

# O jogo Torre de Hanói como ferramenta mediadora no ensino de potências: um estudo com os alunos do 6º ano do ensino fundamental

## RESUMO

**Bianca Aparecida Holm de Oliveira**  
[biaholm@yahoo.com.br](mailto:biaholm@yahoo.com.br)  
[0000-0002-8814-4150](tel:0000-0002-8814-4150)  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná - Ponta Grossa - Paraná

**Juliana de Fatima Holm Brim**  
[julianafbrim@gmail.com](mailto:julianafbrim@gmail.com)  
[0000-0002-1258-9276](tel:0000-0002-1258-9276)  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná - Ponta Grossa - Paraná

**Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro**  
[nilceia@utfpr.edu.br](mailto:nilceia@utfpr.edu.br)  
[0000-0003-3313-1472](tel:0000-0003-3313-1472)  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná - Ponta Grossa - Paraná

Este artigo tem por objetivo apresentar os resultados de uma intervenção pedagógica utilizando o jogo Torre de Hanói como encaminhamento metodológico mediador no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de potenciação. O estudo foi desenvolvido junto a 22 alunos de uma turma do 6º ano do ensino fundamental, de uma escola privada no estado do Paraná. A investigação teve como objetivos aplicar, contextualizar e fixar conteúdo de potenciação com o auxílio do jogo. O interesse pela pesquisa partiu da indagação de alguns alunos dessa classe acerca da aplicação da potenciação em situações além da sala de aula. A metodologia utilizada para análise e coleta dados foi a qualitativa mediada pela abordagem interpretativa. Para a coleta de dados foram utilizadas observações, registros de imagens e registro das situações relevantes em um diário de bordo. Os resultados apresentados apontam que é possível despertar o interesse pela matemática utilizando como recurso metodológico o jogo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Jogos. Ensino da matemática. Torre de Hanói.

## 1. INTRODUÇÃO

A matemática tem papel indispensável na formação do indivíduo. Ela tem auxiliado o ser-humano na compreensão do mundo e contribuído de maneira significativa para a sociedade. Sabe-se que a disciplina de matemática é de extrema importância e que o ambiente que proporciona o contato com essa disciplina é o escolar. É na escola que são transmitidos os conhecimentos matemáticos, formais e sistematizados, desenvolvidos no decorrer da história.

O conhecimento matemático é uma ferramenta indispensável e de grande aplicabilidade, um dos fatos que caracteriza a importância desse conhecimento é carga horária semanal elevada que a disciplina de matemática possui. No ensino fundamental II, por exemplo, conforme a Resolução SE Nº 81, de 2011 do 6º ao 9º ano, as aulas de matemática durante o ano letivo, devem ser de cinco a seis aulas semanais, com duração variando de 45 a 50 minutos cada. Além disso, a quantidade de conteúdos apresentados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)<sup>2</sup> da disciplina de matemática é bastante ampla e sem dúvidas está relacionada a outras áreas do conhecimento, como Geografia, Ciências, Artes, entre outras.

A elevada carga horária semanal e a grande quantidade de conteúdos matemáticos podem dificultar a busca, do professor de matemática, por novas estratégias e recursos que contribuam para o ensino da matemática, muitas vezes o professor precisa “vencer” esses conteúdos em um bimestre ou trimestre. Pode-se dizer que os conteúdos matemáticos são abordados predominantemente através de listas de exercícios, e como recursos didáticos/metodológicos o quadro de giz e os cadernos são, certamente, os mais utilizados. Nesse caso as “receitas” de ensino utilizadas em anos anteriores são repetidas nos anos consecutivos. Segundo D’Ambrosio (1989, p.01) “[...] Essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas se reduz a procedimentos determinados pelo professor”.

Tal colocação não tem intenção em soar como uma crítica ao professor, porém é necessária uma busca constante por encaminhamentos metodológicos e práticas que auxiliem os alunos na compreensão da matemática, de forma que eles consigam associá-la ao contexto em que estão inseridos, e que não haja distinção da matemática escolar e matemática da “vida”.

Considerando a quantidade de informações e tecnologias que os alunos atualmente têm acesso, o contexto escolar não pode ser distinto dessa realidade. O ensino da matemática precisa ser atrativo, despertar a curiosidade, desenvolver o raciocínio lógico e acompanhar àquelas situações extraescolares, vivenciadas por esses alunos as quais lhes proporcionam satisfação, respeitando seus interesses.

<sup>1</sup> Estabelece diretrizes para a organização curricular do ensino fundamental e do ensino médio nas escolas estaduais. Disponível em <<http://www.educacao.sp.gov.br>> Acesso em 10 de junho de 2018.

