

# Análise de erros como método indicador e avaliador de conceitos subsunçores: o caso dos licenciandos em matemática da Universidade Federal de Santa Maria

## RESUMO

**Carmen Vieira Mathias**  
[carmenmathias@gmail.com](mailto:carmenmathias@gmail.com)  
[0000-0001-5667-159X](https://orcid.org/0000-0001-5667-159X)  
Universidade Federal de Santa  
Maria – UFSM

**Mateus Both**  
[mateusboth@outlook.com](mailto:mateusboth@outlook.com)  
[0000-0001-7769-3683](https://orcid.org/0000-0001-7769-3683)  
Instituto Federal de Educação,  
Ciência e Tecnologia do Rio Grande  
do Sul, IFRS

**Maria Cecília Pereira Santarosa**  
[maria-cecilia.santarosa@ufsm.br](mailto:maria-cecilia.santarosa@ufsm.br)  
[0000-0002-7656-9100](https://orcid.org/0000-0002-7656-9100)  
Universidade Federal de Santa  
Maria - UFSM

Neste artigo, são apresentados os resultados de uma pesquisa que teve o objetivo de investigar os conceitos subsunçores presentes na estrutura cognitiva de alunos ingressantes no curso de Matemática, sobre conceitos de variação de grandezas geométricas. A partir disto, propor alternativas promotoras de uma aprendizagem significativa desses conceitos, e avaliar indícios deste tipo de aprendizagem. A presença de conceitos subsunçores foi verificada por meio da análise dos erros cometidos pelos alunos. Essa análise serviu para fundamentar a elaboração de atividades desenvolvidas no Moodle, preparadas com o auxílio do software GeoGebra, considerando a integração entre conteúdos do Ensino Médio e do Ensino Superior, com o intuito de auxiliar os alunos no processo de re/construção dos conhecimentos prévios. Os resultados da pesquisa apontam a metodologia da Análise de Erros como referencial compatível no processo de no resgate e construção dos conhecimentos prévios para a aprendizagem de novos conceitos. Além disso, utilizar o software GeoGebra auxiliou na reconstrução de conceitos ao trabalhar com a ideia de variação de forma mais intuitiva, e permitir a investigação sobre as mesmas.

**PALAVRAS-CHAVE:** GeoGebra. Aprendizagem significativa. Análise de erros. Grandezas geométricas. Conhecimentos prévios.

## INTRODUÇÃO

A aquisição do conhecimento, conforme Ausubel (1963, 2000), está relacionada com a aquisição de significados, que ocorre pelo processo de interação entre aquilo a ser aprendido e aquilo que se sabe. Para que ocorra uma aprendizagem significativa, espera-se que o aluno, de acordo com Lemos (2011), seja capaz de captar e negociar os significados, além de aprender significativamente, tipo de aprendizagem que se dá no processo de interação entre os conhecimentos que o aluno já tem e aqueles a serem aprendidos.

Uma forma de dar maior atenção aos processos de aprendizagem é por meio da reflexão sobre o erro. De acordo com Torre (2007, p. 48), “a reflexão sobre o erro pode se tornar uma estratégia para dar primazia aos processos em educação”.

A reflexão sobre o erro leva à Análise de Erros, que é uma observação sobre o que levou o aluno a cometer determinado equívoco e como se pode corrigi-lo de forma a evitá-lo futuramente. Por outro lado, o “erro” pode ser interpretado como uma ausência ou má formação de conhecimentos prévios necessários para a resolução de novas situações-problema.

Neste artigo, foram abordados conteúdos que envolvem áreas e funções similares às utilizadas por Arcavi e Hadas (2000), os quais descrevem atividades envolvendo relações entre Geometria e funções de forma a trabalhar com suas diferentes representações com o uso do software Inventor Geometry. Os autores descrevem o fluxo da atividade e a maneira como as diferentes ideias são interligadas em diferentes representações. Com esta pesquisa, buscou-se descobrir que conhecimentos prévios os alunos egressos do Ensino Médio que escolheram o curso de Matemática tinham sobre esses tópicos, e se esses conhecimentos eram suficientes, isto é, se possuem os subsunçores estáveis e inter-relacionados, para novas aprendizagens de forma significativa. Para verificar esse aspecto, optou-se por utilizar a metodologia de Análise de Erros, já que “o erro é uma variável concomitante ao processo educativo, porque não é possível avançar em um longo e desconhecido caminho sem se equivocar. Dito mais peremptoriamente: não há aprendizagem isenta de erros” (TORRE 2007, p. 27).

Assim, ao focar nos erros dos alunos, é possível verificar aquilo que eles sabem. Esse conhecimento foi analisado posteriormente sob a ótica da Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), pois, de acordo com Ausubel (1978, p. iv apud MOREIRA, 2006, p. 13), “[...] o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigüe isso e ensine-o de acordo”.

A partir disso, foram propostas novas estratégias de ensino com a utilização de ambientes computacionais, como o GeoGebra e o Moodle, visando auxiliar os alunos no processo de aprendizagem e “estabelecer novas formas de aprender” (GIRALDO; ROQUE, p. 34, 2014). Optou-se por trabalhar especificamente com o GeoGebra por ser este um ambiente dinâmico, que, para Arcavi e Hadas (2000, p. 25) (tradução dos autores desta pesquisa) “[...] não só permitem aos estudantes construir figuras com determinadas propriedades e visualizá-las, mas também permitem ao usuário transformá-las em tempo real”.

Assim, esta pesquisa teve por objetivo geral investigar possíveis subsunçores existentes na estrutura cognitiva de alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática sobre conceitos de variação, e propor alternativas para que

apresentem indícios de aprendizagem significativa sobre esses conceitos, bem como avaliar estes indícios.

### **SOBRE A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA (TAS)**

Nesta pesquisa, utilizou-se como aporte teórico a TAS, difundida no Brasil por Moreira (2006, 2012), que define a aprendizagem significativa como “um processo pelo qual uma nova informação se relaciona, de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária, a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo” (2006, p. 14-15), ou seja, quando ocorre uma interação entre um subsunçor com aquilo a ser aprendido. Um subsunçor, subsumer no original em inglês, é aquilo que o aluno já sabe, um conceito, uma ideia, um conhecimento prévio. Conforme Moreira (2012, p. 6), “a atribuição de significados a novos conhecimentos depende da existência de conhecimentos prévios especificamente relevantes e da interação com eles”. Assim, dada a interação do subsunçor com o aquilo a ser aprendido este, o subsunçor, se modifica e adquire novo significado ao mesmo tempo em que reforça os já existentes.

Os subsunçores determinam o nível da estabilidade cognitiva do sujeito, devido a sua dinamicidade e a sua variação ao longo das aprendizagens significativas pelas quais o sujeito passa, onde eles podem vir a evoluir ou involuir. Deriva-se disso a definição de estrutura cognitiva, utilizada no âmbito da TAS, que é o conjunto hierárquico de subsunçores dinamicamente inter-relacionados. Dessa forma, a aprendizagem significativa é caracterizada

Por uma interação (não uma simples associação), entre aspectos específicos e relevantes da estrutura cognitiva e as novas informações, pelos quais estas adquirem significado e são integradas a estrutura cognitiva de maneira não arbitrária e não literal, contribuindo para a diferenciação, elaboração e estabilidade dos subsunçores preexistentes e, conseqüentemente, da própria estrutura cognitiva (MOREIRA, 2006, p. 16).

