') < 0, como (a – b) < 0, somente β' pode ser solução.

Figura 9 – Possibilidades para o lado a, quando b > 90º, a < b e (a + b) > 180º.



Fonte: Autoria própria (2020).

b > 90º, a = b

Neste caso, β = A e β' = 180º - A, substituindo estes valores na Equação 14, tem-se:

Primeiro para β = A,

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\frac{1}{2}(A + A)\frac{cos\frac{1}{2}(2a)}{cos\frac{1}{2}(0)}}\,, \tag{24}$$

Resolvendo,

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\,A\frac{cos\,a}{cos\,0°} = tan\,A\,cos\,a}\,, \tag{25}$$

Como tan A > 0 e cos a < 0, o produto tan A cos a < 0 e a cotan$\frac{1}{2}$C < 0, o que fere o segundo critério acima. Deste modo, β não é solução.

Agora para β' = 180º - A

Substituindo o valor β' = 180º - A, na Equação 14, tem-se:

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\frac{1}{2}(A + 180° - A)\frac{cos\frac{1}{2}(2a)}{cos\frac{1}{2}(0)}}\,, \tag{26}$$

Resolvendo,

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\,90°\frac{cos\,a}{cos\,0°} = \infty}\,, \tag{27}$$

e a tan 1/2C = 0. A tangente de um ângulo é zero quando este ângulo for 0º, 180º, o que para os triângulos de que se está tratando neste artigo é impossível. Portanto, β' não é também solução.

b > 90º, a > b

Neste caso, sen a < sen b, (sen b/sen a) > 1 e sen B > sen A, logo β > A e β' > A, fazendo com que (A – β) < 0 e (A – β') < 0 e como (a – b) > 0, ambos os valores β e β'são inadmissíveis.

ÂNGULO CONHECIDO A = 90º

Depois de terem sido apresentadas as soluções para quando A < 90º, agora serão vistos os casos para A = 90º.

b < 90º e a < b

Assim, sen a < sen b, (sen b/sen a) > 1, sen B > sen A e sen B > 1, o que é impossível, ou seja, este primeiro caso não cumpre a primeira condição explicitada acima, portanto não há Solução.

b < 90º e a = b

Então, sen a = sen b, (sen b/sen a) = 1 e sen B = sen A, β = β' = A = 90º.

Substituindo β = A e a = b na Equação 14, tem-se:

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\frac{1}{2}(A + A)\frac{cos\frac{1}{2}(2a)}{cos\frac{1}{2}(0°)}}, \qquad \textbf{(28)}$$

Resolvendo,

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\,A\frac{cos\,a}{cos\,0°} = tan\,90°\,cos\,a = \infty}, \qquad \textbf{(29)}$$

E a tangente,

$$\boldsymbol{tan\frac{1}{2}C = 0}, \qquad \textbf{(30)}$$

Ora, a tangente de um ângulo é zero para ângulos iguais 0º, 180º,...

$\frac{1}{2}\mathrm{C} = 0^{o}$ e C = 0º, o que é impossível.

$\frac{1}{2}\mathrm{C} = 180^{o}$ e C = 360º, o que é impossível.

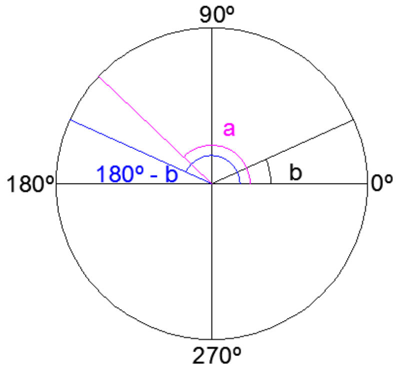
Portanto, β não é solução.

Não há, portanto, nenhuma solução.

b < 90º, a > b e (a + b) < 180º

Então sen A = 1, se a < 90º, a e b são do primeiro quadrante e sen a > sen b; se a = 90º, então sen a > sen b e; se a > 90º, para que (a + b) < 180º é necessário que a > 180º - b, portanto sen a > sen b, como pode ser visto na Figura 10. Assim, em qualquer possibilidade para a, sen a > sen b, portanto (sen b/sen a) < 1 e sen B < sen A, logo β < A e β' > A. Assim, (A - β) > 0 e (A – β') < 0, como (a - b) > 0, somente β pode ser solução.

