Revista Brasileira de Física Tecnológica Aplicada, v.3,n.1, junho de 2016.

Montagem experimental de baixo custo da técnica da lâmina para a caracterização de um feixe laser do tipo Gaussiano

Arreglo experimental de bajo costo de la técnica de la lámina para la caracterización del haz de un láser de tipo Gaussiano

Low-cost experimental implementation of the knife-edge technique for characterizing the beam of a Gaussian-type laser

[1]Sergio L Gómez, Cristiano S. Lopes, Angela A. Bernal-Cardenas, Vinicius M. Lenart, Rozane de F. Turchiello

Resumo: A equação que descreve a propagação de um feixe de laser colimado possui diversas soluções conhecidas como modos, um dos quais é o denominado modo gaussiano fundamental ou TEM_{00}, no qual o principal modo dos feixes são produzidos por lasers comerciais. A caracterização espacial do perfil de um feixe de laser tem não somente importância pedagógica como também tem a sua relevância em pesquisas na denominada óptica não-linear. O presente artigo apresenta o método da lâmina para a caracterização dos parâmetros associados a um feixe de luz com perfil espacial gaussiano e apresenta uma metodologia de análise dos dados experimentais.

Palavras-chave: feixe gaussiano; óptica; óptica não-linear.

Resumen: La ecuación que describe la propagación de un haz concentrado de un láser tiene varias soluciones llamadas modos, uno de los cuales es el modo gaussiano fundamental o también TEM_{00}, siendo este el principal modo de los lásers comerciales. La descripción espacial de un haz laser tiene no solo importancia pedagógica, como también es importante en investigaciones en la área denominada óptica no linear. Esta comunicación científica presenta el método de la lámina para la caracterización de los parámetros asociados a un haz de luz láser con un padrón espacial gaussiano, como también el método de análisis de los datos experimentales.

Palabras claves: haz gaussiano, óptica, óptica no linear.

Abstract: *The equation that describes the propagation of a collimated laser beam have many solution known as modes. One of these is the fundamental gaussian mode or TEMoo, the mainly mode of commercial lasers. The spatial characterization of the laser beam is important not only for educational purpose as well as in researches in the field knows as Nonlinear Optics. This paper shows the edge-knife technique for characterizing the geometrical parameters of a gaussian beam and the analysis of the experimental data.*

Keywords: *Gaussian Beam, Optic; Nonlinear Optics.*

[1]Sergio L. Gómez, Doutor em Física pela USP-SP, Prof. Associado do Dep. de Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, Av. Carlos Cavalcanti, 4748, Ponta Grossa, PR, Brasil. *e-mail*: sgomez@uepg.br

1. Introdução

A maioria dos lasers comerciais, como os em geral utilizados em pesquisa científicas, emitem um feixe de luz cuja intensidade sobre um plano transversal à direção de propagação tem um perfil espacial Gaussiano. De um ponto de vista eletromagnético ele corresponde ao modo transversal eletromagnético fundamental de um oscilador óptico, denominado TEM_{00}, o qual é o mais próximo à noção de raio da óptica geométrica que a natureza permite, devido à natureza ondulatória da luz e à difração (SIEGMAN, 1986). Embora um laser possa emitir um feixe de boa qualidade, elementos ópticos utilizados (espelhos, divisores de feixe, lentes, etc.) ou as impurezas nas superfícies deles podem gerar perturbações na frente de onda do feixe. Nesse caso, além do modo fundamental TEM_{00} modos de ordem superior podem estar presentes.

Por outro lado, um diodo laser emite um feixe com um perfil espacial elíptico, o qual tem um perfil espacial gaussiano com larguras diferentes ao logo de duas direções ortogonais (SUN, 2015). Assim, a caracterização de um feixe torna-se relevante, não só de um ponto de vista didático, mas também do ponto de vista prático. Por exemplo, no estudo das propriedades ópticas não-lineares da matéria (ZILIO, 2009) é importante determinar a intensidade incidente sobre um material, assim como o grau de divergência do feixe. Além das necessidades experimentais próprias das medidas que são realizadas, também é importante conferir que o feixe utilizado para a experiência tenha, realmente, um perfil espacial Gaussiano.