<sup>2</sup> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Disponível em <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>> Acesso em 10 de junho de 2018.

A preocupação com as formas e meios de ensinar e aprender conceitos matemáticos não é novidade, há muito tempo pesquisadores tem dedicado seus estudos na busca por recursos e encaminhamentos metodológicos que colaborem para a qualidade no ensino da matemática. Segundo Silveira e Miola (2008, p.50) “[...] muitas dessas práticas vêm sendo desenvolvidas no Brasil, especialmente a partir da década de 1970”. Através de intercâmbio com educadores matemáticos do exterior originou-se, no Brasil, alguns grupos de estudos que foram delineando o que chamamos de tendências em Educação Matemática. (FIORENTINI e LORENZATO, 2006)

Uma das tendências em Educação Matemática, bastante relatadas em artigos, teses e dissertações, são os jogos na Educação Matemática. Os jogos configuram uma excelente ferramenta auxiliadora no processo de ensino e aprendizagem. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998) ressaltam que os jogos podem ser considerados encaminhamentos metodológicos mediadores no processo de ensino e aprendizagem. Os jogos desenvolvem a capacidade de elaborar estratégias, solucionar problemas e promovem momentos de interações sociais. Crianças jovens e adolescentes gostam de jogar, unir essa estratégia ao ambiente de aprendizagem promove o enriquecimento das aulas de matemática.

Nesse sentido, este artigo apresenta os resultados de uma intervenção pedagógica, a qual aborda na prática as vantagens que os jogos aliados ao ambiente de ensino e aprendizagem da disciplina de matemática, proporcionam. O estudo foi desenvolvido pelo pressuposto da pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, junto a 22 alunos de uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental I, de uma escola privada no estado do Paraná. A estratégia utilizada foi o jogo Torre de Hanói como encaminhamento metodológico mediador no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de potenciação. A investigação teve como objetivos aplicar, contextualizar e fixar este conteúdo com o auxílio do jogo. O interesse a pesquisa partiu da indagação de alguns alunos dessa classe acerca da aplicação da potenciação em situações além da sala de aula. Para a coleta de dados foram utilizadas observações, registros de imagens e registro das situações relevantes em um diário de bordo. Os resultados apresentados apontam que é possível despertar o interesse pela matemática utilizando como recurso metodológico o jogo.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

Ao utilizar o termo jogo é muito comum associá-lo a situações de descontração e/ou objetos lúdicos, como os mais variados tipos de brinquedos. Porém, o jogo não se restringe a essa definição. É fato que atividades envolvendo jogos promovem momentos de descontração, contudo, para um artefato ou uma atividade lúdica ser considerado um jogo é necessário que se cumpram alguns critérios, caso contrário, a atividade não passará de uma brincadeira ou de um momento de descontração.

Há uma distinção entre brinquedo e jogo, Kishimoto (2017) estabelece que o jogo pode ser entendido através de três níveis de diferenciação: 1º) é o resultado de um sistema linguístico que funciona dentro de um contexto social; 2º) é um sistema de regras; 3º) e/ou é um objeto. Segundo Kishimoto (2017), o primeiro nível aponta que enquanto fato social o jogo assume a imagem, o sentido que cada sociedade lhe atribui; no segundo nível entende-se que um sistema de regras,

permite identificar em qualquer jogo uma estrutura sequencial que especifica a sua modalidade e o terceiro nível refere-se ao jogo enquanto objeto. Os três aspectos permitem uma breve compreensão do jogo. (KISHIMOTO, 2017)

A característica marcante do jogo é uso de regras. Para que determinada atividade configure um jogo ela deve possuir regras, podendo ser simples ou complexas. Para Kishimoto (2017, p.26):

A existência de regras em todos os jogos é uma característica marcante. Há regras explícitas, como no xadrez ou amarelinha, regras implícitas como na brincadeira de faz de conta, em que a menina se faz passar pela mãe que cuida da filha. São regras internas, ocultas, que ordenam e conduzem a brincadeira. (KISHIMOTO, 2017, p.26).

Considerando as características do jogo e sua sistematização entende-se que eles podem ser utilizados além da recreação, podem ser explorados no contexto educacional no que se refere ao ensino e aprendizagem. Segundo Ribeiro (2012, p.17) “[...] a inserção de jogos no contexto escolar aparece como uma possibilidade altamente significativa no processo de ensino e aprendizagem, ..., ao mesmo tempo em que se aplica ideia de aprender brincando, contribui-se para o desenvolvimento cognitivo, afetivo e social dos alunos”.

Um fator relevante a se considerar ao utilizar o jogo no contexto educacional é a promoção das interações sociais. Na visão sócio-histórica, Vygotski (1994) aponta que as interações sociais potencializam os processos de desenvolvimento do homem.

