

Operacionalização da definição de função: um processo desencadeador da aprendizagem significativa do conceito de função

RESUMO

Jerson Sandro Santos de Souza
jersoncobain@gmail.com
0000-0002-9812-5009
Secretaria Municipal de Educação,
Manaus, Amazonas, Brasil

Leandro de Oliveira Souza
olilean@gmail.com
0000-0003-1626-0766
Universidade Federal de
Uberlândia, Ituiutaba, Minas Gerais,
Brasil

Neste artigo, discute-se a importância da definição de função para a aprendizagem significativa do conceito de função. A articulação das múltiplas representações desse conceito possibilita sua apreensão, por isso favorecer a articulação torna-se fundamental. Acredita-se que, para alcançar a articulação, as definições são indispensáveis, já que elas propiciam formas de raciocínio que as tornam úteis como elementos de ligação das demais representações. Não estamos nos referindo ao simples ato de enunciar uma definição, mas sim ao processo no qual o aprendiz a utiliza conscientemente para interpretar situações pautadas em relações funcionais, processo que chamamos de operacionalização da definição de função. Assim, o presente trabalho norteia-se pela seguinte questão de pesquisa: *Como a operacionalização da definição de função, admitida como elemento didático-metodológico, pode favorecer a aprendizagem significativa do conceito de função?* Para verificarmos a hipótese de que a operacionalização facilita a articulação, e esta, por sua vez, viabiliza a aprendizagem significativa, aplicamos três sequências didáticas, baseadas em aspectos favorecedores da operacionalização. Vinte alunos de primeiro ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Manaus-AM foram envolvidos. Os resultados, oriundos da confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori*, uma das fases da Engenharia Didática, metodologia de pesquisa adotada, sugerem benefícios à aprendizagem, que se devem à evolução do uso da definição: de uma definição inerte, abandonada de qualquer raciocínio logo após enunciada, para uma definição operacional, utilizada como fonte orientadora do pensamento funcional. Conclui-se que uma definição operacional pode ser vista como um elemento desencadeador do processo de aprendizagem significativa do conceito de função.

PALAVRAS-CHAVE: Operacionalização da definição. Conceito de função. Representação semiótica. Imagem conceitual. Aprendizagem significativa.

INTRODUÇÃO

A solução de problemas que envolvem relações de dependência entre grandezas é uma atividade comum, não só na Matemática. Isso é assim porque muitos dos fenômenos estudados em Física, Química e Biologia, por exemplo, apresentam regularidades, isto é, eles possuem comportamento idêntico, desde que se criem as condições iniciais convenientes. Em sala de aula, a regularidade de um fenômeno é geralmente representada por uma fórmula. Esta representação da lei de variação auxilia o professor na explicação do fenômeno, mas o entendimento do fenômeno será prejudicado, se o aluno não tiver apreendido as características e propriedades inerentes ao conceito matemático que dá vida à generalização apresentada. Esse é um dos obstáculos que a não compreensão do conceito de função pode acarretar.

Funções representam relações de dependência entre grandezas, e o seu uso faz-se indispensável na leitura matemática de fenômenos da natureza. Esse conceito surgiu a partir de um contexto prático, atrelado a problemas concretos do mundo físico, como um instrumento próprio para o estudo quantitativo de fenômenos naturais (CARAÇA, 1951).

Os problemas concretos que impulsionaram a construção do conceito de função forneciam um apelo fortemente intuitivo para o entendimento das limitações desse conceito. Essas limitações ficavam cada vez mais evidentes, conforme novos problemas iam surgindo, situação que implicaria sucessivas ampliações do conceito, alterando profundamente sua natureza e seu significado.

Na matemática escolar, o apelo intuitivo é geralmente esquecido. A preocupação principal acaba sendo a introdução de muita terminologia abstrata que, por não ser usada como ferramenta prática para lidar com situações interessantes, acaba constituindo um vocabulário que meramente se memoriza sem se compreender nem se valorizar (PONTE, 1990).

Na tradição de ensino do conceito de função, são discutidas várias maneiras de representá-lo: palavras, diagramas, tabelas de valores, fórmulas e gráficos. E outros conceitos foram estabelecidos como pré-requisitos para a apresentação da definição formal de função: estudo da noção de conjunto e suas propriedades, conjuntos numéricos com ênfase no conjunto dos números reais e o entendimento das noções de par ordenado e de produto cartesiano. Combinado a isso tudo, tem-se uma abordagem de funções que pouco privilegia aplicações, um trabalho quase exclusivo com fórmulas e um acréscimo de terminologias novas dentro de cada registro de representação. Esses fatores, por mergulharem o conceito de função em um mar de terminologia abstrata, potencializam o isolamento dos registros de representação semiótica, ao nosso ver, o maior obstáculo à aprendizagem desse conceito.

Mas por que o isolamento dos registros de representação é tão prejudicial para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função?

Segundo Duval (2012), a compreensão de um conteúdo conceitual em Matemática assume a coordenação de pelo menos dois *registros de representação semiótica*¹. Quer dizer, é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão Matemática, e não o isolamento em cada registro. Por isso os fatores mencionados, envolvidos na abordagem tradicional do tema funções, são tão prejudiciais, pois dificultam a articulação dos registros.

Logo, possibilitar o processo de articulação das representações torna-se fundamental, já que a compreensão do conceito de função, na referida perspectiva teórica, pressupõe que o aluno transite, com rapidez e espontaneidade, entre as múltiplas representações desse conceito. Para tanto, resolvemos focar em um dos principais aspectos de um conceito, a sua definição.

Entendemos que a definição do conceito de função pode ser capaz de gerenciar a articulação dos vários registros de representação desse conceito. Não é simplesmente definir, mas sim utilizar a definição para orientar as interpretações de relações funcionais, unindo em um todo coerente todos os termos abstratos que orbitam o referido conceito. Ou seja, consideramos que a articulação é favorecida pelo processo de utilização consciente da definição como elemento de ligação das demais representações, processo que denominamos de *operacionalização da definição de função*.

A operacionalização da definição de função é o momento em que o aprendiz apresenta uma definição formal ou pessoal (compatível com a formal) que abarque as várias representações, percebendo-as, por meio da definição adotada, como diferentes fontes de informações sobre o mesmo conceito. É o ponto em que o aprendiz trabalha com a definição que enunciou, ou seja, sabe definir o conceito de função e identificar/explicar, baseando-se na definição dada, se determinada tabela, gráfico ou diagrama representa uma função, além de conseguir estabelecer/identificar relações funcionais entre variáveis (SOUZA, 2017, p.13).

Em suma, com base no estudo histórico-epistemológico do conceito de função, na sua tradição de ensino e no estudo de processos de aquisição de conceitos matemáticos pelos alunos, sintetizados acima, acreditamos que uma definição operacional favorece a articulação, e a articulação, por sua vez, possibilita a aprendizagem significativa do conceito de função. Desse modo, admitindo que a operacionalização desencadeia o processo de aprendizagem significativa do conceito de função, nossa investigação foi norteada pela seguinte questão de pesquisa: *Como a operacionalização da definição de função, admitida como elemento didático-metodológico, pode favorecer a aprendizagem significativa do conceito de função?*

RECORTE TEÓRICO

Os conceitos libertam o nosso pensamento do domínio do mundo físico, por meio da categorização da experiência perceptual. Possibilitam a aprendizagem de ideias abstratas sem a necessidade de apoio empírico-concreto, bem como a comunicação, a aquisição de novos significados conceituais e proposicionais e a solução criativa de problemas. Ficam evidentes, portanto, o papel e a importância deles para o ensino e a aprendizagem de conteúdos escolares.

No que se refere a esta pesquisa, foram enfocados três aspectos da aprendizagem conceitual: 1) a importância que conceitos já estabelecidos na estrutura cognitiva dos aprendizes têm para a assimilação de novas informações; 2) a importância do enriquecimento da imagem conceitual e o papel da definição conceitual; e 3) a importância da articulação de vários registros de representação semiótica para a apreensão de objetos matemáticos.

Ausubel et al. (1980, p.74) definem conceitos como “objetos, eventos, situações ou propriedades que possuem atributos essenciais e são designados numa determinada cultura por algum signo ou símbolo aceito”. Além disso, estabelecem uma distinção entre dois tipos de processos de aquisição de conceito: a formação de conceito e a assimilação de conceito.