Em oposição à aprendizagem significativa, existe a aprendizagem mecânica, que é aquela em que não há interação entre a nova informação e as informações que o aluno já sabe, e é armazenada de forma literal e arbitrária na estrutura cognitiva do sujeito. Conforme Moreira (2012), seria a popularmente chamada “decoreba”. Entretanto, apesar dessa oposição entre ambas, elas não são dicotômicas, e é possível ocorrer os dois tipos de aprendizagem em um mesmo conteúdo.

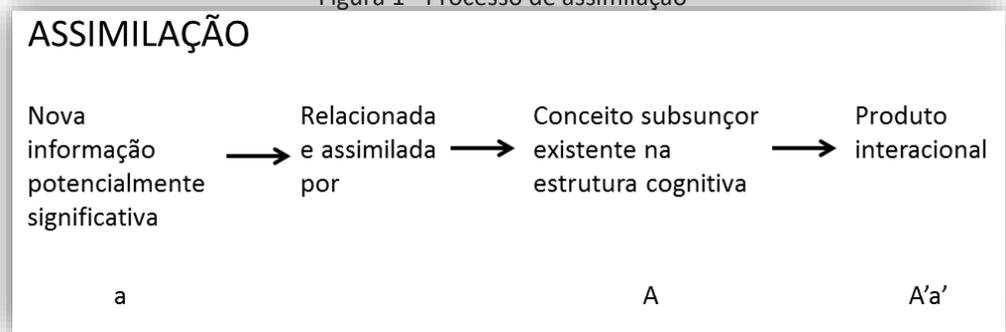
Para que a aprendizagem significativa ocorra, é necessário, conforme Moreira (2006), que o material utilizado no ensino consiga se relacionar e se incorporar à estrutura cognitiva, aos subsunçores, de uma maneira não arbitrária e não literal. Um material que possibilite isso é dito potencialmente significativo, sendo que a aprendizagem somente ocorrerá se o material tiver significado lógico. Assim, para que a aprendizagem efetivamente ocorra, o aprendiz deve ter em sua estrutura cognitiva os subsunçores, com os quais o conhecimento a ser aprendido visa se relacionar.

Além disso, para que a aprendizagem seja significativa, o aluno deve querer aprender de forma significativa e relacionar as informações, pois, segundo Moreira (2012, p. 12), “é o aluno que atribui significados aos materiais de aprendizagem e

os significados atribuídos podem não ser aqueles aceitos no contexto da matéria de ensino”, o que vem a apresentar o caráter idiossincrático da aprendizagem significativa, pois a aprendizagem sem a atribuição de significados pessoais seria mecânica.

A fim de propiciar uma compreensão de como ocorre o processo de aquisição e organização de significados na estrutura cognitiva, o autor apresenta o “princípio de assimilação”, exemplificado pela figura 1. Assim, o fruto do processo interacional de uma aprendizagem significativa é o novo significado de  $a'$  e a modificação do subsunçor A, que passa a ser  $A'$ . Apresenta-se assim, novamente, o caráter idiossincrático existente na aprendizagem significativa, pois  $a'$  tem um significado pessoal que é diferente de  $a$ . Aqui se ressalta a possibilidade de que o aprendiz poderá não ter o significado correto e formalmente aceito, afinal  $a'$  é diferente de  $a'$ .

Figura 1 - Processo de assimilação



(Fonte: MOREIRA, 2006 p. 29)

### SOBRE A ANÁLISE DE ERROS

Entende-se a Análise de Erros como a análise das dificuldades evidenciadas nas produções escritas dos alunos. Trata-se de analisar as respostas dos alunos, tentar compreender porque erraram e elaborar formas de sanar tal erro (CURY, 2012).

Em Cury (2013), foi apresentado um exemplo de como realizar a Análise de Erros com o conteúdo de Pré-Cálculo e de um primeiro curso de Cálculo e na sequência foi feita a apresentação de forma detalhada da metodologia a ser empregada em uma pesquisa de Análise de Erros, que é derivada da análise de conteúdo proposta por Bardin (1977). Essa análise de conteúdo tem três etapas para análise de conteúdo: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Na fase de pré-análise, deve ser feita uma “leitura flutuante” e selecionado o tipo de respostas que serão consideradas, podendo ser descartadas aquelas que estiverem em branco ou não apresentarem resolução. Na segunda etapa, deve-se fazer a unitarização e categorização do material obtido, o que, na presente pesquisa foi realizado com base nas categorias apresentadas por Torre (2007), descritas na sequência. Já no tratamento dos resultados, é feita uma descrição das categorias com a apresentação dos resultados obtidos, e deve-se fazer uma inferência e interpretação, de forma a ampliar a compreensão e assim poder

utilizar tal compreensão para desenvolver estratégias de ensino que ajudem os alunos a superarem os erros.

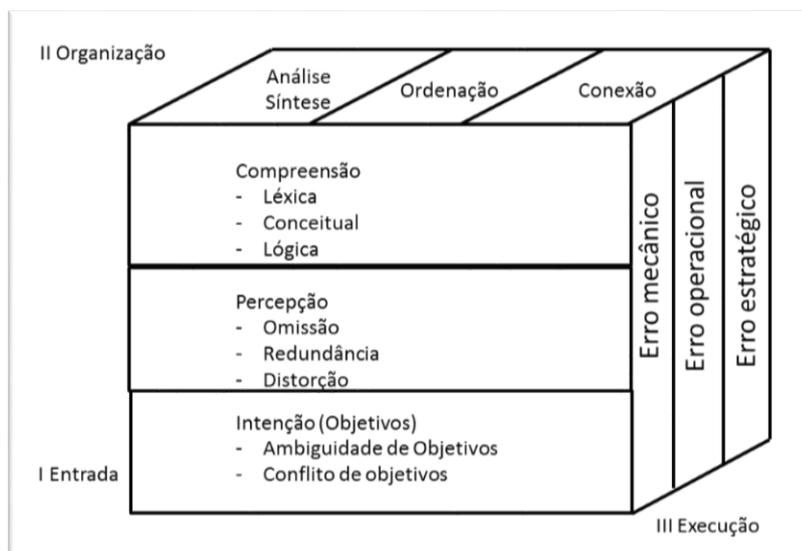
Uma maneira de permitir uma adaptação da prática se dá pela categorização e classificação dos erros à qual Torre (2007) propõe um Modelo de Análise Didática do Erro (MADE), que é exemplificado pela figura 2.