Na matemática o uso dos jogos pode contribuir na relação ensino e aprendizagem. O jogo por si, desperta o interesse no jogador e no contexto educacional, este elemento apresenta-se como um resgate ao prazer em aprender matemática, além disso, cria espaços para a imaginação possibilitando ao jogador um nível de abstração útil ao desenvolvimento cognitivo. (GRANDO, 1995).

Para Ribeiro (2012) as atividades com jogos são um caminho para o desenvolvimento de resolução de problemas. Ao utilizar esse instrumento pode-se naturalmente solucionar um problema que se encontra inserido no jogo, sendo que essa abordagem pode ser entendida como ponto de partida da atividade matemática. Um jogo, nas aulas de matemática, pode ser utilizado para dar a introdução, o desenvolvimento ou a fixação de conceitos matemáticos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998, p.46), apontam que os jogos são:

Uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p. 46)

De fato, o jogo pode ser considerado um instrumento metodológico que colabora para o desenvolvimento da matemática escolar, segundo Viginheski (2014, p.83) ele “[...] contribui ainda para a formação do pensamento lógico-

matemático, o exercício da argumentação e da organização do pensamento, tomada de atitudes, necessárias para a aprendizagem da Matemática”.

Os conteúdos matemáticos abordados no contexto escolar não podem ser dispersos, distantes da realidade dos alunos, do cotidiano, daquilo que desperta o interesse e que lhes proporciona prazer. Nesse sentido o jogo é também uma maneira de aproximar a matemática escolar com o dia a dia desses alunos.

Muito embora as crianças tenham acesso aos jogos digitais, com tecnologias avançadas, a essência do jogar, da competitividade saudável, do estímulo ao raciocínio lógico, elaboração de estratégias, se faz presente nos jogos considerados simples, feitos com materiais simples. Grandó (1995) elenca alguns tipos de jogos que podem ser utilizados nas aulas de matemática como: quebra-cabeça, jogos de fixação de conceitos, que praticam habilidade, estimulam discussão matemática mentais e computacionais.

A busca pela melhora qualitativa do ensino da matemática deve ser constante, pode-se afirmar com respaldo dos autores já citados que os jogos contribuem para o enriquecimento nas aulas de matemática. Contudo é necessário refletir sobre a matemática que se acredita ser importante aos alunos, portanto o planejamento na utilização desse recurso é indispensável para que seu uso não recaia em apenas uma atividade recreativa. É preciso pensar nos objetivos e se o jogo escolhido condiz com o interesse (faixa-etária) do aluno. Enfim, conforme Fiorentini e Morim (1990, p.03) “Nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem desta disciplina”.

### **3. METODOLOGIA**

O estudo realizado é de natureza qualitativa, pois essa forma de investigação se apoia na postura interpretacionista. (MOREIRA, 2002). A coleta de dados foi realizada através de observações, registros de imagens e anotações em um diário de bordo.

Os participantes da pesquisa foram 22 alunos do 6º ano do ensino fundamental de uma escola da rede privada de ensino do estado do Paraná. O conteúdo abordado foi o de potenciação. A escolha do conteúdo se deu a partir da curiosidade desses alunos no uso da operação de potência fora do contexto escolar.

A pesquisa foi realizada em três etapas, sendo a: 1ª) o conteúdo de potenciação foi transmitido aos alunos utilizando como recursos a explanação oral, quadro de giz, e o material apostilado, que a escola trabalha e as observações iniciaram nessa etapa; 2ª) foi realizada intervenção pedagógica, abordando o conteúdo de potenciação utilizando como recurso metodológico o jogo Torre de Hanói; 3ª) desenvolvimento da análise das contribuições que o jogo trouxe as aulas de matemática para a compreensão do conteúdo de potenciação.

A coleta de dados ocorreu durante a primeira e segunda etapa da pesquisa. A terceira etapa apresenta a análise dos resultados. A seguir se encontra o desenvolvimento de cada etapa desse estudo.

### 3.1 PRIMEIRA ETAPA: APRESENTAÇÃO DO CONTEÚDO DE POTENCIAÇÃO AOS ALUNOS

A potenciação é uma forma de representar multiplicações em que todos os fatores são iguais, Giovanni, Giovanni Junior e Castrucci (2015), destacam que dados dois números naturais  $a$  e  $n$  (com  $n > 1$ ), a expressão  $a^n$  representa um produto de  $n$  fatores iguais ao número  $a$ , ou seja:

$$a^n = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{n \text{ fatores}}$$

O conteúdo de potenciação é trabalhado no 6º ano do ensino fundamental e nesse estudo, através de observações, constatamos que o material didático (apostila) adotado pela escola onde se efetivou a pesquisa, trazia o conteúdo de potenciação principalmente, a partir de exercícios de repetição. No processo de aprendizagem da matemática a repetição pode ser necessária em alguns casos, porém o ensino não pode ser restrito a repetições. A contextualização e aplicabilidade dos conteúdos são fundamentais para o ensino de matemática de qualidade que gere significado aos alunos.