Na atualidade, existem equipamentos sofisticados que permitem a caracterização espacial detalhada de um feixe (NG; FOO; TAN, 2005; SCHULZE *et al*., 2012). Porém, esses equipamentos têm preço elevado e, portanto, não são de fácil acesso. Dessa forma, torna-se importante encontrar um método eficiente e de baixo custo para tal fim. Diversos métodos foram desenvolvidos para caracterizar um feixe, como por exemplo, o uso de uma fenda delgada (CHAPPLE, 1994) ou de uma lâmina afiada (DE ARAUJO *et al*., 2009, GONZALES; ARGUIJO; DIAZ-URIBE, 2013, KHOSROFIAN; GARETZ 1983). Este último método é baseado no registro da intensidade de luz transmitida por uma lâmina que eclipsa o feixe Gaussiano. Montagens sofisticadas deste método foram desenvolvidas (ARNAUD *et al*., 1971).

Embora o método não nos forneça uma descrição completa do feixe, ele permite determinar com boa precisão o raio do feixe além de outras características importantes deste. Assim, este artigo tem por objetivo apresentar uma montagem básica do método experimental

da lâmina para a caracterização de um feixe laser no modo TEM_{00}. O artigo está organizado da seguinte forma: na seção Fundamentação Teórica é feita uma descrição matemática do feixe Gaussiano, colocando-se ênfase nos aspectos geométricos principais, na seção Procedimentos Experimentais é feita uma descrição do método do eclipse do feixe e apresentam-se, nas conclusões, as perspectivas.

2. Fundamentação Teórica

Os campos eletromagnéticos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfazem as denominadas Equações de Maxwell, as equações fundamentais do eletromagnetismo (JACKSON, 1975). A partir destas equações, pode-se mostrar que cada uma das componentes cartesianas dos campos, aqui representadas indistintamente por $A(x, y, z, t)$, satisfaz a denominada equação de onda, dada por:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

onde $v = c/\sqrt{\mu\varepsilon}$, c é a velocidade da luz no vácuo e μ e ε são a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do meio, respectivamente (no vácuo, $v = c$). Como o campo elétrico $\vec{E}$ é mais efetivo realizando trabalho sobre as cargas que o campo magnético $\vec{B}$, consideraremos, em nossa análise, simplesmente o campo elétrico. Escrevendo as componentes do campo elétrico como $E(x, y, z, t) = E(x, y, z)\, e^{-i\omega t}$ na equação de onda, obtemos a equação denominada indistintamente como equação de onda independente do tempo, equação escalar de onda ou equação de Helmholtz:

$$[\nabla^2 + k^2]E(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

onde $k = \omega/v$ é o número de onda, o qual pode ser escrito como $k = 2\pi/\lambda$, sendo λ o comprimento de onda do feixe. Expressando as componentes do campo elétrico em coordenadas cartesianas como $E(x, y, z) = u(x, y, z)e^{-ikz}$ (propagação ao longo do eixo z) e supondo que $u(x, y, z)$ varia lentamente com z, obtemos a equação de onda paraxial, a qual é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2ik\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

A **Eq. 3** possui como soluções diversas famílias infinitas de autofunções E_{mn}, em termos das funções de Hermite Gaussianas (ou das funções de Laguerre Gaussianas se forem usadas coordenadas cilíndricas). Para ambas as famílias de funções, a autofunção de ordem

mais baixa $(n, m = 0)$ é denominada de TEM_{00} ou modo Gaussiano fundamental. Em coordenadas cartesianas o modo Gaussiano fundamental é dado por:

$$E_{00}(x, y, z) = E_o \frac{w_o}{w(z)} e^{\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} e^{ik\frac{x^2+y^2}{2R^2(z)} - i\phi(z)} \tag{4}$$

onde $w(z)$ e $R(z)$ são dados respectivamente por:

$$w^2(z) = w_o^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_o^2}\right)^2\right] \tag{5}$$

e

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{\pi w_o^2}{\lambda z}\right)^2\right], \tag{6}$$

O parâmetro R é o raio de curvatura da frente de onda esférica, *w* representa uma medida do raio do feixe, o qual representa a distância ao eixo *z* para a qual a amplitude do campo elétrico decresce num fator $1/e$ do seu valor sobre o eixo de propagação (**Figura 1**) e w_o é o raio mínimo do feixe ou *beam waist*. Define-se o parâmetro confocal ou *Rayleigh range*, z_o, como:

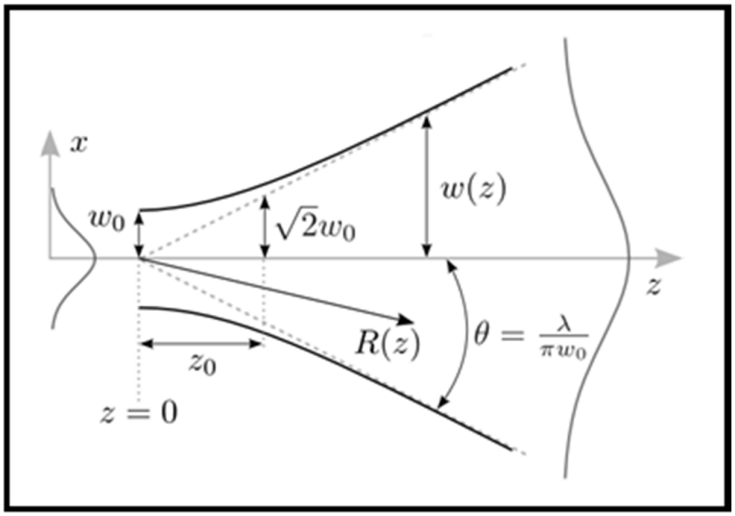

Figura 1: Parâmetros característicos de um feixe gaussiano.
Fonte: Os autores.

$$z_o = \frac{\pi w_o^2}{\lambda}, \tag{7}$$

sendo a distância ao longo do eixo *z* para a qual a cintura do feixe aumenta de w_o, em $z = 0$, para $\sqrt{2}w_o$. Em termos do parâmetro confocal, a **Eq. 5** pode ser escrita como:

$$w^2(z) = w_o^2\left[1 + \left(\frac{z}{z_o}\right)^2\right]. \tag{8}$$

Assim, na aproximação paraxial e para $z \gg z_o$ o comportamento assintótico é caracterizado pelo ângulo de divergência do feixe dado por:

$$\begin{gathered}\theta \cong \tan\theta = \lim_{z\to\infty}\frac{w}{z} \\ \theta = \frac{\lambda}{\pi w_o}.\end{gathered} \tag{9}$$

O ângulo de divergência como definido anteriormente corresponde a um feixe Gaussiano ideal. Entretanto, os feixes Gaussianos de lasers comerciais podem conter modos de ordem superior ao TEM_{00} devido a aberrações causadas pelos elementos ópticos. Em tal caso, o ângulo de divergência não corresponde exatamente ao valor da **expressão 9**.

A grandeza física mensurável é uma média temporal da energia transportada pela onda, a qual é dada por:

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon v E^2, \tag{10}$$

denominada **irradiância** ou **intensidade**. A partir da **Eq. 4**, a intensidade I para o feixe Gaussiano pode ser escrita como:

$$I(x,y,x) = I_o\frac{w_o^2}{w^2(z)}e^{-2\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}, \tag{11}$$

onde I_o é a intensidade sobre o eixo $(r = 0)$ em $z = 0$, sendo dada por $I_o = \frac{1}{2}\varepsilon_o c E_o^2$. A **Eq. 11** mostra que a intensidade sobre um plano *x-y* perpendicular ao eixo *z* tem perfil Gaussiano.

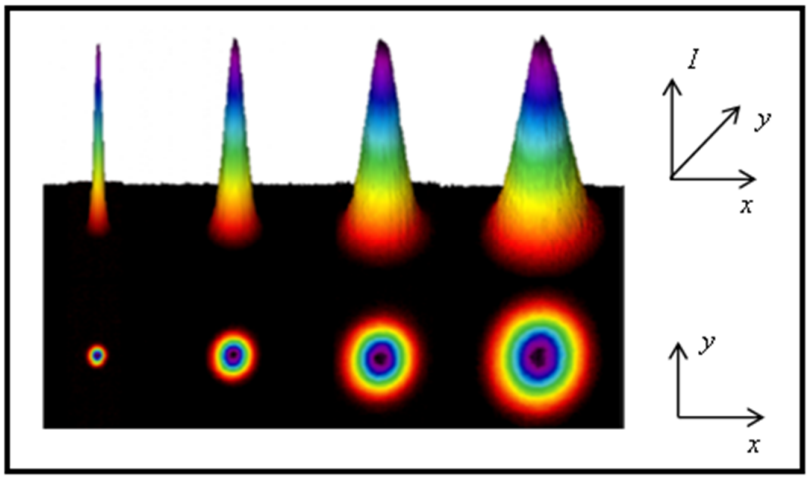

Figura 2: Perfis de intensidade de um feixe Gaussiano em diferentes posições ao longo do eixo z, obtidas por meio de um *beam profiler*.
Fonte: Os autores.