A formação de conceito acontece em crianças pré-escolares, sendo caracterizada pela aquisição indutiva e espontânea de ideias genéricas a partir da experiência empírico-concreta. Já a assimilação de conceito, nosso foco, ocorre em crianças numa faixa etária mais avançada, como também em adolescentes e adultos. Nesse processo, os atributos essenciais dos conceitos não são descobertos indutivamente, mas sim apresentados ao aluno por meio de definição ou estão implícitos em seu contexto. Por meio da assimilação de conceito, os alunos relacionam à sua estrutura cognitiva os atributos essenciais de novos conceitos sem a necessidade de provas empírico-concretas. Ao longo do desenvolvimento cognitivo, a aquisição de conceito torna-se predominantemente uma questão de assimilação de conceito (AUSUBEL et al., 1980).

O aspecto mais importante do processo de assimilação de conceito, a emergência de novos significados a partir da interação entre as novas informações com ideias relevantes já existentes na estrutura cognitiva do aluno, é o cerne do conceito de *aprendizagem significativa*.

A aprendizagem significativa é o processo através do qual uma nova informação interage de maneira não-arbitrária e não-literal com conceitos específicos e relevantes já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz (conceitos subsunçores). Essa interação promove um intercâmbio de significados. A nova informação passa a ter sentido para o aprendiz e os subsunçores ficam mais elaborados, mais estáveis e diferenciados, mais capazes de servirem como âncora em novas interações, o que favorece o desenvolvimento da estrutura cognitiva.

Em distinção à aprendizagem significativa, há um tipo de aprendizagem que Ausubel et al. (1980) chamam de *aprendizagem mecânica*. Nesse tipo de aprendizagem, a nova informação é armazenada na memória do aprendiz de maneira arbitrária e literal. A nova informação não se incorpora ao repertório cognitivo do aprendiz nem o modifica, pois não há interação entre o novo e algum aspecto específico e relevante da estrutura cognitiva. Como o aprendiz não dá significados ao que aprende, o produto da aprendizagem mecânica é, geralmente, de duração, utilidade e significados transitórios.

Embora *aprendizagem significativa* e *aprendizagem mecânica* sejam ideias que possam suscitar noções antagônicas e inconciliáveis, elas, na verdade, ocupam os extremos de um mesmo *continuum*. Ou seja, uma aprendizagem inicialmente mecânica pode, gradativamente, evoluir para uma aprendizagem significativa.

Como pretendemos favorecer a aprendizagem significativa do conceito de função, três perguntas devem ser respondidas: 1) Quais são as condições para a ocorrência da aprendizagem significativa? 2) Como avaliar evidências de aprendizagem significativa? 3) O que é aprender significativamente o conceito de função?

Segundo Ausubel et al. (1980), são duas as condições para a ocorrência da aprendizagem significativa, o que responde à primeira pergunta: 1) o material

instrucional deve ser potencialmente significativo; e 2) o aluno deve ter disposição para aprender significativamente.

O material de aprendizagem é potencialmente significativo se por si só for relacionável de modo não-arbitrário e não-litera l a ideias correspondentemente adequadas já estabelecidas na estrutura cognitiva do aluno, e este, por sua vez, deve possuir disponíveis os conceitos-âncora relevantes que possibilitem essa interação. Vale ressaltar que todo material sempre será *potencialmente* significativo, nunca significativo, ou seja, “não existe livro significativo, nem aula significativa, nem problema significativo..., pois o significado está nas pessoas, não nos materiais” (MOREIRA, 2012, p.36). Daí entramos na segunda condição: ter disposição para aprender significativamente. Isso quer dizer que o aluno deve manifestar uma intencionalidade para relacionar, de maneira não-arbitrária e não-litera l, o novo material à sua estrutura de conhecimento. Caso contrário – se a intenção do aprendiz for apenas memorizar o conteúdo para obter os escores necessários para a aprovação – não importa quão potencialmente significativo seja o material, “tanto o processo de aprendizagem como o produto da aprendizagem serão automáticos” (AUSUBEL et al., 1980, p.34).

Para avaliar evidências de aprendizagem significativa, respondendo à segunda pergunta, considerou-se neste estudo: 1) o desempenho dos alunos ao longo de três sequências didáticas, atentando para a evolução dos processos de operacionalização da definição e de articulação das múltiplas representações do conceito de função; e 2) a elaboração e explicação de mapas conceituais, um para cada atividade desenvolvida.

Segundo Ausubel et al. (1980), a forma mais adequada de se buscar evidências de aprendizagem significativa é apresentar determinado objeto de conhecimento dentro de múltiplos contextos, propondo ao aluno questões e problemas formulados de maneira nova e não familiar, que requeiram máxima transformação do conhecimento adquirido; isso respalda o aspecto (1) do parágrafo acima. Já a seguinte consideração respalda o aspecto (2): mapas conceituais podem ser utilizados como uma técnica não tradicional de avaliação que, por possibilitar uma visualização de como o aluno está organizando um dado conhecimento, permite ao professor obter informações sobre os significados adquiridos pelo aprendiz (MOREIRA, 2005).

Finalmente, para responder à terceira pergunta, é necessário discorrer sobre o papel das representações semióticas, em especial, das definições, para a assimilação de conceitos matemáticos.

Embora seja algo óbvio, pelo menos quando a questão é levantada, os objetos matemáticos são bem diferentes daqueles tratados pela Física, Química, Biologia, etc. Esses objetos (conceitos, propriedades, estruturas, relações) são imateriais e o modo de trabalhar em Matemática independe de verificações empíricas. Assim, sendo os objetos matemáticos não diretamente acessíveis à percepção, como acessá-los? Dentro dessa problemática, faz-se essencial compreender o que é uma *representação semiótica*.

Uma representação semiótica é a forma sob a qual uma informação pode ser comunicada. Além disso, elas permitem as atividades cognitivas do pensamento e são produzidas dentro de sistemas particulares de signos (os registros), que possuem regras específicas para o tratamento dos conteúdos veiculados. As representações semióticas são, portanto, as ferramentas que não só nos permitem

acessar os objetos matemáticos, mas também “determinam os processos cognitivos e epistemológicos dos tratamentos matemáticos” (DUVAL, 2013, p.15).

Segundo Duval (2012), todo registro de representação, para ser considerado como tal, deve permitir três atividades cognitivas fundamentais: a *formação*, o *tratamento* e a *conversão*. Na atividade de formação, regras já consagradas pelo uso, *regras de conformidade*, são manipuladas para assegurar o reconhecimento das representações e a possibilidade de sua utilização para tratamentos. O tratamento é a transformação de uma representação no interior do registro onde foi formada; cada registro possui regras próprias de tratamento, com graus diferentes de dificuldade. A conversão é a transformação de uma representação, que se desenvolve durante a mudança de um registro para outro, sem alterar, em sua totalidade, os objetos matemáticos que estão em jogo. Não há regras de conversão, assim como há regras de conformidade e de tratamento; a conversão exige apenas o estabelecimento da diferença entre forma e conteúdo.

A ideia fundamental admitida pela *teoria dos registros de representação semiótica* é que, em Matemática, “o tratamento dos conhecimentos depende da forma e não do conteúdo envolvido” (DAMM, 2012, p.173). Contudo o que importa não são as várias representações, embora sejam de suma importância, mas sim os objetos matemáticos que são representados. Ora, os objetos matemáticos nunca devem ser confundidos com as representações que se fazem deles. Duval (2012) chama de ponto estratégico para a compreensão da Matemática a distinção entre o objeto matemático e sua representação semiótica.

Como o acesso aos objetos matemáticos não se dá de forma direta, depende de representações semióticas, a confusão representação-objeto parece quase inevitável. Duval (2012) nomeia esse inimigo potencial do processo de ensino e aprendizagem da Matemática de *paradoxo cognitivo do pensamento matemático*: como os aprendizes poderiam não confundir os objetos matemáticos com suas representações semióticas, se eles não têm acesso aos objetos matemáticos fora dessas representações?

Duval (2012) aponta que o recurso a vários registros de representação, bem como a articulação deles, permite ao aprendiz fazer a referida distinção e, principalmente, apreender o objeto matemático em jogo. Afirma que “a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão” (p.282). Embora um contexto pautado na utilização de uma variedade de registros seja basilar, ele não garante a apreensão conceitual, pois é somente durante a articulação das várias representações de um mesmo objeto matemático que se percebe a diferença entre representante e representado.