A primeira etapa da pesquisa teve duração de três aulas nas quais o conteúdo de potenciação foi abordado com a turma do 6º ano predominantemente através da explanação oral e quadro do giz. Com esses recursos foram trabalhados o cálculo, identificação dos termos e leitura de uma potência. Foram realizados exemplos no quadro de giz e em seguida foi proposto aos alunos que solucionassem os exercícios apresentados na apostila. Enfim na primeira etapa foi “cumprido” o que o material didático (apostila) propunha.

No decorrer dessas três aulas os alunos apresentaram dúvidas no processo da realização do cálculo da potência. Em alguns momentos, esses alunos, multiplicavam a base da potência por seu respectivo expoente ao invés de realizar a multiplicação dos fatores iguais. Foi necessário retomar algumas vezes o algoritmo da potenciação no quadro de giz utilizando exemplos numéricos até que todos os alunos realizassem os cálculos corretamente.

Nessa etapa da pesquisa observamos que é possível aprender através de exercícios de repetição. Porém se levantam algumas indagações acerca da percepção matemática desses alunos, ou seja, o que de fato a matemática representa para eles, qual a função da matemática? Para essas indagações Fiorentini e Miorim (1990, p.04), apresentam uma possível resposta:

[...] que outra função tem o ensino da matemática senão o ensino da matemática? É para cumprir essa tarefa fundamental que lançamos mão de todos os recursos que dispomos. Ao aluno deve ser dado o direito de aprender, não um aprender “mecânico” repetitivo, ..., mas um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade. (FIORENTINI e MIORIM, 199, p.04)

O conhecimento matemático é vasto bem como a sua aplicação. Os conceitos ensinados nas aulas de matemática não podem ser vazios de significado. Através

da interpretação do comportamento dos alunos ao desenvolverem as atividades propostas em suas apostilas, do conteúdo de potenciação, observamos que todos conseguiram desenvolver os cálculos de uma potência, porém, esse conteúdo não lhes representava nada fora do contexto escolar.

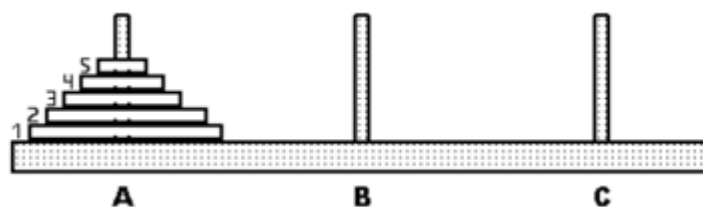
### 3.2 SEGUNDA ETAPA: INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA UTILIZANDO O JOGO TORRE DE HANÓI

Após as aulas sobre os conceitos de potências e resolução dos exercícios pelos alunos, já descritos na seção anterior, iniciamos a intervenção pedagógica, que configura a segunda etapa desse estudo e que teve duração de três aulas. As intervenções pedagógicas são relevantes e podem colaborar para mudanças e inovações, pois são consideradas:

“[...] as investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências (mudanças e inovações) destinadas a produzir avanços e melhorias nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam e posteriormente avaliação dos efeitos dessas interferências”. (DAMIANI et al., 2013, p.58)

O jogo escolhido para o desenvolvimento da intervenção pedagógica foi o Torre de Hanói. Esse jogo é considerado um quebra-cabeça que conforme a classificação de Grando (1995, p.129) “[...] são jogos lógicos que envolvem algum tipo de estratégia para vencer. O objetivo no ensino é “quebrar a cabeça””. É composto de uma base contendo três pinos onde em um dos pinos estão dispostos alguns discos em ordem crescente de diâmetro de cima para baixo, conforme a figura 1.

Figura 1 – Torre de Hanói.



(Fonte: LEM, UTFPR<sup>3</sup>)

O jogo tem como objetivo, mover todos os discos do pino A para o pino C seguindo determinadas regras: 1ª) Somente um disco pode ser movido de cada vez; 2ª) Um disco maior não pode ser posto sobre um disco menor. É possível perceber que esta atividade lúdica, configura um jogo, pois conforme a classificação proposta por Kishimoto (2017) é provido de regras. Conforme as regras, considerando a figura 1, o disco de número 5, jamais poderá ficar embaixo de um dos discos que possui numeração menor, portanto o jogador precisa estar atento a cada mudança dos discos.