Apresentam-se, na **Figura 2**, diversos perfis de intensidade de um feixe Gaussiano, correspondentes a diferentes posições ao longo do eixo z, obtidos com um *beam profiler* (*LBP2Vis Laser Beam Profiler, Newport*).

Também se pode ver, a partir da **Eq. 11,** que a Gaussiana associada à intensidade do feixe tem um raio w_I dado por $w_I = w/\sqrt{2}$, onde w é o raio da Gaussiana associada à amplitude do campo elétrico (**Eq. 5**). Integrando a intensidade do feixe ao longo de um plano transversal à direção de propagação do feixe, obteremos a potência total P_o emitida pelo laser. Expressando a intensidade em coordenadas cilíndricas e integrando a coordenada r no intervalo $0 \leq r < \infty$, obtemos:

$$\begin{aligned} P_o &= I_o \frac{w_o^2}{w^2(z)} 2\pi \int_0^\infty e^{-2\frac{r^2}{w^2(z)}} r\, dr \\ P_o &= I_o \frac{\pi w_o^2}{2}. \end{aligned} \tag{12}$$

3. Material e Métodos

3.1. Medida do raio do feixe

A determinação do perfil de um feixe de luz laser numa posição *z* ao longo do eixo de propagação pode ser realizada pelo método da lâmina. Este método consiste na quantificação da potência total do feixe laser, medida por um fotodetector em função da posição de uma lâmina que se desloca perpendicularmente à direção de propagação do feixe, obstruindo este.

Uma lâmina de baixo custo e que tem um bom desempenho é uma lâmina de barbear. O deslocamento da lâmina pode ser feito manualmente por meio de uma base deslocadora com um parafuso micrométrico. Uma maior precisão pode ser obtida ainda deslocando a lâmina por meio de uma base deslocadora com um motor de passo. Os fotodetectores possuem, em geral, uma área sensível muito pequena e, por tal motivo, deve ser usada uma lente para coletar a luz transmitida e focalizá-la sobre o detector. Um segundo motivo, também importante para usar uma lente, é o fato de permitir coletar a luz difratada pela lâmina. Também é possível utilizar um medidor de potência o qual possui uma área sensível maior, podendo dispensar o uso da lente.

A **Figura 3** apresenta um esquema desta técnica. Enquanto o feixe se propaga na direção z, a lâmina é deslocada ao longo da direção + x. Para cada posição X da lâmina, é coletado o valor do sinal fornecido pelo fotodetector. Este valor é proporcional à potência total do feixe de luz P(X, z) não obstruída pela lâmina nessa posição.

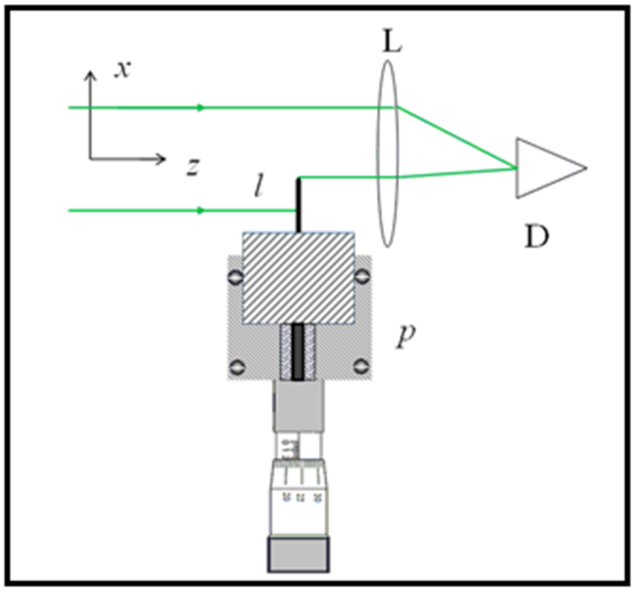

Figura 3: Esquema experimental da lâmina para a caracterização de um feixe Gaussiano – lâmina (*l*), deslocador com parafuso micrométrico (p), lente (L) e fotodetector (D).
Fonte: Os autores.