Como mencionado, na assimilação de conceito, os atributos essenciais dos conceitos não são descobertos indutivamente, mas sim apresentados aos alunos. No que se refere aos conceitos matemáticos, a representação semiótica utilizada por excelência para tal apresentação é, sem dúvida, a definição.

A fim de explicar o processo cognitivo de aquisição de conhecimentos matemáticos, atentando para o diálogo entre conceitos e definições, Tall e Vinner (1981) cunharam os termos *definição conceitual* e *imagem conceitual*.

A imagem conceitual designa a estrutura cognitiva total associada ao conceito, o que inclui todas as figuras mentais, propriedades e processos associados ao seu nome. Já o termo definição conceitual refere-se ao enunciado utilizado para especificar um conceito, podendo ser formal, ou seja, aquela aceita pela comunidade matemática em geral, ou pessoal, que é uma reconstrução particular feita pelo aprendiz a partir de uma definição conceitual formal.

É verdade que uma pessoa pode muito bem saber usar um conceito sem saber defini-lo, já que um conceito transcende as diferentes formas de representá-lo. Entretanto, visto que “as definições, em contextos científicos, impõem diferentes hábitos de raciocínio necessários à evolução do conceito” (SILVA, 2011, p.73), a aquisição de conceitos matemáticos, como destaca Andrade e Saraiva (2012), deve combinar, numa ação recíproca, a definição conceitual e a imagem conceitual.

No entanto, um aluno pode apresentar uma definição formal precisa, mas acabar se contradizendo em situações que exijam o seu uso, o que sugere uma definição inerte, não operacional. Tal ideia é discutida por Saraiva e Teixeira (2009). Os sujeitos da pesquisa desses autores conseguiram enunciar a definição de função, mas falharam quando solicitados a escolher em um conjunto de gráficos os que representavam funções. De forma geral, os resultados dessa pesquisa evidenciaram os prejuízos que a falta de diálogo entre imagem conceitual e definição conceitual podem acarretar. Então o que deve ser feito para fomentar esse diálogo?

Como resposta a essa questão, Tall e Vinner (1981) esclarecem que a aquisição da estrutura formal do conteúdo é necessária, pois deixa a imagem conceitual mais elaborada, mas não é suficiente para a aprendizagem. Destacam que o ensino da Matemática não deve visar apenas à construção formal (o que inclui as definições conceituais formais), mas ao enriquecimento das imagens conceituais dos aprendizes. E é esse enriquecimento que possibilita a assimilação da definição conceitual formal.

Voltemos à terceira pergunta: o que é aprender significativamente o conceito de função?

Poderíamos simplesmente dizer, de maneira genérica, que é aprender o conceito de função atribuindo-lhe significação. Contudo essa resposta tautológica não acentuaria as características próprias do conceito de função. Uma resposta que considere as particularidades e a complexidade desse conceito seria mais viável para futuras análises e discussões. Como a definição tem, em Matemática, um importante papel na identificação, comunicação, tratamento e aplicação dos conceitos matemáticos, acreditamos que a definição do conceito de função tem de ser o cerne de uma resposta plausível.

Considerando a teoria dos registros de representação semiótica, podemos dizer que mobilizar as múltiplas representações do conceito de função é muito mais do que saber identificar se determinada tabela, diagrama ou gráfico representam uma relação funcional, implica a construção semântica do conceito. Além disso, a articulação das várias representações oportuniza o enriquecimento da imagem conceitual, o que subsidia a compatibilidade entre imagem conceitual e definição conceitual.

Logo, admitindo a importância dos processos de articulação e operacionalização para a aquisição do conceito de função, eis uma resposta mais

específica para a terceira pergunta: *Diremos que um aluno aprendeu significativamente o conceito de função quando, a partir de um contexto instigador e que leve em conta seus conhecimentos prévios, ele for capaz de utilizar de maneira consciente a definição que enunciou e transitar naturalmente entre os vários registros de representação semiótica desse conceito.*

METODOLOGIA

Acreditamos que a verificação de nossa hipótese – a operacionalização favorece a articulação – poderá ser melhor subsidiada por meio do trabalho com sequências didáticas. Estamos chamando de sequência didática (SD) “um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática” (PAIS, 2011, p.102). Como sequências didáticas pressupõem relações trinômias do tipo professor-aluno-saber, optamos por utilizar uma metodologia estreitamente vinculada à prática pedagógica. Nesse sentido, encontramos na Engenharia Didática (ED) os pressupostos necessários para o desenvolvimento da investigação. Segundo Artigue (1996, p.196), a Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se “por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino”.

O significado do termo Engenharia Didática emerge de uma analogia entre o trabalho do pesquisador em didática e o trabalho do engenheiro, relativamente à concepção, planejamento e execução de um projeto. Essa comparação sugere que o modelo teórico não é suficiente para abarcar todos os desafios da complexidade do fenômeno educacional, o que torna necessária uma articulação entre teoria e prática. Nessa perspectiva, as sequências didáticas não atuam necessariamente como um instrumento de planejamento do ensino, mas sim como construções teoricamente justificadas, cujo objetivo é assegurar uma condição vantajosa para a observação do fenômeno didático em questão, servindo, pois, como um ambiente experimental.

Obedecendo aos princípios da ED, nossa pesquisa contemplou as seguintes fases: 1) análises preliminares; 2) concepção e análise *a priori*, 3) experimentação; e 4) análise *a posteriori* e validação.

As análises preliminares fundamentam a construção das sequências didáticas. São pautadas em considerações sobre um quadro teórico-didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em jogo, podendo ainda contemplar considerações sobre os aspectos epistemológicos dos conteúdos, os aspectos inerentes ao ensino convencional e seus efeitos, as concepções dos alunos, as dificuldades e os obstáculos que determinam sua evolução e o campo de entaves no qual se situará a efetiva realização didática (ARTIGUE, 1996).

Neste estudo, foram efetuadas as seguintes análises preliminares: 1) estudo histórico-epistemológico do conceito de função; 2) análise do processo de ensino e aprendizagem das múltiplas representações do conceito de função; 3) análise dos obstáculos à aprendizagem do conceito de função; e 4) estudo de processos de aquisição de conceitos pelos alunos. Essas escolhas foram as que pareciam melhor subsidiar a busca por respostas à questão de pesquisa. Parte desses estudos preliminares foram comunicados nas seções anteriores deste artigo.

Na segunda fase, o pesquisador, orientado pelas análises preliminares, deve determinar certo número de variáveis do sistema didático, que ele supõe serem pertinentes para o problema em estudo, no sentido de interferir no fenômeno didático em questão, as chamadas *variáveis de comando*. Essas variáveis podem minimamente garantir certa generalização das explicações dos fenômenos observados (AUMOULOU; COUTINHO, 2008).

As variáveis de comando que orientaram a construção das sequências didáticas e a discussão dos resultados foram: (A) introduzir o conceito de função como relação entre quantidades variáveis para, posteriormente, defini-lo como relação entre elementos de dois conjuntos; (B) apresentar a definição de função dentro diferentes contextos; (C) enunciar uma definição de função que realmente seja utilizada; (D) levar em consideração aquilo que o aprendiz já sabe; e (E) recorrer a diferentes registros de representação semiótica. Essas variáveis de comando foram construídas a partir das conclusões a que chegamos nas análises preliminares.

Na terceira fase (experimentação), coloca-se em funcionamento todo o dispositivo construído com base nas análises teóricas; ou seja, é o momento da aplicação das sequências didáticas, da observação e da coleta de dados.

A experimentação, no contexto desta pesquisa, se consolidou com a aplicação de três sequências didáticas a 20 alunos voluntários de três turmas distintas de 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Manaus-AM, todos alunos de um mesmo professor de matemática. As atividades foram realizadas em uma sala cedida pela direção da escola, onde os alunos se reuniam três dias da semana, no turno regular, para o desenvolvimento das SDs.

A pesquisa foi submetida à Plataforma Brasil e aprovada por Comitê de Ética em Pesquisa. Os trâmites ético-legais envolveram a autorização da escola (termo de anuência) e dos responsáveis (termo de consentimento), bem como o aval dos participantes (termo de assentimento).

O pesquisador responsável (primeiro autor) não era professor das turmas de 1º ano em questão. Tal fato fazia-se necessário, pois a ideia era trabalhar com alunos já iniciados no conceito de função e dentro de um contexto tradicional, que era o caso dos sujeitos da pesquisa.