<sup>3</sup> Laboratório de Ensino de Matemática – UTFPR, disponível em [www.utfpr.edu.br](http://www.utfpr.edu.br). Acesso em 10 de junho de 2018.



A esse jogo estão associadas várias lendas uma delas e a mais conhecida diz que<sup>4</sup>: há um templo Benares, situado no centro do universo onde o deus Brama criou uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Esse deus ordenou aos monges que movessem todos os discos de uma estaca para outra segundo as suas instruções. As regras são simples: apenas um disco pode ser movido de cada vez e nunca um disco maior deve ficar por cima de um disco menor. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de uma estaca para a outra, o templo desmoronaria, as pessoas seriam transformadas em pó e o mundo desapareceria.

Antes de iniciar a intervenção pedagógica, ainda no período da primeira etapa da pesquisa, foi solicitado aos alunos participantes desse estudo que realizassem uma breve pesquisa envolvendo o jogo Torre de Hanói e suas regras. Em seguida foi solicitado a esses alunos que construíssem os seus próprios jogos, como tarefa para casa, preferencialmente com materiais recicláveis. A figura 2, apresenta alguns jogos confeccionados pelos alunos.

Figura 2 – Jogo Torre de Hanói confeccionado pelos alunos.



(Fonte: Acervo dos autores)

### PRIMEIRA AULA DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Após todos os alunos confeccionarem seus jogos e estarem com eles em mãos foi dado início a intervenção pedagógica. Na primeira aula da intervenção foi permitido que os alunos manuseassem o jogo, aplicando as regras, as quais eles haviam pesquisado. Foi proposto a esses alunos o desafio de resolver o “quebra-cabeça” torre de Hanói, primeiramente transpondo dois discos de um pino ao outro com o menor número possível de movimentos. Com apenas dois discos os alunos conseguiram desenvolver com bastante rapidez de agilidade e todos obtiveram que três era o úmero mínimo de movimentos.

Em seguida foi proposto aos alunos que realizassem a transposição, agora com três discos e todos os alunos concluíram que sete era o número mínimo de movimentos.

O desafio continuou, mas agora com quatro discos. Porém com quatro discos, os alunos demoraram mais do que nos dois casos anteriores, e apresentaram diferentes repostas, como 20 movimentos, 17 movimentos, até que após algumas tentativas, concluíram que o número mínimo de movimentos era quinze.

Na sequência foi solicitado aos alunos que o quebra-cabeça fosse realizado com cinco discos. À medida que aumentavam o número de discos os alunos se

<sup>4</sup> Disponível em: <[http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/torre\\_de\\_hanoi.pdf](http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/torre_de_hanoi.pdf)>. Acesso: 10 de junho de 2018.



mostravam mais empolgados. Todos buscavam terminar com rapidez o desafio proposto. A figura 4 apresenta um dos alunos resolvendo o quebra cabeça com cinco discos.

Figura 4 – Aluno em atividade com o jogo Torre de Hanói.



(Fonte: Acervo dos autores)

Assim como com quatro discos, os alunos demoraram mais tempo e apresentaram diferentes respostas, como 33, 41, 44, 47 e 48 movimentos. Por fim um dos alunos conseguiu transpor todos os discos de um pino para o outro com 31 movimentos. Motivados pelo colega os demais alunos também conseguiram com essa quantidade de movimentos. Concluíram então que o número mínimo de movimento para cinco discos era 31 movimentos.

Para finalizar a primeira aula da intervenção pedagógica foi solicitado a esses alunos que construíssem uma tabela com o número de discos e o número mínimo de movimentos para cada quantidade de discos, conforme a tabela 1.

Tabela 1 - Número mínimo de movimento dos discos.

Número de discos	Número mínimo de movimentos
2	3
3	7
4	15
5	31

(Fonte: Elaborada pelos autores)

Ao término da aula os alunos foram questionados acerca dos conteúdos matemáticos que poderiam ser abordados com este jogo. Alguns alunos responderam que poderiam estudar as formas geométricas circulares, o diâmetro de cada disco, a contagem ao mover cada disco, além de elencarem o desenvolvimento do raciocínio lógico e da coordenação motora, porém nenhum deles mencionou que o jogo poderia abordar a potenciação.