O MADE consiste em três momentos: entrada, organização e execução, que são, basicamente, as três etapas que ocorrem quando o ser humano processa informação: ele recebe a informação (entrada), analisa-a, organiza-a e escolhe o que fazer (organização) e efetua o que decidiu (execução). Cada um desses momentos se subdivide em:

Erros de entrada: São os erros de interpretação das informações dadas, sejam estas inadequadas ou insuficientes. Os quais podem ocorrer em três planos: intenção, percepção e compreensão.

a) Os erros de intenção são aqueles que podem ocorrer por uma incompreensão do objetivo. Nesse caso, eles são devidos à falta de maturidade do aluno, por demandarem objetivos além do patamar de capacitação em que a criança se encontra. Uma última forma é o por conflito de objetivos, que são as situações em que os alunos “criam” objetivos além dos propostos pelo professor, desviando-se assim do foco da tarefa.

Figura 2 - Modelo de Análise Didática de Erros (MADE).



(Fonte: Torre 2007 p.108)

b) Nos erros de percepção, ocorre uma distorção, ou seja, a informação é ambígua, imprecisa ou fora do domínio cognitivo do aluno e podem provir também de uma tentativa de simplificar uma informação complexa.

c) Os erros de compreensão são aqueles devidos a limitações na compreensão léxica, conceitual ou lógica da tarefa, ao desconhecimento do significado de determinada palavra ou símbolo, da definição de determinado termo ou de falhas no raciocínio.

Erros de Organização: São aqueles que se devem à maneira como o aluno organiza as informações recebidas. Podem ocorrer na análise e síntese das

informações, ao identificar as características relevantes e visualizar os passos a seguir, como ao incluir informações com base na experiência e intuição. Também podem ocorrer devido à ordenação que ocorre pelo uso de uma inadequada sequência de passos ou pela alteração da ordem a ser seguida. Por fim, há os de conexão e interferências, que são aqueles que ocorrem quando há uma interferência entre o conceito teórico e o modelo empírico conhecido ou quando não se consegue projetar o conhecimento numa nova situação.

Erros de execução: São comumente tidos como equívocos. Podem ser mecânicos ou lapsos, como a omissão de letras ou alteração de um sinal matemático por outro; erros operacionais e de distração, geralmente causados pelo nervosismo; por fim, podem ser erros estratégicos, que ocorrem quando o aluno utiliza uma estratégia não apropriada para a resolução do problema.

### **SOBRE A ANÁLISE DE ERROS E A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**

Conforme exposto, o MADE, proposto por Torre (2007), classifica o erro em três tipos: de entrada, de organização e de execução. Aqui é importante salientar que eles são caracterizados como “erros de entrada”, onde o aluno fica suscetível a falhas na intenção, na percepção ou na compreensão podem não ser responsabilidade única e exclusiva do aluno, mas de um ensino mal executado e direcionado. Nesse caso, os erros de organização e de execução podem ser o reflexo de um ensino deficiente. Portanto, a fim de refletir sobre os pressupostos teóricos da TAS, a partir de uma metodologia pautada na Análise de erros, deve-se considerar que, no contexto deste trabalho, tal metodologia foi útil por sua eficiência em detectar os conhecimentos prévios dos estudantes, externalizados em situações-problema propostas num momento anterior à apresentação do material de ensino.

Assim, a fim de relacionar a TAS com a metodologia da análise de erro, é possível, inicialmente, interpretar o erro como sendo a ausência de conceitos subsunçores adequados ou necessários para novas aprendizagens, na estrutura cognitiva do aprendiz. Na perspectiva da TAS, existe o interesse pelo processo cognitivo do aluno no contexto da “pedagogia do erro”, pois é nesse tipo de concepção que o professor poderá analisar sob quais conhecimentos prévios podem repousar os novos conhecimentos adquiridos e em que medida as experiências anteriores servem de ponte para a aquisição dos novos conceitos. De acordo com Ausubel (2000), “o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe” (apud MOREIRA, 2006, p. 13). Nesse sentido, a metodologia adotada parece ser um instrumento eficiente para a análise dos conhecimentos e experiências prévias do aprendiz.

Ocorre que, na perspectiva da Psicologia Cognitiva, o processo de aprendizagem, que pode ou não ser significativa, e os esquemas apresentados pelo aprendiz para dar conta de uma determinada situação podem não ser eficientes. Se, por um lado, desestabilizar o aluno para que formule novos esquemas é proporcionar oportunidade para o seu desenvolvimento cognitivo a partir da análise dos erros por ele cometidos, por outro lado, o aluno poderá não externalizar esse “erro”, o que pedagogicamente é prejudicial para o seu desenvolvimento cognitivo. Se não mostrar o seu “engano”, o professor não terá

informações suficientes para recriar novas estratégias de ensino, e o aluno poderá aprender forçadamente, de forma mecânica.

A aprendizagem poderá ser significativa por meio da re/construção dos conceitos subsunçores malformados, identificados via análise de erros cometidos, ao interagirem com as estratégias de mudança empregadas, num processo idiossincrático por parte do aprendiz, o que permite a relação entre informações relevantes, novas e já existentes na sua estrutura cognitiva. Cabe ao professor, a partir da identificação dos conhecimentos prévios do aluno ou ausência deles, pautar o ensino de forma a colaborar com os processos da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora, responsáveis por uma aprendizagem significativa.

## **PROCEDIMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS**

Esta pesquisa foi classificada como um estudo de caso, na qual se empregou uma abordagem quanti-qualitativa, utilizando a análise de erros de forma a fundamentar os estudos teóricos e servir como técnica de coleta e análise de dados, em conjunto com a análise de conteúdo proposta por Bardin (1977). Na análise qualitativa, foram identificados e analisados os tipos de erro, enquanto que na quantitativa foi apresentada a quantidade de erros em cada uma das questões e suas categorias segundo o MADE.

Para a realização desta pesquisa, foram empregados os seguintes instrumentos: questionário, teste diagnóstico, entrevistas, atividades potencialmente significativas e questão avaliativa.

Este trabalho foi desenvolvido com os alunos ingressantes no ano de 2015 do curso de Matemática Diurno de uma Universidade Federal. Na primeira etapa da pesquisa, foi aplicado um questionário, elaborado com base em trabalhos similares, como o de Lima (2010), e um levantamento das dificuldades apresentadas pelos alunos. Esses instrumentos tiveram por objetivo conhecer o perfil dos participantes e suas principais dificuldades em questões que necessitem de subsunçores referentes a relações entre grandezas geométricas. As questões aplicadas serviram como ferramentas para verificação da existência dos subsunçores desejados na estrutura cognitiva dos alunos, tais como: Porcentagem, Área, Perímetro, Semelhança, Funções, Gráficos, Propriedades de Figuras Planas, Dependência de Variáveis, além das habilidades para interpretar matematicamente uma situação-problema, relacionar variáveis e suas dependências e esboçar gráficos.