Figura 10 – Possibilidades para o lado a.



Fonte: Autoria própria (2020).

b < 90º, a > b e (a + b) = 180º.

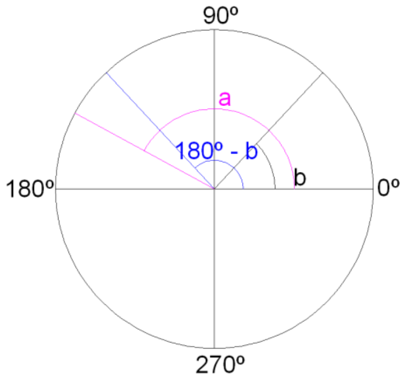
Assim, sen a = sen (180º - b), sen a = sen b, portanto β = A = 90º.

Como (a – b) > 0 e (A – β) = 0, não se cumpre a segunda condição, portanto não há solução.

b < 90º, a > b e (a + b) > 180º

Neste caso, a > 180º - b para (a + b) > 180º, o que está representado na Figura 11, portanto sen a < sen b, (sen b/sen a) > 1, mas sen A = 1, portanto sen B > 1, o que é impossível, portanto não há solução.

Figura 11 – Possibilidades para o lado a.



Fonte: Autoria própria (2020).

b = 90º, a < b.

Então, sen b = 1, sen a < sen b, (sen b/sen a) > 1, mas sen A = 1, portanto sen B > 1, o que é impossível, não havendo nenhuma solução.

b = 90º, a = b

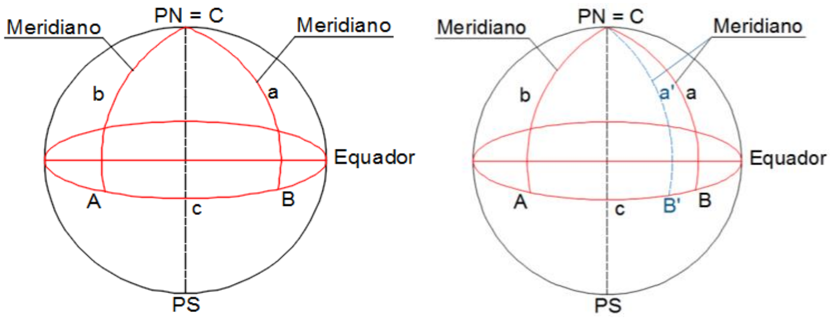
Equivale ao Caso Ambíguo dos Triângulos Esféricos Retângulos. Pelo que se pode notar, como b = 90º e a = b, logo a = 90º, portanto, o triângulo é birretilátero, mas todos os birretiláteros são também birretângulos, logo B = 90º, o que pode ser demonstrado pela lei dos senos.

(sen a / sen A) = (sen b / sen B); sen B = (sen A / sen a) x sen b = 1, logo B = 90º.

Para que este caso seja entendido, será utilizada a Figura 12. Seja o Triângulo ABC,

Figura 12a, formado por dois arcos (AC e BC) de meridianos e um arco (AB) do Equador.

Figura 12 – Triângulo esférico Birretângulo e Birretilátero.



Fonte: Autoria própria (2020).

Mas se a posição do vértice B for alterada para a posição B’ (Figura 12b), o Triângulo assim formado passa a ser AB’C, com lado a’ também igual a 90º, tendo em vista ser um arco de meridiano do Polo até o Equador, portanto os valores dados para o Triângulo Esférico Birretângulo continuam os mesmos, mas o lado c e o ângulo C mudaram, portanto o lado c e o ângulo C originais são soluções para o Triângulo, mas os novos lado c e ângulo C também o são.

Este fato acontecerá com todos os pontos B situados no Equador, sejam eles mais afastados de A ou mais próximos. Como existem infinitas posições ao longo do Equador em que o ponto B pode estar, logo há infinitas soluções para este caso. Ele somente não poderá assumir a mesma posição que A, pois, deste modo, não haverá Triângulo. Esta mesma análise vale se for deslocado o ponto A e fixado o ponto B ou se ambos forem deslocados. Logo, há infinitas soluções.