Os 20 participantes foram divididos em 5 grupos com 4 integrantes cada. Esses grupos foram representados pelas letras P, Q, R, S e T. Os integrantes de cada equipe foram representados por dois símbolos, a letra que representa o grupo ao qual ele pertence seguida de um número (1, 2, 3 ou 4). Por exemplo, P1, P2, P3 e P4 foram os integrantes do grupo P.

A coleta de dados ocorreu no mês de outubro de 2016, ao longo de 12 encontros, que totalizaram 22 aulas (de 50 minutos cada). Foram 18 aulas para o desenvolvimento das sequências didáticas; cada SD foi composta de três sessões de duas aulas seguidas. Mais uma aula para a aplicação do teste de sondagem (no primeiro encontro), outra para a aplicação do questionário final (no último encontro) e duas aulas seguidas para a aplicação da aula-organizador prévio (no segundo encontro).

A aula-organizador prévio foi uma aula expositiva, que objetivou ativar a relação entre aquilo que os aprendizes já sabiam, identificado no teste de

sondagem, com as novas informações. Além disso, discutiu-se como elaborar mapas conceituais e sua importância para a aprendizagem de conceitos.

Os instrumentos de coleta de dados compreenderam: 1) dois testes, um aplicado no início (teste de sondagem) e outro ao término das atividades (questionário final), respondidos individualmente; 2) a produção escrita dos alunos, representada principalmente por mapas conceituais com suas respectivas explicações, também elaborados individualmente; e 3) o diário de campo do investigador.

Finalmente, temos a quarta fase, que é constituída de duas partes interdependentes, a análise *a posteriori* e a validação. A análise *a posteriori* refere-se ao tratamento dos dados pertinentes selecionados. “Ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise *a priori*, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa” (AUMOULOU; COUTINHO, 2008, p.68). Já a *validação*, que é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada, baseia-se na confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori*. E é com base nessa confrontação, relacionando as observações da experimentação com os objetivos analisados *a priori*, que o pesquisador estimará a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados (AUMOULOU; COUTINHO, 2008).

Em resumo: trabalhamos com o seguinte problema de pesquisa: Como a operacionalização da definição de função, admitida como elemento didático-metodológico, pode favorecer a aprendizagem significativa do conceito de função? Assumimos a hipótese de que a operacionalização da definição de função favorece a articulação das múltiplas representações desse conceito, sendo a operacionalização e a articulação fortes evidências de aprendizagem significativa do conceito de função, pois, para utilizar a definição que enunciou e transitar naturalmente entre os vários registros de representação do referido conceito, são necessários significados que suplantem o fruto da mera memorização. Com base nessa ideia, empreendemos um estudo preliminar com o objetivo de identificar certos aspectos favorecedores da operacionalização, as variáveis de comando. Para verificar nossa hipótese, aplicamos três sequências didáticas pautadas nas variáveis levantadas. O sucesso dessa verificação depende de informações e explicações que assegurem que os efeitos esperados (a operacionalização conduz à articulação) podem ser atribuídos à manipulação das variáveis de comando. Esse esforço será iniciado a seguir.

VARIÁVEIS DE COMANDO

Com base nas análises preliminares, levantamos cinco variáveis favorecedoras da operacionalização, são elas: (A) introduzir o conceito de função como relação entre quantidades variáveis para, posteriormente, defini-lo como relação entre elementos de dois conjuntos; (B) apresentar a definição de função dentro diferentes contextos; (C) enunciar uma definição de função que realmente seja utilizada; (D) levar em consideração aquilo que o aprendiz já sabe; e (E) recorrer a diferentes registros de representação semiótica.

Apresentar o conceito de função por meio de sua definição formal apoiada na representação por diagramas é esperar que o aluno apreenda em poucas aulas a forma mais geral de um conceito matemático que a humanidade levou séculos

para formalizar. Introduzir o conceito de função *exclusivamente* por meio de relações binárias pode dificultar a construção de um campo de significados para o conceito. Como preconiza a variável A, devemos considerar a orientação histórica da evolução do conceito de função. Partir do entendimento da noção de variação, de dependência e da descrição de regularidades para o formalismo inerente à interpretação de função como relação entre elementos de dois conjuntos.

Ensinar funções tão somente por meio da abordagem definição-exemplo-exercício pode levar o docente a pensar que o aluno apreendeu o conceito e atribuiu significados a ele, quando, na verdade, o contexto linear onde foi apresentado facilitou a memorização de toda terminologia relacionada ao tema. Consoante a variável B, a definição de função tem de ser apresentada dentro de diferentes contextos, que requeiram máxima transformação do conhecimento adquirido. Assim, diferentes atividades podem ser propostas, não só no contexto dos livros, mas atividades concretas, nas quais toda a terminologia relacionada ao conceito surja como uma ferramenta prática para lidar com problemas com referência na realidade. Além do mais, atividades baseadas em B privilegiam o trabalho em grupo, para que haja a exposição dos alunos a outros pontos de vista.

Segundo a variável C, o professor tem de trabalhar com a definição de função que apresentou, exemplificando permanentemente o processo de operacionalização da definição de função. Nesse sentido, sempre que possível, o professor deve explicar, por meio da definição que enunciou, por que determinadas relações entre variáveis são funcionais e por que determinadas tabelas, digramas ou gráficos representam o conceito de função.

Considerando a variável D, devemos trabalhar o conceito de função nos reportando ao universo mais próximo do aluno, levando em consideração aqueles conceitos já estabelecidos em sua estrutura cognitiva e que são viáveis para ancorar as novas informações. Depois de identificar alguns subsunçores, o professor pode trabalhar no sentido de favorecer o relacionamento deles às novas informações, que serão propaladas ao longo das atividades, possibilitando a interação cognitiva entre o novo e o prévio e, conseqüentemente, o desenvolvimento da estrutura cognitiva do aprendiz.

Atividades baseadas em E devem proporcionar aos alunos a oportunidade de trabalhar com definições, diagramas, tabelas, fórmulas e gráficos, para que possam entender os contras e prós de cada uma dessas representações. Ao entender que essas representações são diferentes fontes de informação sobre um mesmo objeto matemático, temos uma possibilidade de superação da confusão entre forma e conteúdo. Inclusive, ter acesso a uma pluralidade de registros de representação semiótica pode ampliar a possibilidade de resolução de problemas.

Em resumo, as cinco variáveis supracitadas foram manipuladas nas SDs referentes à parte experimental deste estudo, com o intuito de favorecer a operacionalização da definição de função. Elas serviram como recursos teóricos que auxiliaram nas discussões dos resultados e na validação das sequências didáticas. Os resultados do teste de sondagem, discutidos a seguir, mostram que os aprendizes, já iniciados no conceito de função, adquiriram uma definição inerte e incapaz de gerenciar conversões, o que colocou em jogo o potencial das variáveis levantadas.

TESTE DE SONDAGEM

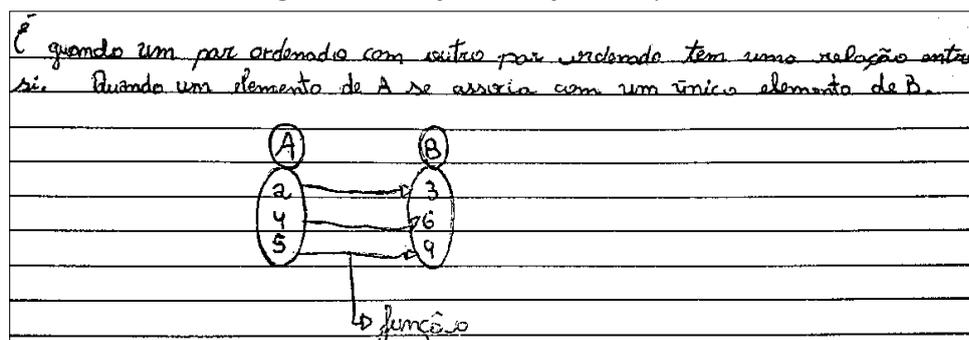
Por meio do teste de sondagem, pretendeu-se identificar alguns conceitos subsunçores relevantes para a ancoragem do conceito de função – tentativa de subsidiar a primeira condição para a ocorrência da aprendizagem significativa (variável D). Além do mais, tentou-se identificar se os alunos eram capazes de, em algum grau, operacionalizar as definições que enunciaram e articular as múltiplas representações do conceito de função. Em suma, o teste de sondagem objetivou verificar a substância da imagem conceitual dos alunos.