Na primeira etapa, levou-se em consideração um critério de inclusão inicial: os alunos participantes deveriam estar matriculados na disciplina de Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática I, do curso de Licenciatura em Matemática, no primeiro semestre de 2015, e estar em sala de aula na data em que o questionário e o levantamento das dificuldades foram aplicados. Dessa forma, 24 alunos cumpriram esse requisito. A escolha de tal disciplina foi uma forma de selecionar alunos que já tivessem noções de uso do GeoGebra<sup>1</sup>, para o desenvolvimento da atividade na etapa seguinte. Para preservar a identidade dos alunos, eles foram representados por  $A_i$ , em que  $i$  representa um número atribuído de forma aleatória ao participante da pesquisa. Para identificar as dificuldades, foi empregado o método da Análise de Erros, os quais foram categorizados conforme

o MADE, sendo que a Análise de Erros consistiu em uma pré-análise e exploração do material e tratamento dos resultados.

Na segunda etapa, foi proposto aos alunos da disciplina de Cálculo I, do segundo semestre de 2015, o desenvolvimento e aplicação de um material instrucional potencialmente significativo. O desenvolvimento desse material ocorreu por meio da escolha de seis questões que visaram se relacionar com a estrutura cognitiva do aluno, tendo por base o levantamento das dificuldades, e sua aplicação ocorreu por meio do AVEA Moodle, apresentando assim um caráter de ensino a distância. Para a análise da atividade potencialmente significativa e comparação do desempenho dos alunos, foram considerados apenas aqueles que realizaram o teste diagnóstico na etapa inicial e estavam matriculados em Cálculo I, totalizando 15 aptos a participar, dos quais 11 iniciaram a atividade e nove concluíram-na. De maneira concomitante, foram realizadas entrevistas a respeito do levantamento das dificuldades observadas com os participantes de ambas as etapas do trabalho. Tal atividade visou dar um retorno aos que responderam o teste diagnóstico e auxiliá-los a elucidar possíveis dificuldades existentes nas relações entre grandezas geométricas, num processo de re/construção dos conceitos prévios necessários para a aprendizagem desse novo conteúdo.

Já na terceira etapa, foi aplicada a questão avaliativa onde a partir de 11 questões selecionadas a respeito de grandezas geométricas, foi realizado um sorteio de uma questão por aluno, na disciplina de Cálculo I. A aplicação dessa questão teve o intuito de verificar o processo de re/construção dos subsunçores na estrutura cognitiva dos alunos e a ocorrência de aprendizagem significativa.

Por fim, na quarta etapa, no decorrer e após a aplicação da atividade, foi realizada a avaliação da eficiência e aplicabilidade do material instrucional no que tange a possíveis evidências de aprendizagem significativa e/ou possível re/construção de conceitos subsunçores básicos para uma aprendizagem significativa do tema relacionado às relações geométricas funcionais.

## LEVANTAMENTO DAS DIFICULDADES

Dos 24 alunos que tiveram suas respostas analisadas, 22 estavam matriculados no primeiro semestre do Curso de Matemática. Destes, 19 eram estudantes da licenciatura e três eram alunos do bacharelado. Também foram analisadas as respostas de dois alunos que cursavam o sexto semestre do curso de licenciatura, pois estes cursavam a disciplina de Recursos Tecnológicos no Ensino de Matemática I. Entre os participantes, 21 alunos cursaram toda a vida escolar em escola pública.

Na análise dos dados, percebeu-se que a maioria das questões não foi resolvida, e apenas uma pequena parte das respostas foi considerada correta. O alto índice de respostas em branco é preocupante, sendo que há um aumento gradativo no número de respostas em branco no decorrer do levantamento das dificuldades, possivelmente relacionado à motivação e empenho dos alunos na resolução das questões.

No quadro 1, é exposta a quantidade de erros em cada categoria, conforme a classificação apresentada na metodologia.

Quadro 1 - Frequência de erros

Dimensões do erro	Tipo de erro	Particularidades	Frequência
Entrada	Intenção	Conflito de objetivos	14
		Incompreensão de objetivos	11
	Percepção da informação	Distorção	1
	Compreensão	Conceitual	34
Lógica		8	
Organização	Análise e síntese		22
	Conexão e inferência		20
	Ordenação		1
Execução	Erro Operacional		6
	Erro estratégico		36

(Fonte: Elaborado pelos autores)

Por meio da análise do quadro 1, percebe-se que a maior concentração de erros está relacionada àqueles classificados como erros de estratégia, seguidos por erros classificados como de compreensão conceitual. A partir da observação dessa concentração, reforça-se a necessidade de se desenvolver atividades com os alunos, focando nas escolhas das estratégias a serem utilizadas, visto que ocorreu, prioritariamente, o uso de tentativa e erro e o uso de subsunçores aplicáveis a situações lineares, situações em que a aplicação destes não era adequada. Reforça-se também a necessidade do desenvolvimento dos conceitos necessários para a resolução das situações problema.

Seguindo com a análise do quadro 1, têm-se os erros classificados como de intenção e de conexão e inferência. Os erros de conflito de objetivo são devidos a desvios por parte dos alunos do que foi solicitado nas questões. Os erros de conexão e inferência foram derivados da influência das figuras e de erros cometidos em itens anteriores. Esses tópicos foram trabalhados com os alunos na atividade potencialmente significativa.

Já os erros de análise e síntese, demonstraram a dificuldade dos alunos em dar continuidade aos exercícios, que ficaram incompletos. Tais erros também podem ser devidos à falta de empenho dos estudantes, já que essa atividade “não valia nota”.

Destaca-se ainda que a maioria dos erros ocorreu na dimensão da entrada, o que pode ser consequência de um ensino não direcionado ou mal formulado, e, nesse caso, os demais erros seriam todos em decorrência disso.

Para exemplificar o procedimento realizado apresenta-se parte da análise da questão 1-a

**Questão 1:** (Adaptada ENEM 2013) A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça.

a) Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento esses lados foram

reduzidos em 20%. A área da base dessa peça, após o cozimento foi reduzida em quantos  $\text{cm}^2$ ?

Nesta questão os alunos A3, A6, A11 e A21 cometeram erro de intenção por conflito de objetivos ao obter o valor da área da peça apenas a redução dos lados,  $288 \text{ cm}^2$ , ao invés do valor de em quantos  $\text{cm}^2$  a área foi reduzida, tendo então, a questão considerada como parcialmente correta. Como exemplo, na Figura 5 encontra-se a resolução de A11 na qual ele obteve o valor da área após a redução dos lados ( $288 \text{ cm}^2$ ).

Figura 3 - Resolução da questão 1 item a do aluno A11

Handwritten work for Figure 3:

Left side:

$$\begin{aligned} a) 100\% &\rightarrow 30 \\ 80\% &\rightarrow x \\ x &= \frac{240}{16} \\ x &= 24 \text{ cm} \end{aligned}$$

Right side:

$$\begin{aligned} 100\% &\rightarrow 15 \\ 80\% &\rightarrow x \\ x &= \frac{120}{10} \\ x &= 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

Diagram: A rectangle with height 12 and width 24, labeled with area  $288 \text{ m}^2$ .