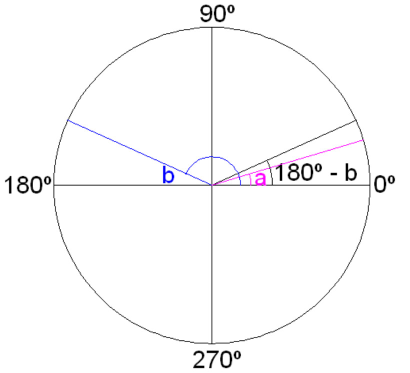
b = 90º, a > b

Neste caso, sen b = 1, a > 90º, sen a < 1, (sen b/sen a) > 1, mas sen A = 1, logo sen B > 1, o que é impossível. Não há, portanto, nenhuma solução.

b > 90º, a < b, (a + b) < 180º

Na Figura 13, em azul, tem-se o ângulo b; o valor do lado a, em linha magenta, deve se situar entre 0º e 180º - b, em preto na Figura 13, deste modo, sen a < sen b, (sen b/sen a) > 1, mas sen A = 1, logo sen B > 1, o que é impossível. Portanto, não há nenhuma solução.

Figura 13 – Possibilidades para o lado a.



Fonte: Autoria própria (2020).

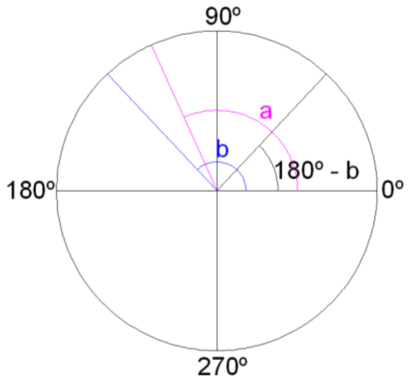
b > 90º, a < b, (a + b) = 180º

Então, sen a = sen (180º - b), sen a = sen b, (sen b/sen a) = 1, sen B = 1, logo β = 90º. Mas como (a – b) < 0 e (A – β) = 0, não resta cumprida a segunda condição. Logo, não há solução.

b > 90º, a < b, (a + b) > 180º

Analisando a Figura 14, o valor do lado a terá que se situar entre a linha preta que marca o ângulo (180º - b) e a linha azul que marca o valor do lado b, portanto, sen a > sen b, (sen b/sen a) < 1, mas sen A = 1, logo sen B < 1, portanto β < A e β' > A e (A – β) > 0 e (A – β') < 0, como (a – b) < 0, logo β' é solução.

Figura 14 – Possibilidades para o lado a.



Fonte: Autoria própria (2020).

b > 90º, a = b

Então, sen a = sen b, (sen b/sen a) = 1, sen B = 1 e $\beta = \beta'$ = A, substituindo este valor na Equação 14, tem-se:

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\frac{1}{2}(A+A)\frac{cos\frac{1}{2}(2a)}{cos\frac{1}{2}(0°)}}, \quad \textbf{(31)}$$

Resolvendo,

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\,A\frac{cos\,a}{cos\,0°} = tan\,90°\,cos\,a = \infty}, \quad \textbf{(32)}$$

E a tangente,

$$\boldsymbol{tan\frac{1}{2}C = 0}, \tag{33}$$

Ora, a tangente de um ângulo é zero para ângulos iguais 0º, 180º,...

$\frac{1}{2}C = 0^o$ e C = 0º, o que é impossível.

$\frac{1}{2}C = 90^o$ e C = 180º, o que é impossível.

Portanto, β não é solução.

b > 90º, a > b

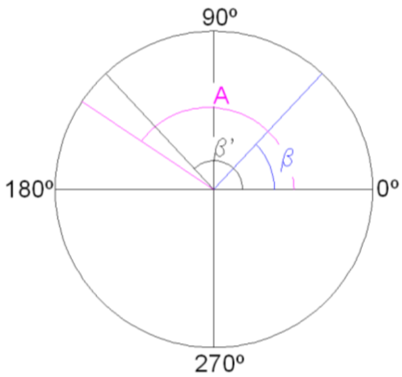
Então, sen a < sen b, (sen b/sen a) > 1, sen A = 1 e sen B > 1, o que é impossível. Portanto, não há nenhuma solução.