Sete questões compuseram o teste de sondagem. Na primeira questão, o respondente tinha de apresentar uma definição de função. Já as demais questões exigiam certas conversões, do registro figural para o registro em língua natural, do registro em língua natural para o registro algébrico, do registro tabular para o algébrico, do algébrico para o gráfico, bem como alguns tratamentos algébricos e identificações. Quanto aos resultados, nos limitaremos à apresentação e à discussão de alguns resultados da questão 1, mas as análises *a posteriori*, não só do teste de sondagem, terão como base os resultados de todas as questões.

A primeira questão solicitava o seguinte: Explique com suas palavras o significado do conceito matemático de função.

Todas as respostas dadas à questão supracitada foram versões não integrais da clássica definição de função como relação binária: *função é a relação entre os elementos de dois conjuntos quaisquer A e B, que a cada elemento x de A faz corresponder um único elemento y = f(x) de B*. Essa é a interpretação mais formal e geral do conceito de função, mas é a menos produtiva para permitir que o aluno compreenda e saiba usar a ideia de que funções expressam variação. A definição abaixo representa bem essa concepção de função.

Figura 1 – Definição de função dada por P1.



(Fonte: Participante da pesquisa)

Nota-se que P1 (figura 1) utilizou a representação por diagramas para exemplificar sua definição. No ensino de funções, essa representação expressa uma tentativa de apresentar funções, já no ensino básico, como relações entre elementos de dois conjuntos; contudo, nessa perspectiva, o trabalho com funções acaba sendo resumido à atividade cognitiva de formação, quer dizer, a reconhecer quando um diagrama representa ou não uma função. Para tal, basta identificar se de cada elemento do domínio parte uma e apenas uma flecha. Como as classes de funções expressadas por diagramas não possuem quaisquer aplicações significativas nem propriedades interessantes, temos apenas uma versão trivializada de um conceito matemático (PONTE, 1990).

Além do mais, percebe-se que P1, em sua definição, parece ter apenas memorizado que de cada elemento do conjunto A deve partir uma única flecha rumo ao conjunto B, sem entender o que isso significa, pois aparentemente desconsiderou uma lei de correspondência na hora de escolher os números para comporem seu conjunto B. Observe duas outras definições.

Figura 2 – Definição de função dada por P2.

É a relação de dois ~~grupos~~ elementos de grupos distintos

(Fonte: Participante da pesquisa)

Figura 3 – Definição de função dada por Q2.

Função é a relação entre pontos ordenados e dois conjuntos que varia x (de domínio) e y (de imagem)

(Fonte: Participante da pesquisa)

Observe que P2 (figura 2) utiliza o termo grupo em vez de conjunto e Q2 (figura 3) reduz o contradomínio ao conjunto imagem. As definições de P2 e Q2, embora menos precisas que a de P1, ainda estão dentro da tradição de função como relação binária. Como todos os respondentes tinham o mesmo professor de matemática, torna-se fácil especular que variável levou à unanimidade da interpretação de função como relação binária. Isso se explica pelo fato de que muito do que é feito pelos estudantes em relação ao conceito de função é reflexo da prática docente (PIRES; SILVA, 2015).

Ademais, uma das principais fontes de informação do professor sobre os conteúdos a serem ministrados, os livros didáticos, apresentam funções como relações binárias (LIMA, 2001; DASSIE et al., 2010). Para Lima (2001), definir função por meio de relações binárias é infrutífero, pois além de nenhum matemático nem usuário da matemática utilizar esse ponto de vista em seu cotidiano, a generalidade apresentada nas aulas é rapidamente abandonada.

Portanto, se a definição de função como relação binária é geralmente abandonada, constituindo-se numa mera formalidade que não será utilizada, e todos os alunos mostraram ter essa concepção de função, presume-se que o contexto de aprendizagem dos alunos foi pautado na contradição da variável C, a saber, enunciar uma definição de função que realmente seja utilizada. Em outras palavras, o contexto de aprendizagem dos alunos pode ter sido um verdadeiro contraexemplo de operacionalização da definição de função.

ANÁLISE A POSTERIORI DO TESTE DE SONDAGEM

Segundo os resultados do teste de sondagem, concluímos que: 1) os alunos tinham dificuldade de transcrever algebricamente situações; 2) os alunos tinham dificuldade de identificar gráficos de funções; 3) os alunos não foram capazes de relacionar as fórmulas das funções mais comuns trabalhadas no 1º ano do Ensino Médio com as suas respectivas representações gráficas; 4) as definições apresentadas não foram utilizadas, sendo abandonadas logo após enunciadas; 5) todas as definições enunciadas eram interpretações imprecisas da ideia de função

como relação binária; e 6) as ideias de sequência, proporcionalidade direta e função como relação binária poderiam servir como conceitos subsunçores.

Em síntese, os resultados do teste de sondagem evidenciaram que o contexto da pesquisa estava de acordo com o quadro teórico geral levantado. Ficou claro que a definição enunciada pelos alunos não subsidiou em nada as suas ações ao longo do teste, ou seja, os aprendizes não alcançaram a operacionalização da definição de função. Eles também não conseguiram articular as várias representações do conceito de função; o isolamento de registros fez-se presente nos resultados do referido teste. Principalmente, os aprendizes não tinham desenvolvido uma imagem conceitual que suportasse o entendimento da definição que enunciaram.

Como todos os participantes já tinham assimilado a definição de função como relação binária, embora não de forma muito clara, precisa e operacional, ela precisava ser utilizada como conceito subsunçor, caso contrário, iríamos contrariar a variável D, fundamental neste trabalho. Dessa forma, o teste de sondagem mostrou a impossibilidade de se considerar a variável A. Ela precisou ser modificada, e foi definida como: *discutir o conceito de função como relação entre elementos de dois conjuntos e como relação entre quantidades variáveis*². Enfim, mesmo depois das críticas que tecemos, a definição de função como relação binária precisou ser usada, e o favorecimento da operacionalização de um tipo pouco intuitivo de definição de função colocou à prova as variáveis de comando.

SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Foram três sequências didáticas aplicadas aos sujeitos da pesquisa, todas baseadas em experimentos³. No entanto, enfocaremos a *SD1 – caixa de papel*, cujo objetivo principal era apresentar um problema de otimização relacionado com uma função polinomial do terceiro grau.

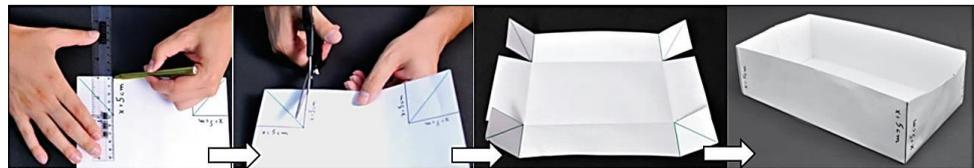
Optou-se por trabalhar com experimentos para melhor atender à variável B (apresentar a definição de função dentro de diferentes contextos). Além disso, atividades práticas são mais propícias a instigarem os alunos a aprenderem significativamente o conceito de função, isto é, são mais capazes de subsidiar o cumprimento da segunda condição para a ocorrência da aprendizagem significativa. Em atividades práticas, os alunos têm maior oportunidade de trocar informações com seus colegas, o que possibilita, de certo modo, o enriquecimento de suas imagens conceituais, tendo em vista o intercâmbio de significados estabelecido.

Cada sequência didática foi desenvolvida ao longo de três aulas duplas, cada aula com um objetivo. A primeira aula foi dedicada às explicações preliminares sobre o que deveria ser feito e à confecção de alguns objetos necessários para a realização dos experimentos. Na segunda aula, foram desenvolvidas as atividades: os alunos organizavam os dados em tabelas, dados estes que eram generalizados em fórmulas e sintetizados em gráficos, e as perguntas levantadas eram respondidas e discutidas. Na terceira aula, efetuava-se um resumo das atividades, os resultados alcançados pelos grupos eram discutidos, os mapas conceituais eram recolhidos e organizava-se uma síntese dos principais aspectos formais do conteúdo, procurando fazer a passagem do conhecimento, do plano individual e subjetivo, à dimensão de referência histórica e cultural do saber matemático.