Em termos matemáticos, para cada posição X da lâmina, devemos integrar a intensidade da parte não obstruída do feixe em relação às variáveis x e y, nos intervalos $X \leq x < +\infty$ e $-\infty < y < +\infty$, respectivamente (**Figura 4**). A partir da **Eq. 12** obtemos:

$$\begin{aligned} P(x = X, z) &= I_o \frac{w_o^2}{w^2(z)} \int_X^{+\infty} e^{-2\frac{x^2}{w^2(z)}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\frac{y^2}{w^2(z)}} dy \\ &= P_o \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \int_X^{+\infty} e^{-2\frac{x^2}{w^2(z)}} dx. \end{aligned} \tag{13}$$

A integral da **Eq. 13** pode ser escrita também como:

$$P(x = X, z) = \frac{P_o}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{w(z)/\sqrt{2}}\right), \tag{14}$$

ou

$$P(x = X, z) = \frac{P_o}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{w_I(z)}\right), \tag{15}$$

onde a função erfc(x) é denominada **função erro complementar**, definida por (BOAS, 1983):

$$\operatorname{erfc}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt. \tag{16}$$

Porém, na implementação desta técnica, o valor de X não é conhecido a priori, pois isso implicaria conhecer com precisão o ponto central do feixe (x = 0). O problema é contornado definindo uma coordenada x´, cuja origem é o ponto inicial da varredura, a uma

distância Δ da origem, em princípio desconhecida, mas escolhido de forma tal que a potência medida nessa posição seja máxima. Ou seja, x´ = X +Δ (**Figura 4**).

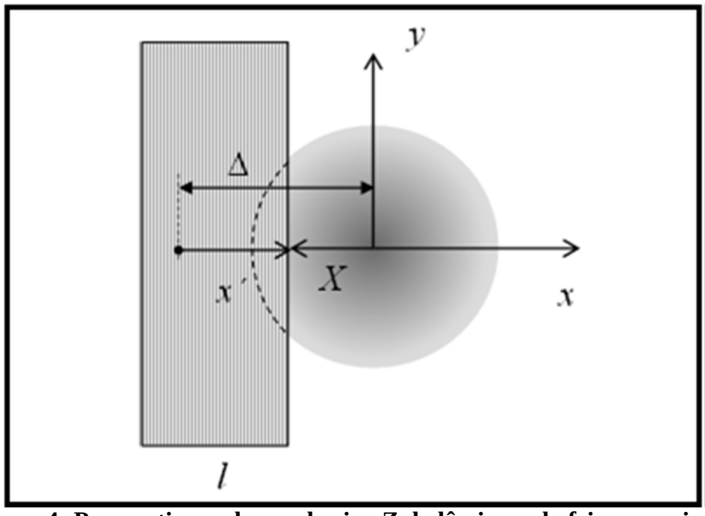

Figura 4: Perspectiva ao longo do eixo Z da lâmina e do feixe gaussiano.
Fonte: Os autores.

A **Figura 5** apresenta a curva experimental de P(x´) obtida com o feixe de luz de um laser **Ventus da Laser Quantum** (feixe contínuo, 500 mW, λ = 532 nm), utilizando um fotodetector de silício (Det550, Optron).