ÂNGULO CONHECIDO A > 90º

b < 90º e a < b

Neste caso, sen a < sen b, (sen b/sen a) > 1 e sen B > sen A, como A é do segundo quadrante, β < A e β' < A, conforme pode ser visto pela Figura 15. Assim, (A – β) > 0 e (A – β') > 0, como (a - b) < 0, não há solução.

Figura 15 – Possibilidades para o ângulo A e os ângulos β e β'.



Fonte: Autoria própria (2020).

b < 90º e a = b

Assim, sen a = sen b, (sen b/sen a) = 1 e sen B = sen A, B = A.

Substituindo a = b e B = A na Equação 14, tem-se:

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\frac{1}{2}(A + A)\frac{cos\frac{1}{2}(2a)}{cos\frac{1}{2}(0°)}}, \tag{34}$$

Resolvendo,

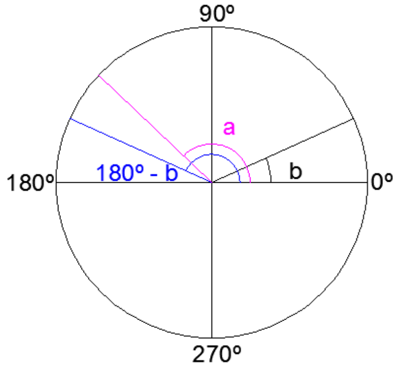
$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\,A\frac{cos\,a}{cos\,0°} = tan\,A\,cos\,a} \tag{35}$$

Para que haja solução $\cot\text{an}\frac{1}{2}C$ deve ser positiva e para isso a e A devem ser do mesmo quadrante, o que não ocorre no presente caso, portanto não há solução.

$b < 90^o$, $a > b$ e $(a + b) < 180^o$

Assim, se $a < 90^o$, a e b são do primeiro quadrante e sen a > sen b; se $a = 90^o$, então sen a > sen b e; se $a > 90^o$, para que $(a + b) < 180^o$ é necessário que $a < 180^o - b$, o ângulo a, em magenta na Figura 16, deve se situar entre a linha azul, representando o ângulo $180^o - b$, e o ângulo de 90^o, deste modo sen a > sen b.

Figura 16 – Possibilidades para o ângulo A e os ângulos β e β'.



Fonte: Autoria própria (2020).

Assim, em qualquer possibilidade para a, sen a > sen b, portanto (sen b/sen a) < 1 e sen B < sen A, como A é do segundo quadrante, logo $\beta < A$ e $\beta' > A$. Assim, $(A - \beta) > 0$ e $(A – \beta') < 0$, como $(a - b) > 0$, somente β pode ser solução.

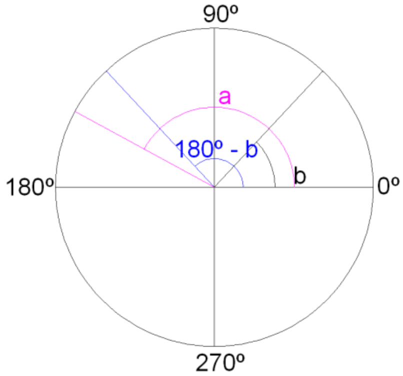
$b < 90^o$, $a > b$ e $(a + b) = 180^o$

Assim, sen a = sen $(180^o - b)$, sen a = sen b, sen A = sen B, portanto $\beta < A$ e $\beta' = A$. Portanto, $(A - \beta) > 0$ e como $(a – b) > 0$, β é solução e β' não cumpre a segunda condição. Há, deste modo, somente uma solução.

$b < 90^o$, $a > b$ e $(a + b) > 180^o$

Neste caso, a é do segundo quadrante. Além disso, o valor do lado a deve se situar entre a linha azul, representando o valor $180^o - b$, e o ângulo de 180º, conforme a Figura 17, portanto sen a < sen b, (sen b/sen a) > 1 e sen B > sen A.

Figura 17 – Possibilidades para o lado a.



Fonte: Autoria própria (2020).