## SEGUNDA AULA DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Na segunda aula da intervenção pedagógica, foi solicitado aos alunos que observassem a tabela construída por eles na aula anterior e que analisassem se havia relação entre o número de discos e o número mínimo de movimentos. Em um primeiro momento os alunos perceberam que à medida que aumentava o número de peças aumentava também o número mínimo de movimentos. Nesse momento foi necessária a mediação do professor, mostrando que na realidade o número mínimo de movimentos pode ser calculado através de uma expressão

numérica envolvendo a potenciação. O número mínimo de movimentos é calculado através da potência de base 2, com expoente igual ao número de discos menos o número 1.

Foi explorado no quadro de giz o número mínimo de movimentos para dois e três discos: para 2 discos:  $2^2 - 1 = 3$  movimentos; para 3 discos:  $2^3 - 1 = 7$  movimentos. Após a explanação desses dois casos foi solicitado que os alunos desenvolvessem os cálculos necessários para 4, 5 e 6 discos. A figura 5 apresenta uma tabela construída por um dos alunos com os respectivos cálculos.

Figura 5 – Tabela elaborada por um aluno.

Número de discos	Número mínimo de jogadas	Cálculo
2	3	$2^2 - 1 = 3$
3	7	$2^3 - 1 = 7$
4	15	$2^4 - 1 = 15$
5	31	$2^5 - 1 = 31$
6	63	$2^6 - 1 = 63$

(Fonte: Acervo dos autores)

Os alunos se surpreenderam ao constatarem que é possível prever através de cálculos matemáticos qual a quantidade mínima de movimentos para qualquer número de discos. Demonstraram também muita surpresa ao perceberem que a operação da potência, que haviam estudado em aulas passadas, estava presente no cálculo da previsão de número mínimo de jogadas.

Para dar continuidade foi proposto aos alunos que desenvolvessem uma expressão para o número mínimo de jogadas com 7, 10 e 100 discos. Os alunos apresentaram as expressões corretamente:  $2^7 - 1$ ;  $2^{10} - 1$ ;  $2^{100} - 1$ . Constatamos que os alunos compreenderam que existe um modelo matemático que é capaz de calcular o número mínimo de movimentos conforme a quantidade de discos. Foi proposto a esses alunos que desenvolvessem uma expressão que permitisse calcular a quantidade mínima de movimentos para qualquer quantidade de discos, por exemplo, para “n” discos e após alguns instantes os alunos apresentaram a expressão  $2^n - 1$ .

Ao término da aula observamos que os alunos participaram ativamente das atividades propostas e que se sentiram desafiados a solucionar o “quebra-cabeça” à medida que aumentava a quantidade de discos nos pinos. Além disso, demonstraram surpresa e empolgação ao perceberem que eles poderiam calcular a quantidade mínima de movimentos dos discos utilizando um cálculo matemático simples o qual aborda a potenciação.

Embora a potenciação tenha sido o principal conteúdo matemático abordado nessa aula, foi possível dar uma breve introdução aos conceitos de generalizações e fórmulas matemáticas.

### TERCEIRA AULA DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Na terceira aula da intervenção pedagógica, foi apresentada aos alunos a lenda do jogo torre de Hanói (descrita no início da seção 3.2). Os alunos ficaram curiosos e atentos a cada detalhe da lenda, principalmente no trecho onde diz que: o deus Brama criou uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma... quando todos os discos fossem transferidos de uma estaca para a outra, o templo desmoronaria, as pessoas seriam transformadas em pó e o mundo desapareceria.

Alguns alunos apresentaram qual seria a expressão para calcular a quantidade mínima de movimentos para 64 discos:  $2^{64} - 1$ . Então foi proposto a todos esses alunos que procurassem a solução dessa expressão. Alguns buscaram desenvolver o cálculo, no entanto, outros disseram que o fato do número do expoente ser alto, ficaria difícil encontrar a solução. Foi apresentada aos alunos uma possível maneira de solucionar o problema, mostrando que é possível “abrir” a potência  $2^{64}$  em multiplicações de potências com expoentes menores, dando assim a introdução de uma das propriedades da potenciação “na multiplicação de potências de mesma base, repete-se a base e adiciona os expoentes” (Giovanni, Giovanni Junior e Castrucci, 2015). A figura 6 apresenta como foi realizada a explicação aos alunos.

Figura 6 – Explicação do cálculo da potência com expoente 64.

$$2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^4 = 2^{64}$$

$$1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 16$$

(Fonte: Elaborada pelos autores)

É possível verificar que o cálculo pode ser realizado, porém mesmo com o auxílio da calculadora, demandaria tempo e alguns modelos de calculadoras não iriam apresentar todas as classes e ordens que o resultado final possui devido ao espaço disponível em seus visores. Portanto, o resultado final foi apresentado aos alunos  $2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$  movimentos.