(Fonte: participantes da pesquisa)

O aluno A6, ainda apresentou erro operacional ao cometer erros nos cálculos, assim como os alunos A1, A8, A18. As respostas apresentadas por eles foram consideradas como parcialmente corretas, devido ao fato de que os objetivos propostos para a questão foram atingidos, apesar dos erros de cálculo. Na Figura 4, é apresentada a resolução do aluno A6.

Figura 4 - Resolução da questão 1 item a do aluno A6

Handwritten work for Figure 4:

Left side:

$$\begin{aligned} a) & \text{Rectangle with width } 30 \text{ and height } 15 \\ A &= b \cdot h \\ A &= 30 \cdot 15 \\ A &= 450 \end{aligned}$$

Right side:

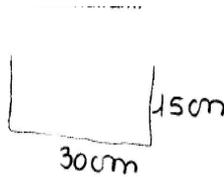
$$\begin{aligned} & \text{Rectangle with width } 24 \text{ and height } 12 \\ A &= b \cdot h \\ A &= 24 \cdot 12 \\ A &= 208 \end{aligned}$$

Conclusion: Foi reduzido em  $208 \text{ cm}^2$

(Fonte: participantes da pesquisa)

Nove alunos participantes, A5, A7, A10, A14, A15, A16, A17 e A19, apresentaram um erro que foi classificado como de compreensão conceitual e de estratégia. Esses estudantes fizeram a redução da Porcentagem na área e não nos lados, como podemos visualizar na Figura 5. A resolução desenvolvida por eles foi considerada incorreta, pois os alunos desconsideraram o fato de que a variação da área do retângulo, da forma em que foi apresentada, não é linear.

Figura 5 - Resolução da questão 1 item a do aluno A19

a)   $A = b \cdot h$   
 $A = 30 \cdot 15$   
 $A = 450$

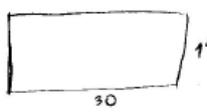
$450 = 100\%$   
 $x \leq 20\%$

$x = \frac{450 \cdot 20}{100} = \frac{9000}{100} = 90 \text{ cm}^2$

(Fonte: participantes da pesquisa)

Os estudantes A2, A12 e A13 apresentaram erro de compreensão lógica, pois demonstraram dificuldades em relacionar as informações ao processo cognitivo, como exemplificado na Figura 6.

Figura 6 - Resolução da questão 1 item a do aluno A2

① 

$30 \text{ cm} \text{ --- } 100\%$   
 $x \text{ --- } 20\%$   
 $x = \frac{30 \cdot 20}{100}$   
 $x = \frac{600}{100}$   
 $x = 6$

$A_R = b \cdot h$   
 $A = b \cdot 3$   
 $A = 18 \text{ cm}^2$

$15 \text{ --- } 100\%$   
 $x \text{ --- } 20\%$   
 $y = \frac{15 \cdot 20}{100}$   
 $x = \frac{300}{100}$   
 $x = 3$

$A_N = 30 \cdot 15$   
 $A_N = 450$

$A = 24 \cdot 12$   
 $A = 288$

(Fonte: participantes da pesquisa)

Observa-se, na Figura 6, que A2 deveria obter o resultado de quantos centímetros havia sido reduzida a área do retângulo, porém obteve a área reduzida, mas não efetuou a subtração da área original e ainda indicou que a resposta correta seria  $18 \text{ cm}^2$ , valor obtido pela multiplicação das medidas que cada lado reduziu e, por isso, a questão foi considerada incorreta.

A Figura 7 apresenta a resolução do aluno A20 que apresentou erro de análise e síntese, pois obteve o valor da medida em que os lados reduziram, mas não terminou a resolução da questão, demonstrando dificuldade em identificar os passos seguintes.

Figura 7 - Resolução da questão 1 item a do aluno A20

(Fonte: participantes da pesquisa)

### CONSIDERAÇÕES SOBRE A ANÁLISE

Durante a Análise dos Erros, realizada sobre o teste diagnóstico respondido pelos alunos, foi possível verificar as estratégias utilizadas por eles na resolução de problemas e notar que eles não dispunham de alguns subsunçores ou que tinham dificuldades em relacioná-los em algumas situações. Por meio das questões, foi possível perceber a dificuldade dos alunos em compreender e representar uma situação-problema em virtude da tendência a tratá-la como uma situação linear, o que demonstrou que o conceito de linearidade está fortemente enraizado nos seus esquemas. Essa desestabilização causada na mente do aluno frente à situação-problema apresentada foi satisfatória para a nova aprendizagem, pois o aluno teve de desenvolver novos esquemas para dar conta da situação. Aliado a isso, observou-se também a dificuldade dos alunos em relacionar medidas e criar a relação entre estas por meio de uma função de forma a gerar o gráfico da área. Assim, ficou evidente a necessidade de focar em situações-problema não-lineares e em como relacionar medidas, funções e gráficos.

Percebeu-se que os alunos demonstraram dificuldades em apresentar deduções matematicamente corretas, e, muitas vezes, basearam-se em tentativa e erro para tentar chegar a uma resposta ou tendo como base somente a figura apresentada, que pode ser distorcida ou não englobar todos os casos. Além disso, a Análise de Erros permitiu concluir que os alunos apresentam falhas de formação conceitual no que tange o conteúdo de Geometria Plana, pois confundiram conceitos de área e perímetro e definições de algumas figuras planas. Dessa forma, acredita-se que é necessário trabalhar com os alunos o formalismo matemático para uma dada resposta, bem como os conteúdos de Geometria Plana, em especial figuras planas, áreas e perímetros.

Assim, a partir de tais dados, ocorreu o desenvolvimento e aplicação de atividades potencialmente significativas descritas anteriormente e que tiveram como ponto de partida a revisitação dos conteúdos de funções e geometria.

### DA ATIVIDADE POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA

A atividade foi desenvolvida com os alunos da turma de Cálculo I ofertada pelo curso de Licenciatura em Matemática, na qual havia 11 alunos que participaram do levantamento das dificuldades realizado anteriormente. A atividade foi dividida em dois momentos. No primeiro, foram propostas três questões para que os alunos pensassem a respeito e respondessem. Essas questões foram disponibilizadas por meio do recurso Fórum de Perguntas e Respostas dentro do

ambiente Moodle. No segundo momento, foram disponibilizadas outras três questões, com a representação da situação no software GeoGebra. A exibição dessas questões no fórum ocorria de forma dinâmica, variando o tamanho das figuras de maneira a permitir uma melhor visualização da situação por parte dos alunos.

Assim, trabalhou-se o tópico de grandezas geométricas, tendo por base os conhecimentos prévios dos alunos externalizados no levantamento das dificuldades, o qual também serviu para apresentar situações problema do conteúdo. No desenvolvimento da atividade, foram adotados os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora no ensino (MOREIRA, 2006). Para tanto, a atividade iniciou com questões mais gerais que foram, gradativamente, tornando-se mais específicas.