Portanto, β < A e β' < A, deste modo, (A - β) > 0 e (A - β') > 0, como (a - b) > 0, β e β' são solução.

b = 90º, a < b

Assim, sen b = 1, então sen a < sen b, (sen b/sen a) > 1 e sen B > sen A, como A é do segundo quadrante, β < A e β' < A, deste modo, (A - β) > 0 e (A – β') > 0, como (a – b) < 0, portanto β e β' são indadmissíveis, não havendo solução.

b = 90º, a = b

Neste caso, a = 90º, sen a = sen b = 1, (sen b/sen a) = 1 e sen B = sen A, logo β = 180º - A e β' = A, substituindo estes valores na Equação 14, tem-se:

Primeiro para β = 180º - A.

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\frac{1}{2}(A + 180° - A)\frac{cos\frac{1}{2}(2a)}{cos\frac{1}{2}(0°)}}, \quad \textbf{(36)}$$

Resolvendo,

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\,180°\frac{cos\,90°}{cos\,0°} = \infty 0} \quad \textbf{(37)}$$

Sendo indeterminado, portanto β não é solução.

Agora para β' = A

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\frac{1}{2}(2A)\frac{cos\frac{1}{2}(2a)}{cos\frac{1}{2}(0°)}}, \quad \textbf{(38)}$$

Resolvendo,

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\,A\frac{cos\,90°}{cos\,0°} = 0} \quad \textbf{(39)}$$

Ora, a cotangente de um ângulo é nula para ângulos iguais 90º, 270º,...

$\frac{1}{2}C = 90º$ e C = 180º, o que é impossível.

$\frac{1}{2}C = 270º$ e C = 540º, o que é impossível.

Portanto, β' não é solução.

Deste modo nem β nem β' podem ser solução.

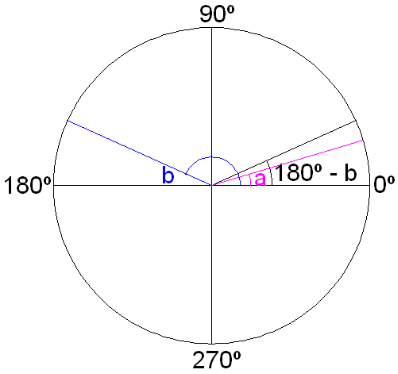
b = 90º, a > b

Então, sen b = 1, então sen a < sen b, (sen b/sen a) > 1 e sen B > sen A, como A é do segundo quadrante, β < A e β' < A, deste modo, (A - β) > 0 e (A – β') > 0, como (a – b) > 0, portanto β e β' são admissíveis.

b > 90º, a < b, (a + b) < 180º

Conforme a Figura 18, em azul, tem-se o ângulo b; se a for igual 180º - b, em preto na Figura 18, então (a + b) > 180º, assim para que a soma seja menor que 180º, o lado a, demarcado pela linha magenta, situa-se na região entre o eixo horizontal e a linha preta que marca o ângulo 180º - b, deste modo, sen a < sen b e a relação (sen b/sen a) > 1 e sen B > sen A.

Figura 18 – Possibilidade para o lado a.



Fonte: O Autor.

Assim, como A > 90º, β < A e β' < A, logo (A – β) > 0 e (A – β') > 0, como (a – b) < 0, β e β' são inadmissíveis.

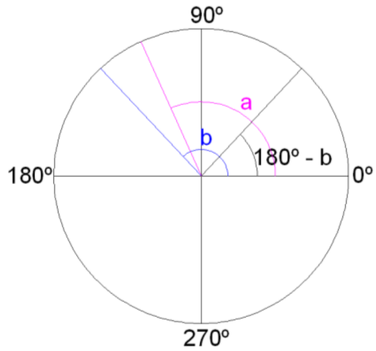
b > 90º, a < b, (a + b) = 180º

Então, sen a = sen (180º - b), sen a = sen b, (sen b/sen a) = 1 e sen A = sen B, portanto β = 180º - A e β' = A, logo (A – β) > 0 e (A – β') = 0, como (a – b) < 0, nenhum dos ângulos cumpre a segunda condição.

b > 90º, a < b, (a + b) > 180º

Conforme a Figura 19, em azul tem-se o ângulo b, se a for igual 180º - b, em preto na Figura 19, então (a + b) = 180º, assim para que a soma seja maior que 180º, o lado a deve ser maior que 180º - b e menor que b, portanto, sen a > sen b, (sen b/sen a) < 1 e sen B < sen A.