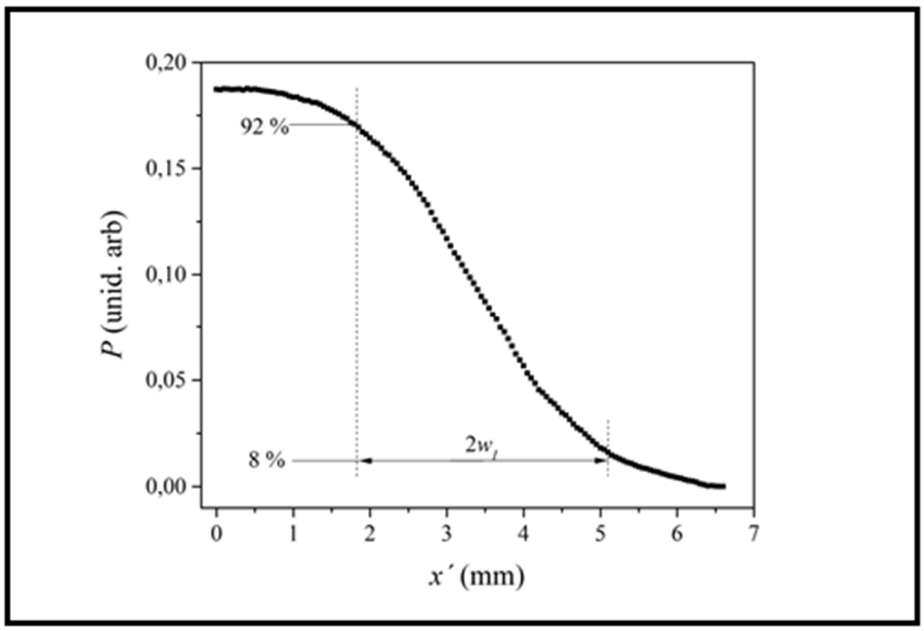

Figura 5: Curva experimental de *P* (*x*`) de um feixe gaussiano.
Fonte: Os autores.

A leitura da tensão do fotodetector foi feita conectando o fotodetector à entrada de um osciloscópio digital (TDS 1002B, Tektronix), e o deslocamento da lâmina foi feito manualmente em passos de 0,05 mm utilizando um parafuso micrométrico cuja precisão é de 0,01 mm. O ponto inicial da varredura (x´= 0) é escolhido de forma que o feixe não seja obstruído pela lâmina. Assim, em geral a curva de transmitância será proporcional à da função erfc(x´).

A função $\mathrm{erfc}(x)$ possui as seguintes propriedades: $\mathrm{erfc}(0) = 1$, $\mathrm{erfc}(1) = 0{,}1573$, $\mathrm{erfc}(-1) = 1{,}8427$, $\mathrm{erfc}(x \to +\infty) \to 0$ e $\mathrm{erfc}(x \to -\infty) \to 2$. Assim, os valores da função erfc(x) para $x = 1$ e $x = -1$ correspondem a aproximadamente 92% e 8% do valor máximo, respectivamente. A partir da **Eq. 14** podemos realizar uma determinação rápida de w_I procurando as posições nas quais as potências medidas pelo detector são ~ 8% e ~ 92% do valor máximo, respectivamente. Nesse caso $2\,w_I = x'(8\%) - x'(92\%)$.

Um segundo procedimento para determinar o diâmetro do feixe gaussiano pode ser estabelecido a partir da derivada da **Eq. 14.** Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (SPIVAK, 1996), a derivada é dada por:

$$\frac{dP}{dX} \propto -e^{-2\frac{x^2}{w^2(z)}}, \tag{17}$$

onde é suposto fixo o valor de z.

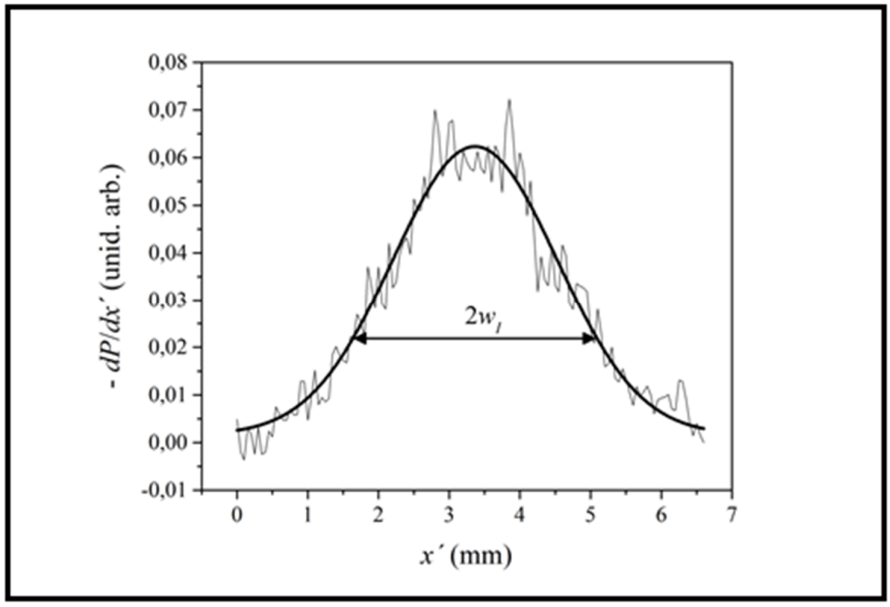

Figura 6: Em linha delgada é apresentado o gráfico de – *dP/dx`* correspondente aos dados experimentais da Fig.5.
Fonte: Os autores.