A verificação de ocorrência ou não de aprendizagem significativa se deu por meio da participação dos alunos nas atividades propostas e de sua interação com as tarefas solicitadas, bem como seu desempenho na questão avaliativa. De maneira geral, entre os 11 alunos que participaram, houve ao menos quatro alunos que não deram retorno a algo solicitado. Isso demonstrou certa falta de empenho e interesse em aprender. Esse foi um aspecto negativo, já que o empenho e interesse são requisitos necessários para uma aprendizagem significativa.

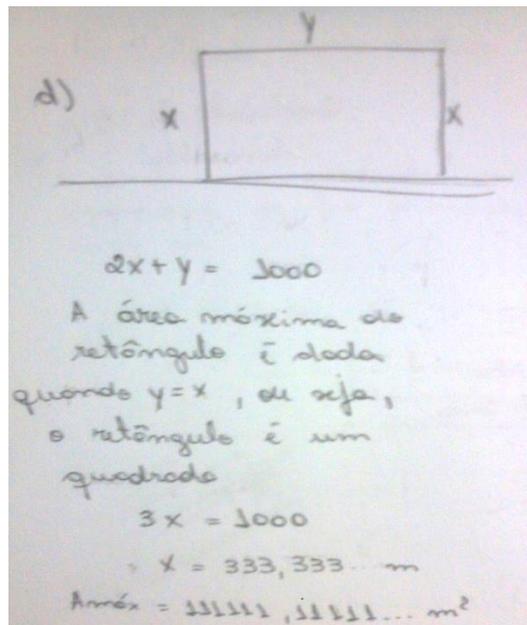
Assim, no primeiro momento, foram relacionados os subsunçores da área do retângulo com os de função quadrática e foi trabalhada a relação entre as grandezas geométricas (altura e largura) e introduzidas as ideias de variações, como exemplificado a seguir pela questão 2.

**Questão 2:** Um campo retangular está limitado por um córrego e nos outros três lados por uma cerca de 1000 metros.

- a) Como você representaria essa situação? Sugestão: Use o aplicativo GeoGebra.
- b) Como podemos determinar as dimensões do campo?
- c) Como podemos relacionar a medida da área em função da variação de uma das dimensões?
- d) Quais as dimensões que o campo deve possuir para que sua área seja máxima?

Nessa questão, oito alunos obtiveram respostas consideradas corretas, sendo que desses, três apresentaram dificuldades em resolvê-la. Para isso, os alunos deveriam empregar os subsunçores de Geometria Plana e Funções. Foi possível perceber a dificuldade dos alunos em relacionar novas informações, haja vista que dois alunos assumiram que a área máxima seria sempre um quadrado, muito provavelmente devido ao ensino mecânico. Em específico, apresenta-se na figura 8 a resolução do aluno A3.

Figura 8 - Parte da resolução da situação proposta na questão 2, realizada pelo aluno A3



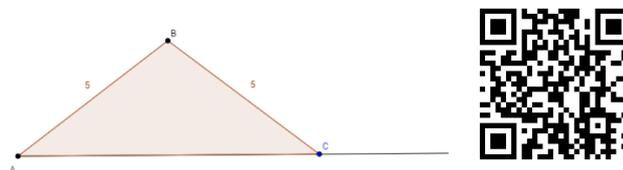
(Fonte: participante da pesquisa)

Também foi possível perceber certa incompreensão a respeito do que se refere cada um dos valores empregados, isto é, os alunos apresentaram a tendência em identificar X e Y como largura/altura do retângulo e na sequência invertê-los.

Na questão seguinte, foi necessário o emprego dos subsunçores referentes ao Teorema de Pitágoras, aos conteúdos de círculos e retângulos, reforçando o trabalho sobre a percepção das variações e as relações entre grandezas geométricas e suas dependências.

No segundo momento, foram apresentadas duas questões similares às utilizadas no levantamento das dificuldades, as quais permitiram observar indícios de aprendizagem significativa dos alunos. Em virtude do aumento do índice de acertos, também se intercalou o nível de complexidade dos problemas, de maneira a empregar os princípios da TAS. A fim de exemplificar, se faz a apresentação da questão 5 na sequência.

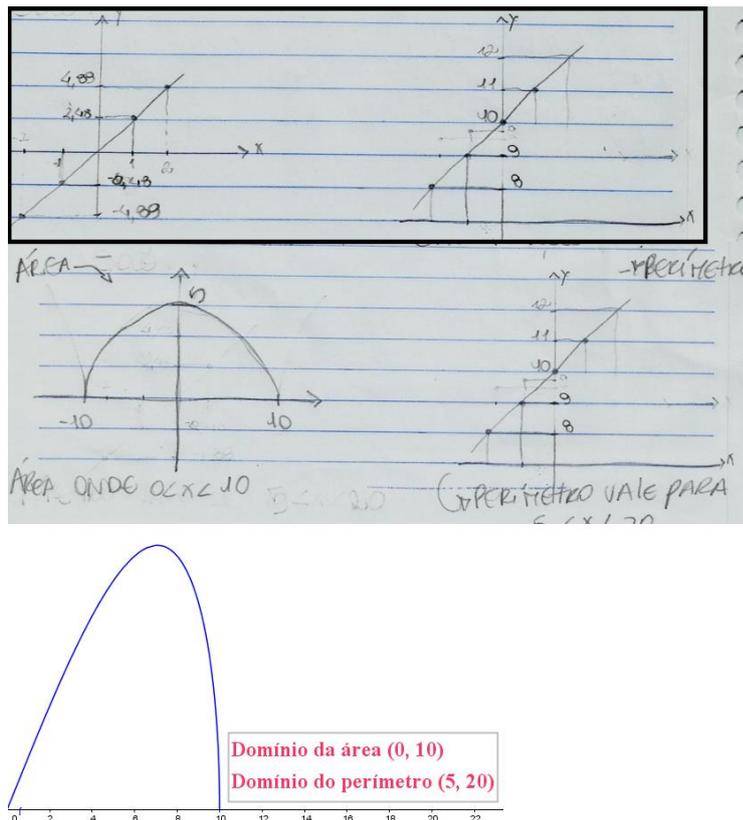
**Questão 5:** Dado um triângulo isósceles ABC, em que  $AB=BC=5$  cm.



- Que valores o segmento AC pode assumir para que o triângulo ABC exista?
- É possível determinar a área do triângulo em função da medida do segmento AC? Como?
- É possível determinar o perímetro do triângulo? Como?
- As expressões que representam a área e o perímetro (se existirem) são funções? Em caso afirmativo, como é o gráfico delas?

Para resolver essa questão, os alunos tiveram acesso ao applet desenvolvido pelos pesquisadores (que pode ser acessado via qrcode). Nove alunos tiveram sua resposta final considerada correta. Ao longo da resolução, um aluno A3 errou a desigualdade triangular, demonstrando que ainda não a internalizou, mas, apesar disso, teve sua resposta considerada “correta” por ter acertado os demais itens. Já o aluno A24 obteve corretamente as expressões da área e do perímetro, entretanto demonstrou grande dificuldade em determinar o gráfico, necessitando de três tentativas para obter o correto, o que está exposto na figura 9.