Figura 19 – Possibilidade para o lado a.



Fonte: Autoria própria (2020).

Como A é o do segundo quadrante, β < A e β' > A, assim (A - β) > 0 e (A – β') < 0, como (a – b) < 0, portanto β' pode ser solução.

b > 90º, a = b

Então, sen a = sen b, (sen b/sen a) = 1 e sen A = sen B, logo β = 180º - A e β' = A, substituindo estes valores na Equação 14, tem-se:

Primeiro para β = 180º - A.

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\frac{1}{2}(A + 180° - A)\frac{cos\frac{1}{2}(2a)}{cos\frac{1}{2}(0°)}}, \quad \textbf{(40)}$$

Resolvendo,

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\,180°\frac{cos\,a}{cos\,0°} = 0} \tag{41}$$

Ora, a cotangente de um ângulo é nula para ângulos iguais 90°, 270°,...

$\frac{1}{2}C = 90^o$ e C = 180º, o que é impossível.

$\frac{1}{2}C = 270^o$ e C = 540º, o que é impossível.

Portanto, β não é solução.

Agora para β' = A

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\frac{1}{2}(2A)\frac{cos\frac{1}{2}(2a)}{cos\frac{1}{2}(0°)}}, \tag{42}$$

Resolvendo,

$$\boldsymbol{cotan\frac{1}{2}C = tan\,A\frac{cos\,a}{cos\,0°} = tan\,A\,cos\,a} \tag{43}$$

Como A e a são do segundo quadrante, tan A < 0 e cos A < 0, logo o produto entre eles é positivo, portanto, β' é solução.

b > 90º, a > b

Então, sen a < sen b, (sen b/sen a) > 1 e sen A < sen B. Assim, β < A e β' < A, fazendo com que (A – β) > 0 e (A – β') > 0 e como (a – b) > 0, ambos os valores β e β'são admissíveis, havendo, assim, duas soluções.

RESUMO DAS SOLUÇÕES

Bem, de posse de todas as soluções vistas acima, pode-se resumi-las no Quadro 1.

As condições para que haja solução podem ser resumidas da seguinte maneira (COUTINHO, 2015)

1. Se sen a < sen b sen A, não existe solução;
2. Se sen a = sen b sen A, existe uma única solução;
3. Se sen a > sen b sen A, e se os dois valores de B (β e β') satisfizerem a condição de que (A - B) e (a – b) tenham o mesmo sinal, existem duas soluções;
4. Se somente um dos valores de B satisfizer a condição, existirá somente uma solução;
5. Se nenhum dos valores de B satisfizer a condição, então não existe solução.

R. bras. Geom., Curitiba, v. 9, n. 1, p. 036-061, jan./mar. 2021.

Quadro 1 - Resumo das possíveis soluções para o Caso V.

				Soluções
A < 90º	b < 90°	a < b		2
		a = b		1
		a > b	a + b < 180°	1
			a + b = 180°	0
			a + b > 180°	0
	b = 90°	a < b		2
		a = b		0
		a > b		0
	b > 90°	a < b	a + b < 180°	2
			a + b = 180°	1
			a + b > 180°	1
		a = b		0
		a > b		0
A = 90°	b < 90°	a < b		0
		a = b		0
		a > b	a + b < 180°	1
			a + b = 180°	0
			a + b > 180°	0
	b = 90°	a < b		0
		a = b		infinitas
		a > b		0
	b > 90°	a < b	a + b < 180°	0
			a + b = 180°	0
			a + b > 180°	1
		a = b		0
		a > b		0
A > 90°	b < 90°	a < b		0
		a = b		0
		a > b	a + b < 180°	1
			a + b = 180°	1
			a + b > 180°	2
	b = 90°	a < b		0
		a = b		0
		a > b		2
	b > 90°	a < b	a + b < 180°	0
			a + b = 180°	0
			a + b > 180°	1
		a = b		1
		a > b		2

CASO VI

Sabendo-se que o Caso VI é polar ao Caso V e vice-versa, o triângulo polar do Caso VI irá fornecer um triângulo do Caso V. Com isso, basta utilizar o quadro resumo acima para se saber a quantidade de soluções também para o Caso VI.