Com a aplicação das três sequências didáticas, buscou-se apresentar o conceito de função dentro de um contexto rico em significados. As várias representações semióticas desse conceito foram trabalhadas (variável E) e a definição de função como relação binária (conceito subsunçor) foi constantemente utilizada para explicações e generalizações (variável C). Pretendeu-se criar um ambiente que subsidiasse a elaboração de uma definição que realmente fosse utilizada pelos alunos e servisse como um elemento que interconectasse as demais representações desse conceito, facilitando, sobretudo, a conversão.

A primeira sequência didática girou em torno do seguinte problema: Dada uma folha A4 (figura 4), qual a medida de x para que a caixa, sem tampa, obtida pela dobradura dos cantos, tenha o maior volume possível?

Figura 4 – Procedimento para a construção das caixas.



(Fonte: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1367>)

Os alunos foram solicitados a fazer, com o auxílio de régua, quadrados de lado x , nos quatro cantos da folha A4. Cada equipe construiu 10 caixas; para isso, foi preciso escolher 10 valores diferentes para x , com x variando entre 1 cm e 10 cm. Cortando um dos lados de cada um dos quadrados e colando as faces desses quadrados era possível montar as caixas.

Depois da confecção das 10 caixas, colocando-as uma ao lado da outra, os grupos deviam discutir e tentar descobrir qual delas tinha maior volume, baseando-se apenas na percepção visual. Feito isso, eles as numeraram em relação ao volume, do menor para o maior, número 1 para o menor volume e 10 para o maior.

Após a ordenação das caixas com base nas suas percepções visuais, os alunos tiveram de calcular algebricamente o volume das caixas. Para tanto, efetuaram o produto das medidas das três dimensões da caixa. Esses produtos serviram de base para uma segunda numeração, o menor volume calculado seria representado por 1 e o maior volume calculado por 10. Nesse momento, eles compararam a percepção visual que tiveram do volume com o seu valor real.

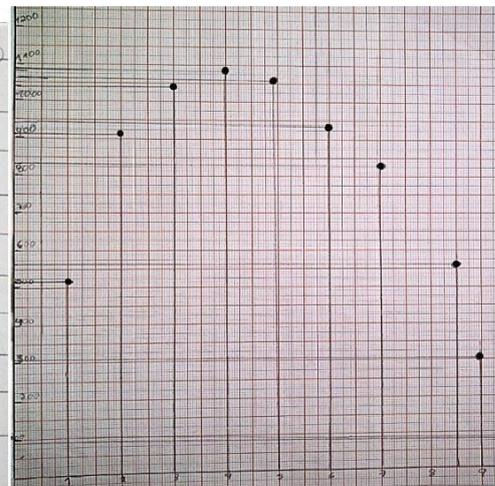
Com os dados obtidos, os alunos elaboraram uma tabela no caderno, contendo quatro colunas: a da altura (os valores de x), a do volume (produto das três dimensões), a da primeira numeração (percepção visual) e a da segunda numeração (valor real). Após a confecção e preenchimento da tabela, os grupos esboçaram o gráfico cartesiano do volume da caixa em função de sua altura x . Abaixo a tabela e o gráfico do participante R1.

Figura 5 – Tabela elaborada por R1.

ALTURA (x)	VOLUME (y)	1ª NUMERAÇÃO	2ª NUMERAÇÃO
1	518,7 cm ³	3	3
2	907,8 cm ³	5	6
3	1043,9 cm ³	7	8
4	1088,76 cm ³	9	10
5	1062,75 cm ³	10	9
6	939,81 cm ³	8	7
7	824,25 cm ³	6	5
8,5	565,25 cm ³	4	4
9	300,15 cm ³	2	2
10	95 cm ³	1	1

(Fonte: Participante da pesquisa)

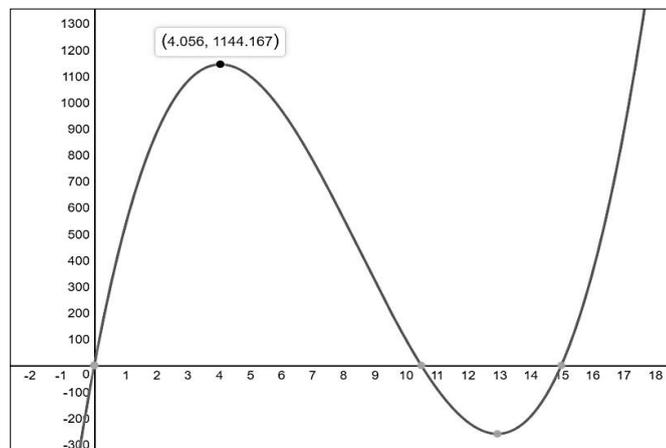
Figura 6 – Gráfico elaborado por R1.



(Fonte: Participante da pesquisa)

Algumas respostas diferentes foram dadas à pergunta: qual x resultará no maior volume? Entretanto, os alunos perceberam que apenas 10 valores de x não eram suficientes para o cálculo em questão. Foi nesse contexto que entrou em cena a importância da representação algébrica. O pesquisador mostrou, por meio de manipulações algébricas e com o auxílio do software de calculadora gráfica Desmos, que o gráfico esboçado pelos alunos era parte do gráfico da função definida por $y = 4x^3 - 102x^2 + 630x$. Observe a figura 7.

Figura 7 – Representação gráfica da função definida por $y = 4x^3 - 102x^2 + 630x$.



(Fonte: Elaborado pelos autores)

O valor máximo para o volume é de aproximadamente 1144,167 cm³, proveniente da escolha $x = 4,056$ cm. A maioria dos alunos chegaram à resposta $x = 4$ cm, outros a $x = 5$, o que dependeu das escolhas feitas. No geral, houve a compreensão dos contras e prós de cada representação. A tabela para organizar os dados, primeira tentativa para entender o comportamento do fenômeno; o gráfico para a síntese dos dados e visualização de como se dá a relação entre as duas variáveis; a representação algébrica, que confere generalidade e precisão.

Na terceira aula, houve uma discussão sobre a divergência entre a percepção visual e a ferramenta precisa que é o cálculo matemático. Discutiu-se, também, como seria possível explicar, por meio da definição, que há uma relação funcional

associado a um único y de B – uma tentativa de operacionalização da definição de função.

ANÁLISE A POSTERIORI DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Através dos resultados oriundos do desenvolvimento das SDs, deduzimos que: 1) os aprendizes passaram progressivamente a utilizar suas definições para explicar por que determinadas relações eram funcionais; 2) os participantes perceberam a real importância das representações semióticas para a compreensão do conceito de função; 3) os alunos começaram a entender os significados e limitações de cada uma das representações semióticas do conceito de função; 4) os alunos apresentavam uma ideia de que em toda função, quanto maior for o x , maior será o y , concepção solapada ao longo do desenvolvimento das atividades; 5) as atividades práticas serviram para enriquecer a imagem conceitual dos alunos, que era restrita ao modelo linear; e 6) os padrões que os experimentos mostravam em seus resultados levaram os alunos a compreenderem o significado das ideias de dependência, regularidade e variação, essenciais para o conceito de função.

No geral, as atividades práticas foram modelando as concepções dos alunos sobre a importância das múltiplas representações do conceito de função, solapando qualquer concepção mono registro apreendida por eles. Os contras e prós do uso de tabelas, gráficos e fórmulas foram constantemente discutidos. Percebia-se alunos discutindo sobre os padrões numéricos identificados nas tabelas e as limitações destas, sobre o porquê deste ou daquele ponto estar fora da curva, o que, segundo eles, sugeria novos cálculos e sobre a ideia de como deduzir uma fórmula. O recurso a uma pluralidade de representações semióticas possibilitou que os alunos constatassem a importância delas para a aquisição do conceito de função; inclusive, as formas de representar o conceito de função foram citadas por quase todos os participantes em suas definições de função dadas no questionário final, o que não ocorreu no teste de sondagem.

QUESTIONÁRIO FINAL

O questionário final foi aplicado no último encontro e guiou-se basicamente pelos mesmos pontos que direcionaram a construção do teste de sondagem. As respostas dadas a esse questionário proporcionaram importantes dados referentes ao impacto das sequências didáticas na imagem conceitual dos aprendizes, relativamente ao conceito de função. Temos, pois, uma oportunidade de constatar qual foi a contribuição que o favorecimento da operacionalização (via variáveis de comando) trouxe para a articulação das múltiplas representações do conceito de função e, conseqüentemente, para a aprendizagem significativa desse conceito.