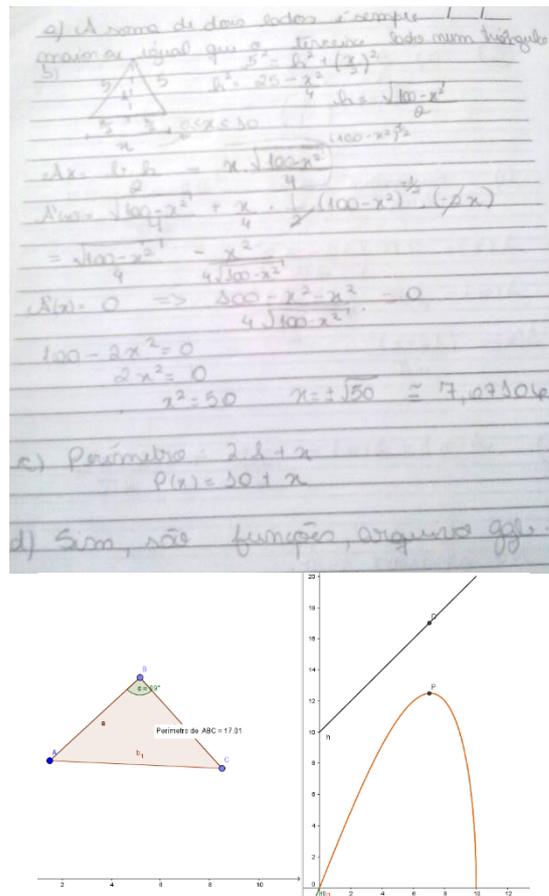
Figura 9 – Gráficos da situação proposta na questão 5, realizados pelo aluno A24



(Fonte: participante da pesquisa)

Já os alunos A10 e A17 tentaram empregar o Teorema de Heron<sup>1</sup> para resolver o problema, mas não obtiveram sucesso. A seguir foi sugerido a eles que utilizassem o Teorema de Pitágoras para resolver o problema, entretanto eles não fizeram tal tentativa. Na figura 10, consta a resolução do aluno A14, a qual foi considerada correta, e a representação no GeoGebra realizada por ele.

Figura 10 - Resolução da situação proposta na questão 5, realizada pelo aluno A14

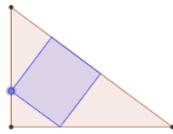


(Fonte: participante da pesquisa)

Percebe-se aqui uma melhora por parte dos alunos em relação ao levantamento das dificuldades, pois a maioria foi capaz de resolver a questão de maneira satisfatória. A resolução dessa questão mostrou uma melhora na aprendizagem dos alunos ao longo do ano e dessa atividade.

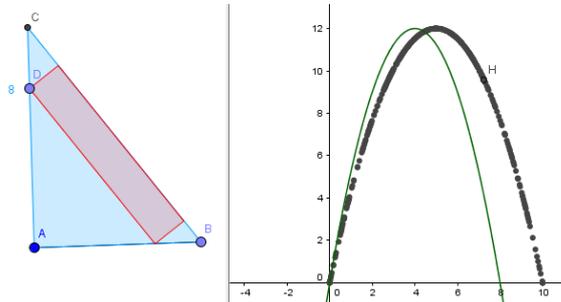
Já a questão avaliativa teve a participação de nove alunos, sendo que, em alguns casos, mais de um aluno respondeu à mesma questão. O uso de tais questões foi uma maneira encontrada para se verificar se houve aprendizagem significativa e se os alunos apresentavam evidências de uma (re)construção dos seus subsunçores. Em um primeiro momento, as questões foram respondidas de forma individual em sala e, em um segundo momento, os alunos foram ao laboratório, postar suas questões no AVEA Moodle com a devida “modelagem” da situação no aplicativo GeoGebra. Após isso, houve, em alguns casos, a intervenção do pesquisador, que sugeriu melhorias e fez questionamentos a respeito das soluções apresentadas. Como exemplo, apresenta-se a questão 11.

**Questão 11:** Um retângulo deve ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 6 e 8 cm. Determine as dimensões do retângulo máximo, supondo que ele está posicionado como na figura abaixo.



Essa questão foi respondida pelo aluno A16. O aluno desenvolveu a questão de forma correta, porém, ao realizar o gráfico no GeoGebra, perceberam-se diferenças entre o gráfico esperado e o obtido, conforme mostrado na figura 11. Foi solicitado que o aluno verificasse o porquê dessa diferença. Ao que ele informou ser devido à construção, em que o “gráfico” em preto está em função do segmento vermelho contido em  $CB$  e em verde está em função do segmento  $AD$ .

**Figura 11** – Representação da situação proposta na questão 11, realizada pelo aluno A16



(Fonte: participante da pesquisa)

Apesar dos equívocos, o aluno foi capaz de interpretar e identificar as diferentes dependências funcionais possíveis e os seus resultados. Esse aspecto serviu como um forte indício de que houve aprendizagem significativa.

Assim, acredita-se que as questões propostas nesta etapa permitiram que os alunos testassem seus conhecimentos, demonstrando que, em geral, houve a compreensão e internalização dos conteúdos trabalhados, já que, com exceção de um aluno, todos conseguiram obter a resposta correta. Tal questão também permitiu que o professor da disciplina avaliasse os alunos, e o maior empenho dos alunos em resolver a questão, possivelmente se deu em virtude de que as questões anteriores não valiam nota.

## DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E ANÁLISE DOS DADOS

Dos 24 alunos que responderam ao levantamento das dificuldades, 15 se matricularam na disciplina de Cálculo I, dos quais 11 participaram da atividade e nove concluíram-na. Com base nos dados obtidos, percebeu-se que sete alunos apresentaram melhora significativa em relação ao levantamento das dificuldades, já que acertaram todas as questões. Ainda dois alunos apresentaram respostas que variaram entre certas e erradas, mas acredita-se que o resultado final tenha sido positivo para esses alunos, pois apresentaram evolução no decorrer do trabalho, acertaram a questão sorteada e participaram ativamente da atividade.

No caso de outros dos alunos A15 e A17, foi possível deduzir que a atividade não os levou a apresentarem melhoras significativas, pois eles mantiveram uma grande incidência de respostas erradas, tanto no levantamento das dificuldades como na atividade. Assim, pode-se concluir que a atividade não atingiu 100% de aproveitamento, entretanto percebeu-se que a participação e o empenho dos

alunos, o que seria fundamental para o sucesso do trabalho, não foram significativos e, dessa forma, eles não atenderam ao requisito básico da aprendizagem significativa, que é o querer aprender.

Acredita-se que a atividade como um todo permitiu que se trabalhasse com os alunos as escolhas das estratégias e desenvolvimento dos conceitos necessários para resoluções das situações problema, de tal forma que os auxiliasse a escolher a melhor. Diante disso, considera-se que a atividade foi potencialmente significativa por ter significado lógico, que parece ter sido incorporado à estrutura cognitiva dos alunos, que relacionaram os subsunçores de Geometria e Funções entre si e criaram, assim, novos conhecimentos. Além disso, os alunos compartilharam sua compreensão do conteúdo abordado. A metodologia utilizada foi satisfatória, pois contemplou os objetivos ao trabalhar com grandezas geométricas e permitiu que os alunos, que se empenharam, realizassem esboços dos gráficos, o que tem grande valia para os conceitos que estavam sendo trabalhados.