Para finalizar atividade, foi lançada uma questão aos alunos: “Se cada movimento fosse realizado no período de 1 minuto, em quantos dias os monges iriam concluir o jogo?”. Essa pergunta despertou ainda mais a curiosidade dos alunos, pois dessa forma, conforme a lenda, eles poderiam prever o desaparecimento do mundo. Considerando que um dia tem 24 horas e que cada hora tem 60 minutos os alunos concluíram que um dia tem 1440 minutos, portanto seria necessário dividir o número mínimo de jogadas com 64 discos e dividi-lo por 1440, o que resultaria na quantidade de dias. Com o auxílio do professor, os alunos desenvolveram uma fórmula para chegar a esse resultado:  $(2^{64} - 1) \div 1440$ .

Ao término da aula, os alunos puderam manusear seus jogos, sendo que eles mesmos organizaram um torneio na sala de aula, onde aquele que conseguisse concluir o quebra-cabeça Torre de Hanói, com cinco discos em menos tempo era o vencedor. A figura 7 apresenta os momentos de interações e torcida pelos colegas que estavam competindo.

Figura 7 – Alunos em atividade com o jogo.



(Fonte: Acervo dos autores)

### 3.3 TERCEIRA ETAPA: ANÁLISE DAS CONTRIBUIÇÕES DO JOGO AS AULAS DE MATEMÁTICA

Durante o desenvolvimento da intervenção pedagógica com o auxílio do jogo Torre Hanói, foi possível perceber a empolgação dos alunos ao trabalharem com um objeto diferenciado na aula. A escolha do jogo ou qualquer tipo de material concreto a ser utilizado nas aulas de matemática deve ser bem pensado e planejado pois conforme Fiorentini e Miorim (1990, p.02) “[...] por trás de cada material, se esconde uma visão de educação, de matemática, do homem e de mundo; ou seja existe subjacente ao material, uma proposta pedagógica que o justifica”.

O jogo trouxe as aulas de matemática momentos de desenvolvimento do raciocínio lógico e coordenação motora, para Grandó (1995, p.155) “[...] a competição inerente aos jogos garante-lhes o dinamismo, o movimento, proporcionando o interesse e envolvimento naturais do aluno e contribuindo para o seu desenvolvimento social, intelectual e afetivo”.

Uma das preocupações desse estudo estava em mostrar aos alunos que a matemática escolar pode ser utilizada além das “paredes da escola”, segundo D’Ambrosio (1985, p.15) “na matemática escolar o aluno não vivencia situações de investigação exploração e descobrimento”, evidentemente essa situação não pode ser generalizada, mas infelizmente é o que ocorre na maioria das escolas. Ao relacionar o conteúdo de potenciação com a fórmula matemática utilizada para prever a quantidade mínima de movimentos, para cada quantidade de discos, no jogo Torre de Hanói, os alunos puderam verificar na prática uma das aplicações que possui esse conteúdo. Nesse sentido os alunos constataram a aplicabilidade da matemática escolar, mesmo fora contexto escola.

Uma das características que o jogo no ensino da Matemática possui é o auxílio no desenvolvimento em atividades de resolução de problemas, para Ribeiro (2012, p.20) “[...] compreendendo o jogo como uma atividade de resolução de problemas, ele é um problema que desencadeia a construção de novos conceitos ou ideias matemáticas, de forma motivadora, prazerosa e desafiadora”. Nesse sentido, foi possível perceber que a cada desafio lançado aos alunos, a cada problema gerado nas aulas da intervenção, o jogo se mostrava como ferramenta auxiliadora na elaboração de estratégias e na busca por soluções.

Por fim, os jogos proporcionaram momentos de interações sociais, descontração, descaracterizando a formalidade excessiva que por ventura possa haver nas aulas de matemática. Para Vygotski (1994) momentos de interações sociais são altamente relevantes no processo de desenvolvimento humano, considerando esse aspecto, Grandó (1995, p.155)

#### **4. CONSIDERAÇÕES FINAIS**

O conhecimento matemático é fundamental para as diversas situações, desde as mais simples tarefas do cotidiano até o desenvolvimento das mais complexas tecnologias. A sua aplicabilidade é notável em vários contextos, além de possuir relação com as demais áreas do conhecimento. Porém, ainda existe uma desconexão com a matemática ensinada na escola e a matemática da “vida”. Nesse sentido, visando à mudança nessa situação, o professor de matemática necessita buscar por formas, estratégias e encaminhamentos que aproximem a matemática escolar de suas reais aplicações além das inúmeras listas de exercícios.