A **Figura 6** mostra um gráfico de $-\mathrm{dP}/\mathrm{dx}'$ a partir dos dados experimentais da figura 5, obtido utilizando o programa *Origin*^{TM} (*Origin Lab. Corp.*). Mostra também, em linha mais espessa, um ajuste da curva $-\mathrm{dP}/\mathrm{dx}'$ à função Gaussiana $f(x) = A\exp\left[-\frac{(x-x_c)^2}{w_I^2}\right]$, onde x_c representa a posição do vértice da função Gaussiana.

Ambos os procedimentos foram realizados com o programa Origin. Novamente, devido à escolha do ponto inicial na varredura, a função Gaussiana está deslocada em relação à origem do sistema de coordenadas.

3.2. Determinação de w_o e z_o

Para a determinação da divergência do feixe e do fator de qualidade do mesmo faremos uso da dependência do raio do feixe em função da posição como dada pela **Eq. 3**. Experimentalmente, devemos posicionar o deslocador da **Figura 3** num segundo deslocador que o faça deslizar paralelamente ao eixo z.

Dessa forma, será possível fazer determinações do raio do feixe em diferentes posições ao longo do eixo de propagação do feixe. Se o feixe é focalizado por uma lente, podemos fazer medidas numa região em torno do foco da lente. A **Eq. 8** mostra que a expressão de $\mathrm{w}^2(\mathrm{z})$ é uma parábola, cujos coeficientes dependem de $\mathrm{w_o}$.

A **Figura 7** apresenta um gráfico dos dados experimentais da medida de $\mathrm{w}(\mathrm{z})$ e $\mathrm{w}^2(\mathrm{z})$ para o feixe gaussiano produzido por um laser Ventus (Laser Quantum, feixe contínuo, 500 mW, $\lambda = 532$ nm) e focalizado por uma lente convergente ($\mathrm{f} = 10$ cm), sendo mostrado também, em linha contínua, um ajuste à função da **Eq. 11**, a qual, para dar conta do deslocamento ao longo do eixo z, foi modificada para $y = b[1 + a(x-c)^2]$. Ainda na **Figura 7**, a posição $\mathrm{z} = 0$ corresponde ao ponto inicial na varredura ao longo do eixo z.

Como a posição no eixo z que corresponde ao valor mínimo do raio do feixe $(\mathrm{w_o})$ não é conhecida, a curva está deslocada ao longo do eixo z em relação à curva teórica (com mínimo em $\mathrm{z} = 0$). A partir do ajuste dos dados apresentados na **Figura 7**, obtemos $\mathrm{w_o} \cong 25\ \mu\mathrm{m}$, $\mathrm{z_o} \cong 3{,}7$ mm e $\theta \cong 0{,}4°$.

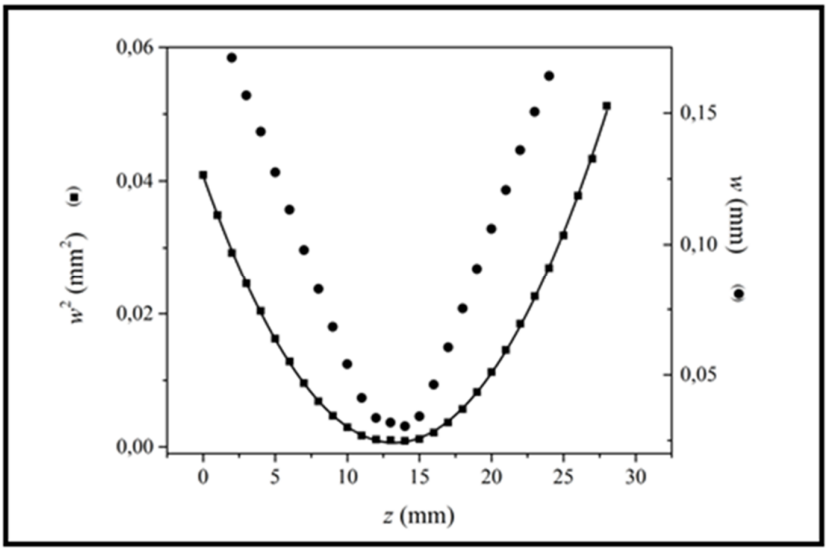

Figura 7: Gráficos de valores de *w* (●) e w^2 (■) em diferentes posições (z) para um feixe gaussiano focalizado por uma lente.
Fonte: Os autores.