CONCLUSÕES

Este trabalho realizou revisão bibliográfica acerca da quantidade de soluções dos triângulos esféricos oblíquos do Caso V e do Caso VI. Em tais casos, pode-se ter nenhuma solução, uma solução, duas soluções ou infinitas soluções.

Procurou-se apresentar todos os passos necessários para a dedução da quantidade de soluções para que o leitor consiga entender completamente o desenvolvimento e ter um conhecimento científico, ou seja, pelas causas das soluções para os casos estudados. Além disso, não é comum nas referências bibliográficas mais atuais a apresentação deste estudo, por exemplo, Coutinho (2015) não o apresenta.

A área de Trigonometria Esférica é um campo profícuo para os estudos das deduções de algumas equações, pois por ser um ramo da Matemática bem consolidado e antigo muitas vezes os livros didáticos não trazem as deduções apropriadas.

Study of the quantity of the solutions for the cases V and VI of oblique-angled spherical triangles

ABSTRACT

The human being when became sedentary began to realize the need to know their localization. They found in the stars a good referential for this attempt and then they used them to calculate the owner position, with this the Astronomy of Position was born. For the calculation of the position, it was necessary a mathematical model, and the sphere was the natural choice for that. It was also natural to go beyond the Plane Trigonometry to the Spherical Trigonometry. The Spherical Trigonometry is important for the formation of the Cartographer Engineer, because the knowledge of the tools for the resolution of a Spherical Triangle will be fundamental for the understanding of the positioning by Astronomy of Position or by Geodesy. The conceptual revision presented here aims to study the quantity of solutions for the Oblique Spherical Triangle of the Cases V and VI, respectively, when they are known two sides and the opposite angle to one of them and when they are known two angles and one side opposite to one of them. The triangles of these cases can present no one, one, two or infinite solutions. The knowledge about determinate subject became scientific when the student knows the steps for the deductions about that subject, this paper presents to the students those steps for them to know scientifically this part of Spherical Trigonometry.

KEYWORDS: Spherical Trigonometry. Oblique-Angled Spherical Triangle. Deductions of quantity of solutions.

REFERÊNCIAS

AYRES JÚNIOR, F. **Trigonometria**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico SA, 1968.

CASEY, J. A. **Treatise on Spherical Trigonometry, and its Applications to Geodesy and Astronomy with Numerous Examples**. Dublin: Hodges, Figgis & CO, Grafton-ST; London: Longmans, Green, & CO, 1889.

COUTINHO, L. **Trigonometria Esférica – A Matemática de um Espaço Curvo**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2015, 232p.

JOSEPH, M. O Trivium: **As Artes Liberais da Lógica, da Gramática e da Retórica**. São Paulo: É Realizações, 2008. 327 p.

MURRAY, D.A. **Spherical Trigonometry. New York: Longman**, Green & CO., 1908.

RAAP, R.H. **Geometric Geodesy – Part I**. Columbus, Ohio: The Ohio State University, 1991.

ROCHA, C.H.O. Dedução via geometria analítica das equações da lei dos cossenos da trigonometria esférica. **Revista Brasileira de Geomática**, Curitiba, v. 5, n. 2, p.230-250, abr/jun. 2017. 10.3895/rbgeo.v5n2.5422.

TODHUNTER, I.; LEATHEM, J.G. **Spherical Trigonometry**. Londres: Macmillan and CO, Limited., 1886.

Recebido: 26 jun. 2020
Aprovado: 27 out. 2020
DOI: 10.3895/rbgeo.v9n1.12655
Como citar: ROCHA, C. H.O. Estudos das quantidades de soluções para os Casos V e VI dos Triângulos Esféricos Oblíquos. **R. bras. Geom.**, Curitiba, v. 9, n. 1, p. 036-061, jan./mar. 2021. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbgeo>. Acesso em: XXX.
Correspondência:
Carlos Henrique Oliveira da Rocha
Rua São Francisco Xavier, 524, CEP 20550-900, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.