Assim como no teste de sondagem, sete questões compuseram o questionário final, das quais discutiremos duas, a sexta questão, que é exatamente a primeira questão do teste de sondagem, aquela que exigia uma definição de função, e a sétima questão, que pretendeu captar a perspectiva dos participantes acerca das atividades desenvolvidas.

A sexta questão do questionário final solicitava o seguinte: Explique com suas palavras o significado do conceito matemático de função.

Alguns alunos apresentaram a definição de função como relação binária, que foi o conceito subsunçor adotado, mas com o diferencial de ser mais completa e precisa do que a que apresentaram no teste de sondagem. Observe S3 (figura 9).

Figura 9 – Definição de função enunciada por S3.

Função = Relações entre dois conjuntos não vazios, que apresentam dois conjuntos principais: domínio, e o seu domínio e a imagem, podendo ser representadas ^{em} ~~em~~ formas de tabelas, fórmulas e gráficos e diagramas de flechas, ~~em~~ uma função é usada duas principais vezes (leis): num exceção \Rightarrow um conjunto A (domínio) não pode deixar faltar nenhum elemento. Sem ambigüidades \Rightarrow um ponto de partida só tem um ponto de chegada mas, um ponto de chegada pode ter mais de um ponto de partida.

(Fonte: Participante da pesquisa)

Além daqueles que definiram função como relação binária, também houve aqueles que definiram função dentro de um contexto mais prático, no qual a ideia de variação foi central. Observe o exemplo a seguir.

Figura 10 – Definição enunciada por T4.

Função a relação existente entre duas grandezas, ~~que podem~~ que podem ser classificadas em variáveis dependente e independente. As funções podem ser representadas por meio de gráficos, tabelas e diagramas.
Ex: Quando vamos a um supermercado, o valor total da conta de pendura da quantidade de produtos e unidades diferentes que a pessoa comprar. Nesse caso, a variável dependente será o valor total da conta, pois ele depende do número de produtos comprados, que é a variável independente.

(Fonte: Participante da pesquisa)

T4 (figura 10) recorre à ideia de dependência entre duas quantidades variáveis. Usa a relação preço da compra x quantidade comprada, para exemplificar sua definição. Alguns alunos que optaram por essa interpretação, endossaram suas definições por meio da explicação dos contextos trabalhados nas sequências didáticas.

As definições apresentadas na sexta questão apontam para a seguinte situação: houve, de certo modo, uma convergência da interpretação de função como relação binária para a interpretação de função como relação entre quantidades variáveis. Essa evolução na concepção de função cumpre um dos principais objetivos da ED, visto que “a engenharia é concebida para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções” (ARTIGUE, 1996, p.202).

Os múltiplos contextos nos quais a definição de função foi trabalhada, a exemplificação constante da definição apresentada, bem como o trabalho com as duas interpretações de função (variável A modificada) forneceram aos alunos recursos cognitivos suficientes, para que eles pudessem assumir uma postura ativa

na construção dos seus próprios conhecimentos funcionais, enunciando definições pessoais criativas e condizentes com as formais, mas, acima de tudo, operacionais.

O fato que melhor ilustra o potencial de uma definição operacional diz respeito à sua importância para a interpretação do enunciado de um problema sobre funções. Veja a figura 11.

Figura 11 – Definição de função enunciada por S1.

Função é uma relação de dependência entre duas variáveis geralmente denominadas por X e Y (ou $f(x)$) em que X representa as variáveis independentes do conjunto do domínio e Y representa as variáveis dependentes do conjunto do contradomínio. Uma função pode ser representado através de fórmulas, gráficos, tabelas e diagramas. Vejamos um seguinte exemplo: Suponha que, para um determinado modelo de carro o consumo médio de combustível seja: 15 Km/litro, para saber qual valor que notamos que há uma relação entre a quantidade de litros e a distância que poderá ser percorrido, onde a distância a ser percorrido depende do quantidade de litros, com isso podemos criar uma fórmula que possa calcular qual a distância que o veículo percorre com qual quer quantidade de litros, basta chamar a distância de 'D' e a quantidade de litros de 'L' e relacionados: $D = 15 \cdot L$. Agora para calcular qual distância o veículo percorrerá com 10L, substituímos e aplicamos no fórmula criada: $D = 15 \cdot 10 \mid D = 150 \text{ Km}$. Assim conseguimos perceber que a função está presente em quase todos os sistemas e ao gerarmos uma fórmula, somos capazes capazes de controlar e dominar o fenômeno, podendo representá-lo através de gráficos, tabelas ou diagramas.

(Fonte: Participante da pesquisa)

S1 (figura 11) cita como exemplo, a fim de enriquecer sua definição de função, o contexto da primeira questão do questionário final, fazendo uma espécie de aplicação da sua definição a esse contexto, o que sugere uma compatibilidade entre definição conceitual e imagem conceitual. Esse respondente dá um verdadeiro exemplo de como uma definição operacional pode auxiliar a interpretação de situações-problema que envolvem relações funcionais entre variáveis. Enfim, passemos à sétima questão.

A sétima questão do questionário final solicitava o seguinte: As atividades realizadas ajudaram você a compreender melhor o conceito de função? Caso afirmativo, justifique.

Dois aspectos foram muito comuns nas respostas dos participantes: 1) o caráter dinâmico das atividades: que os respondentes chamaram de atividades práticas, lúdicas, baseadas em problemas do dia a dia, ou da vida real, ou seja, atividades que propunham discutir o conceito de função recorrendo a problemas concretos, com referência na realidade; e 2) o caráter interativo das atividades: que se refere à possibilidade de intercâmbio de informações entre os alunos de

um mesmo grupo ou de grupos diferentes, ou seja, refere-se à questão do trabalho em grupo. Vejamos duas respostas.

As atividades realizadas ajudaram você a compreender melhor o conceito de função?

Sim. Muitas vezes é difícil aprendermos algum conceito ou significado e lembrar sempre dele, por isso fazemos atividades, com o objetivo de exercitar os nossos conhecimentos e fixá-los em nossa mente. Por isso as atividades realizadas foram de extrema importância, pois com elas foi possível tirar dúvidas e ao mesmo tempo aprimorar nossos conhecimentos sobre função, que por não possuir um só conceito, torna seu entendimento mais difícil. As atividades também foram de extrema importância para que a turma compreendesse o tema abordado de uma maneira mais descontraída e lúdica, aumentando o interesse por parte significativa dos alunos sobre o assunto (Resposta dada por T4).

Sim, pois graças aos exercícios realizados em sala conseguimos ver na prática os conceitos de função como sem ambiguidade e sem exceção, também conseguimos trabalhar com exemplos da vida real sem serem exemplos perfeitos presentes no livro, e com atividades em grupo também acabamos prestando mais atenção nas coisas, saindo daquele mesmo ambiente de sala de aula, com as atividades práticas também podemos compartilhar e trocar informações com os amigos (Resposta dada por T3).

Acreditamos, baseando-nos não só nas respostas, mas também nas observações, que as declarações dos respondentes revelam que eles tiveram uma atitude positiva ante as atividades, no sentido de querer relacionar de maneira não-arbitrária e não-literal as novas informações com seus conhecimentos prévios, dado o interesse dos mesmos em querer participar das atividades consideradas por eles como dinâmicas e interativas. Ou seja, há indícios de que a segunda condição para a ocorrência da aprendizagem significativa, ter disposição para aprender significativamente, foi satisfeita.

Houve ainda a questão do intercâmbio de significados, que favoreceu ainda mais a disposição para aprender significativamente o conceito de função. T3 ilustra bem o aspecto interativo das atividades quando afirma: *“com as atividades práticas também podemos compartilhar e trocar informações com os amigos”*. T4 fala sobre a complexidade do conceito de função que *“por não possuir um só conceito, torna seu entendimento mais difícil”*, quer dizer, o conceito de função tem vários outros conceitos girando em torno dele, o que dificulta sua aprendizagem. Logo, as interações entre os participantes foram fundamentais devido à complexidade do conceito em jogo, pois a instrução coletiva é mais eficaz que a individualizada *“no caso das situações de aprendizagem em que o material é mais controvertido e os alunos necessitam de fecundação cruzada e exposição a outros pontos de vista”* (AUSUBEL et al., 1980, p.385).