Esse estudo permitiu verificar, que o uso dos jogos no ensino da matemática, podem aproximar os conceitos matemáticos ensinados em sala de aula às situações que envolvem a matemática fora do contexto escolar. A investigação realizada foi desenvolvida com alunos do 6º ano e sabe-se que na faixa etária que esses alunos se encontram as atividades de descontração e competição são muito procuradas. Os jogos tecnológicos se evidenciam nessa busca, porém o lúdico, as regras e as características despertadas ao desenvolver uma atividade com jogos está na essência do jogar, seja o jogo confeccionado de um material simples ou com a mais atual tecnologia digital.

O jogo Torre de Hanói, se mostrou uma excelente ferramenta auxiliadora, na aplicação e compreensão do conteúdo de potenciação para o 6º ano. Os alunos demonstraram interesse e satisfação em estar em atividade com o jogo à medida que desenvolviam estratégias para solucionar os problemas que foram propostos durante a intervenção. Ressaltamos a participação ativa desses alunos desde a confecção de seus próprios jogos até a generalização da fórmula que permite calcular o número mínimo de movimentos para uma quantidade  $n$  de discos.

Constatamos que o jogo Torre de Hanói foi eficiente ao que esse estudo se propôs, os objetivos foram alcançados, certamente o êxito na intervenção pedagógica aconteceu devido ao planejamento das atividades. Grandó (1995), Ribeiro (2012) e Fiorentini e Miorim (1990), concordam no que diz respeito ao planejamento e a escolha do material ou jogo utilizado nas aulas de matemática, esses autores ressaltam que as aulas envolvendo jogos devem ser pensadas e planejadas para que o jogo não seja uma atividade desconectada da aprendizagem.

# The game Tower of Hanoi as a mediator tool in the teaching of powers: a study with students of the 6<sup>th</sup> year of elementary school

## ABSTRACT

This paper aims to present the results of a pedagogical intervention using the game Tower of Hanoi as methodological forwarding mediator in the process of teaching and learning the content of power. The study was developed with 22 students from a 6th grade elementary school class from a private school in the state of Paraná. The objective of the research was to apply, contextualize and fix content of powers with the aid of the game. The interest in the research started from the inquiry of some students of this class about the application of power in situations beyond the classroom. The methodology used for analysis and data collection was qualitative mediated by the interpretive approach. To collect data were used observations, capture of images and recording of relevant situations in a logbook. The results show that it is possible to arouse interest in mathematics using this game as a methodological resource.

**KEYWORDS:** Games. Mathematics teaching. Tower of Hanoi. Articles.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**. Matemática. Ensino fundamental. Terceiro e quarto ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

D'AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.

DAMIANI, Magda Floriana; ROCHEORT, Renato Siqueira; CASTRO, Rafael Fonseca de; DARIZ, Marion Rodrigues; PINHEIRO, Silva Siqueira. **Discutindo pesquisa do tipo intervenção pedagógica**. Cadernos de Educação – Faculdade de Educação, UFPeL, n.45, 2013.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M, A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

GIOVANNI J.R., GIOVANNI J.R.J, CASTRUCCI B, **A Conquista da Matemática**. São Paulo, FTD, 2015.

GRANDO, R. C. **O Jogo e suas Possibilidades metodológicas no Processo Ensino-Aprendizagem da Matemática**. Campinas, SP,1995. 175p. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação, UNICAMP

KISHIMOTO, Tizuko M. (Org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. São Paulo: Cortez, 2017.

MOREIRA, D. A. **O método fenomenológico na pesquisa**. São Paulo: Pioneira Thomson, 2002.

RIBEIRO, D, F. **Jogos e modelagem na educação matemática**. Curitiba: InterSaberes, 2012.

SILVEIRA, E.; MIOLA, R. J. **Professor -Pesquisador em Educação Matemática**. Curitiba: Ibpex, 2008.

VIGINHESKI, Lúcia Virginia Mamcasz. **Uma abordagem para o ensino de produtos notáveis para uma classe inclusiva: o caso de uma aluna com deficiência visual**.



Dissertação mestrado – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa. 2014.

VYGOTSKI, Lev Semenovich. **A formação Social da Mente**. 5 eds. São Paulo: Martins Fontes, 1994

**Recebido:** 2019-02-27

**Aprovado:** 2019-02-27

**DOI:** 10.3895/rbect.v12n1.9698

**Como citar:** OLIVEIRA, B. A. H.; BRIM, J. F. H.; PINHEIRO, N. A. M. O jogo Torre de Hanói como ferramenta mediadora no ensino de potências: um estudo com os alunos do 6º ano do ensino fundamental. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, v. 12, n. 1, 2019. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/9698>>. Acesso em: xxx.

**Correspondência:** Bianca Aparecida Holm De Oliveira - biaholm2018@gmail.com

**Direito autoral:** Este artigo está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.