A atividade também foi suficientemente não arbitrária e não aleatória, relacionando-se, de forma substantiva, aos subsunçores existentes na estrutura cognitiva dos alunos e permitindo a interação entre aquilo que o aluno sabe e o que precisa ser aprendido. De tal maneira, os alunos demonstraram que captaram e negociaram os significados, apresentando assim, indícios de que houve aprendizagem significativa.

Além disso, a atividade teve seu enfoque em uma mistura de recepção e descoberta, sendo receptiva ao expor as questões aos alunos e descoberta por fazê-los buscar maneiras para resolver as situações propostas. A atividade foi considerada superordenada, já que realizou a interação dos subsunçores de Geometria e funções pré-existentes, o que resultou um novo conceito, o de variação geométrica.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

O objetivo da pesquisa apresentada nesse artigo possui o intuito de investigar possíveis subsunçores existentes na estrutura cognitiva de alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática sobre conceitos de variação e propor alternativas para que apresentem indícios de aprendizagem significativa sobre esses conceitos, bem como avaliar estes indícios.

Tendo em vista os dados apresentados, acredita-se que o material instrucional utilizado (aqui apresentado parcialmente), evidencia a ocorrência de aprendizagem significativa e a re/construção dos conceitos subsunçores básicos dos alunos. Nesse sentido é possível afirmar que o resultado da pesquisa foi positivo, entretanto acredita-se que seria possível aprimorá-lo por meio de um desenvolvimento em caráter presencial e com um número maior de questões a serem utilizadas na atividade potencialmente significativa, visto as dificuldades que os alunos apresentaram nas resoluções.

Acredita-se também que este trabalho tenha sido relevante e satisfatório, pois alcançou os objetivos propostos ao estudar, avaliar e apresentar a forma como os alunos associam as relações existentes entre grandezas geométricas. Por meio do emprego da TAS em conjunto com a Análise de Erros, foi possível a identificação e

exposição dos subsunçores que os alunos possuíam bem como os principais erros e estratégias utilizadas por eles na resolução das questões propostas. Durante a pesquisa, percebeu-se que os alunos demonstraram dificuldades em realizar deduções matemáticas de forma satisfatória e que se basearam em tentativa e erro ou na figura apresentada, para responder a algumas atividades. Além disso, a Análise de Erros foi fundamental para chegar à conclusão que os sujeitos pesquisados não possuem subsunçores adequados ao que se refere a conteúdo de Geometria Plana.

Pode-se também destacar a dificuldade apresentada pelos alunos participantes em associar as relações existentes entre grandezas geométricas, na visualização de dependências funcionais, em alguns casos falhando em vê-las e em outros invertendo a dependência. Em relação à resolução das questões pelos alunos, inicialmente ocorreram de maneira deficitária e falha, mas apresentaram melhoras no decorrer e após a aplicação da atividade potencialmente significativa, apesar de ainda apresentarem debilidades nos subsunçores que envolvem a associação entre geometria e funções, conforme relatado na seção anterior. A falta desses conhecimentos prévios tornou inviável, em alguns casos, a associação entre os conceitos e a interpretação correta das questões, o que acarretou a maioria dos erros de estratégia e conceituais, expondo as dificuldades enfrentadas pelos alunos na resolução de problemas.

Por fim, acredita-se que o uso do GeoGebra ajudou na reconstrução de alguns conceitos e da estrutura cognitiva ao permitir a representação deles de diferentes formas e trabalhar com a ideia de variação de forma mais intuitiva, bem como ao permitir a investigação sobre elas.

# Analysis of errors as an indicator method and concepts subscriber evaluator: the case of graduates in mathematics at Federal University of Santa Maria

## ABSTRACT

This article presents the results of a survey that had as an objective investigate the subsumer about the concept of variation that exist on the Mathematics freshmen's, as propose alternatives that could lead to a meaningful learning about it. The existence of subsumers was verified by the error analysis in a diagnostic test they answered. From that analysis it was elaborated an activity supposed to be potential, which also evolved the Moodle made with the auxiliary of computational app, in order to assist the students during the process of re/construction from this previous knowledge. As such, we developed alternative ways to approach the subject, mediate by it's integration with University contents.

**KEYWORDS:** GeoGebra. Meaningful learning. Error analysis. Geometric quantities. Previous knowledge.

## NOTAS

1 Software desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas. Possui a capacidade de trabalhar com variáveis vinculadas a números permitindo que se trabalhem as relações existentes entre as variáveis (Dantas et al, 2015).

2 Teorema de Heron: Em um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  sua área é dada por:  $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , sendo  $p = \frac{a+b+c}{2}$

## REFERÊNCIAS

ARCAVI, A.; HADAS, N. Computer Mediated Learning: An Example Of An Approach. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 5, p. 25-45, 2000.

AUSUBEL, D. P. **The psychology of meaningful verbal learning**. New York: Grune and Stratton. 1963. 685p.

AUSUBEL, D. P. **The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 212 p.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa, Portugal. Edições 70, 1977.

CURY, H. N. **Análise de Erros: O que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

CURY, H. N. Pesquisas em ensino de ciências e matemática, relacionadas com erros: uma investigação sobre seus objetivos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 237-256, 2012.

GIRALDO, V.; ROQUE, T. História e Tecnologia na Construção de um Ambiente Problemático para o Ensino de Matemática. In: GIRALDO, V.; ROQUE, T. **O Saber do Professor de Matemática - Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014. Cap. 1, p. 9-37.

LEMOS, E. D. S. A Aprendizagem Significativa: **Estratégias Facilitadoras E Avaliação**. Aprendizagem Significativa em Revista, v. 1, n. 1, p. 25-35, 2011.

LIMA, D. T. **Erros no Processo de Resolução de Equações de 1º Grau**. 223 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

MOREIRA, M. A. ¿Al Final que es Aprendizaje Significativo? **Revista Qurrriculum**, La Laguna, v. 25, p. 29-56, marzo 2012.

MOREIRA, M. A. **A Teoria da Aprendizagem Significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Universidade de Brasília, 2006.

TORRE, S. D. L. **Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

**Recebido:** 2017-12-28

**Aprovado:** 2018-10-27

**DOI:** 10.3895/rbect.v12n1.7576

**Como citar:** MATHIAS, C. V.; BOTH, M.; SANTAROSA, M. C. P. Análise de erros como método indicador e avaliador de conceitos subsunçores: o caso dos licenciandos em matemática da Universidade Federal de Santa Maria. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 12, n. 1, 2019. Disponível em:

<<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/7576>>. Acesso em: xxx.

**Correspondência:** Carmen Vieira Mathias - [carmenmathias@gmail.com](mailto:carmenmathias@gmail.com)

**Direito autoral:** Este artigo está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.