No caso de um feixe gaussiano com um perfil espacial elíptico sobre a seção transversal $(w_y \neq w_x)$ ou astigmático (posições diferentes dos raios mínimos nas direções x e y) pode-se fazer a mesma análise na direção y, adaptando o deslocador para varrer na direção vertical. A partir desses dados pode-se determinar a elipticidade do feixe Gaussiano num determinado ponto $\left(\frac{w_y}{w_x}\right)$ e de w_{ox} e w_{oy}.

4. Conclusões

Apresentou-se, neste artigo, uma implementação básica, econômica e pedagógica do método da lâmina para a caracterização de um feixe laser no modo fundamental Gaussiano. O método é baseado na medida da potência da luz em função da posição de uma lâmina que se movimenta numa direção transversal à da propagação do feixe, obstruindo-o parcialmente.

A partir da análise dos dados da transmitância da lâmina é possível obter o raio w do feixe Gaussiano para uma posição z determinada. Por outro lado, a partir da construção do gráfico de $w(z)$ é possível determinar também a raio mínimo do feixe, w_o, o parâmetro confocal, z_o, e o ângulo de divergência, θ.

5. Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação Araucária, ao CNPq e ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em Fluidos Complexos (INCT-FCx) pelo apoio financeiro.

6. Referências bibliográficas

ARNAUD, J.A.; HUBBARD, W.M.; MANDEVILLE, G.D.; DE LA CLAVIÈRE, B.; FRANKE, E.A.; FRANKE, J.M. **Technique for Fast Measurement of Gaussian Laser Beam Parameters**. Applied Optics, v. 10, p. 2775, 1971.

BOAS, M.L. **Mathematical methods in the physical sciences**, 2da ed, John Wiley & Sons, Hoboken, 1983.

CHAPPLE, P.B. **Beam waist and M2 measurement using a finite slit**. Optical Engineering, v. 33, p. 2461, 1994.

DE ARAÚJO, M.A.C.; SILVA, R.; DE LIMA, E.; PEREIRA, D.P.; DE OLIVEIRA, P.C. **Measurement of Gaussian laser beam radius using the knife-edge technique: improvement on data analysis**. Applied Optics, v. 48, 393, 2009.

GONZÁLEZ-CARDEL, M.; ARGUIJO, P.; DÍAZ-URIBE, R. **Gaussian beam radius measurement with a knife-edge: a polynomial approximation to the inverse error function**. Applied Optics, v. 52, p. 3849, 2013.

JACKSON, J.D. **Classical Electrodynamics**, 2th Ed.,Wiley, 1975.

KHOSROFIAN, J.M.; GARETZ, B.A. **Measurement of a Gaussian laser beam diameter through the direct inversion of knife-edge data**. Applied Optics, v. 22, p. 3406, 1983.

NG, T.W.; FOO, S.L.; TAN, H.Y. **Gaussian laser beam diameter measurement using a quadrant photodiode**. Review of Scientific Instruments, v. 76, p. 65110, 2005.

SCHULZE, C.; FLAMM, D.; DUPARRÉ, M.; FORBES, A. **Beam-quality measurements using a spatial light modulator**. Optics Letters, v. 37, p. 4687, 2012.

SIEGMAN, A.E. **Lasers**, University Science Books, Mill Valley, 1986.

SPIVAK, M. **Cálculo Infinitesimal**, 2da ed, Reverté, México-DF, 1996.

SUN, H. **A Practical Guide to Handling Laser Diode Beams**, Springer, New York, 2015.

ZILIO, S.C. **Óptica Moderna-Fundamentos e aplicações**, Compacta, São Carlos 2009.

7. Informações complementares dos demais autores

Cristiano Santos Lopes: Mestre em Ciências, Departamento de Física, Universidade Estadual de Ponta Grossa, *e-mail*: cristianofisico@yahoo.com.br.

Angela Alidia Bernal-Cardenas: Licenciada em Física, Departamento de Física, Universidade Estadual de Ponta Grossa, *e-mail*: angelaalidia@hotmail.com

Vinicius Mariani Lenart: Doutor, em Física, Departamento de Física, Universidade Estadual de Ponta Grossa, *e-mail*: vmlenart@gmail.com.

Rozane de Fátima Turchiello: Doutora em Física, Professora do Departamento de Física, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Ponta Grossa, *e-mail*: turchiel@utfpr.edu.br.

.....

Artigo recebido para avaliação em 24/03/2016 e aceito para publicação em 26/05/2016.