ANÁLISE A POSTERIORI DO QUESTIONÁRIO FINAL

Os resultados do questionário final permitiram fazer as seguintes inferências: 1) os aprendizes utilizaram corretamente as definições para explicar por que os gráficos e diagramas apresentados representavam ou não relações funcionais; 2) houve alunos que utilizaram novas estratégias para tentar resolver os problemas apresentados, recorrendo a outros registros de representação; 3) as definições

enunciadas eram mais detalhadas e elaboradas do que aquelas que foram apresentadas no teste de sondagem, mostrando-se mais aptas para gerir a articulação das múltiplas representações do conceito de função; 4) as definições enunciadas sugerem certa evolução: de uma interpretação mais estática para uma interpretação mais dinâmica de função, quer dizer, o conceito subsunçor modificado, fruto da interação cognitiva entre o novo e o prévio, parece ter incorporado a ideia de variação, de padrão, de dependência entre variáveis; 5) os alunos permaneceram, mesmo que de forma mais tênue em relação ao teste de sondagem, com dificuldades em generalizar dados por meio de fórmulas; 6) a disposição para aprender significativamente o conceito de função foi alavancada pelo caráter dinâmico e interativo das sequências didáticas; e 7) as definições foram utilizadas pelos alunos para conversões, ou seja, pautados na compreensão das regras de conformidade, que lhes conferiram um aumento na capacidade de interpretação, graças à aquisição de significados, os aprendizes foram capazes de transitar com certa espontaneidade entre as várias representações do conceito de função.

Enfim, os contextos promovidos pelas sequências didáticas parecem ter fomentado o enriquecimento da imagem conceitual dos aprendizes. Isso possibilitou a assimilação da definição formal de função e favoreceu a compatibilidade entre definição conceitual e imagem conceitual. O produto final desse esforço, mas não totalmente acabado, foi uma definição utilizada de forma consciente pelos aprendizes, que os auxiliaram a unirem em um todo coerente todos os outros conceitos que orbitam o de função, guiando-os ao longo de identificações, tratamentos e, sobretudo, conversões – uma definição operacional.

Apesar de tudo, os alunos permaneceram, mesmo que de forma mais tênue em relação ao teste de sondagem, com dificuldades em generalizar dados por meio de fórmulas, isto é, fazer conversões para o registro algébrico e tratamentos dentro desse registro. Como o foco das atividades foi possibilitar a construção de uma definição operacional, o tratamento algébrico ficou em segundo plano, o que consideramos ter propiciado a permanência dessa situação. Parece-nos viável, para futuros projetos que visem ao favorecimento da operacionalização, uma etapa que enfatize a questão da generalização por meio de fórmulas e do tratamento algébrico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os alunos apresentaram um bom desempenho durante as sequências didáticas. Dentro de contextos que requeriam máxima transformação do conhecimento adquirido, eles conseguiram responder às perguntas formuladas, explicar as relações funcionais baseando-se em suas definições e organizar hierarquicamente seus conhecimentos por meio de mapas conceituais devidamente explicados. No questionário final, eles mostraram saber fazer as articulações exigidas, contrariando a possibilidade de uma aprendizagem essencialmente mecânica. Além disso, utilizamos os subsunçores identificados e, mediante atividades práticas, os instigamos a aprenderem significativamente o conceito de função. Por isso acreditamos que há evidências de aprendizagem significativa do conceito de função. Como as SDs implementadas buscaram o favorecimento da operacionalização da definição de função, acreditamos que a

operacionalização pode desencadear o processo de assimilação do conceito de função. Logo, *deve-se operacionalizar para articular e articular para compreender*.

Embora os resultados da experimentação indiquem que os alunos conseguiram executar as articulações exigidas e apreenderam o conceito de função, o que confere certo sucesso ao favorecimento da operacionalização da definição de função, algumas perguntas ficam em aberto: Será que o favorecimento da operacionalização da definição de outros conceitos matemáticos pode propiciar a aprendizagem significativa desses conceitos? Quais variáveis de comando manipular em cada caso, novas ou adaptações das variáveis levantadas neste estudo? O favorecimento da operacionalização é eficiente, no sentido de fomentar a aprendizagem significativa, para *iniciar* alunos no conceito de função ou em outro conceito? Quais são as implicações da operacionalização da definição a longo prazo?

Operationalization of functions definitions: a trigger process of meaningful learning of the concept of function

ABSTRACT

In this paper, we discuss the importance of defining the concept of function for meaningful learning. The articulation of the multiple representations of this concept allows its apprehension, so to favor the articulation becomes fundamental. It is believed that, in order to achieve articulation, definitions are indispensable, since they provide forms of reasoning that make them useful as connecting elements of other representations. We are not referring to the simple act of enunciating a definition, but rather to the process in which the learner consciously uses it to interpret situations based on functional relations, a process we call the operationalization of function definition. Thus, this research is guided by the following research question: How could the operationalization of the function definition, admitted as a didactic-methodological element, favor the meaningful learning of the concept of function? To verify the hypothesis that the operation facilitates the articulation, and this, in turn, enables meaningful learning, we apply three didactic sequences, based on aspects favoring the operationalization. Twenty secondary students from a public school in the city of Manaus-AM were involved. The results, from the confrontation between *a priori* and *a posteriori* analyzes, that is one of the phases of didactic engineering, which was the adopted research methodology, suggest benefits to learning, which are due to the evolution of the use of a definition: from an inert definition, abandoned from any reasoning immediately after stated, to an operational definition, used as a guiding source of functional thinking. We conclude that an operational definition could be seen as a triggering element of the process of meaningful learning of the concept of function.

KEYWORDS: Operationalization of the definition. Concept of function. Semiotic representation. Conceptual image. Meaningful learning.

NOTAS

1 Termo usado para designar diferentes tipos de representação em Matemática e seus inconvenientes próprios de significação e funcionamento, como escrita em língua natural, escrita algébrica, tabelas, gráficos, etc.

2 A interpretação de função como relação entre quantidades variáveis refere-se à ideia de duas grandezas que variam uma dependendo da outra. Essa interpretação elege a ideia de variação como o cerne do conceito de função.

3 Os experimentos realizados foram adaptações dos experimentos da coleção M³ Matemática Multimídia, desenvolvidos e disponibilizados pela Unicamp. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/>>. Acesso em: 10 ago. 2016.

REFERÊNCIAS

ALMOULOU, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n.1, p. 62-77, 2008.

ANDRADE, J. M.; SARAIVA, M. J. Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v.15, n.2, p. 137-169, jul. 2012.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 193-217.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

SOUZA, J. S. S. O conceito de função: da operacionalização da definição à aprendizagem significativa. 2017. 159 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2017.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática Ltda, 1951.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2012, p. 167-188.

DASSIE, B. A.; CARVALHO, J. B. P. F.; ALMEIDA, R. C. M.; REZENDE, W. M. O conceito de função em livros didáticos para a escola brasileira. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA, 5, 2010, Recife. **Anais...** Recife: EDUMATEC/UFPE, 2010. CD ROM.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

_____. Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. [Entrevista concedida à José Luiz Magalhães de Freitas e à Veridiana Rezende]. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, Paraná, v.2, n.3, p.10-34, jul./ dez. 2013.

LIMA, E. L. Exame de textos: análise de livros de matemática para o ensino médio. **Revista do professor de matemática**, n. 46, p.43-51, 2001.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: _____. (Org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2012, p. 233-246.

MOREIRA, M. A. Mapas conceptuales y aprendizaje significativo de las ciencias. **Revista Chilena de Educación Científica**, v. 4, n. 2, p. 38-44, 2005.

_____. ¿Al final, qué es aprendizaje significativo? **Revista Currículum**, La Laguna, Espanha, n. 25, p. 29-56, mar. 2012.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PIRES, R. F.; SILVA, B. A. Função: concepções daquele que ensina e daquele que aprende. **EM TEIA**, v. 5, n. 3, p.1-25, 2015.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de matemática. **Educação e Matemática**, APM, Portugal, n. 15, p.3-9, 1990.

SARAIVA, M. J.; TEIXEIRA, A. M. Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. **Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)**, Palermo, Italy, v.19, n.4, p.83-95, 2009.

SILVA, A. L. V. **Números reais no ensino médio: identificando e possibilitando imagens conceituais**. 2011. 333 p. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Educação, 2011.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics: with special reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 12, n. 2, p. 151-169, 1981.

Recebido: 2017-11-05

Aprovado: 2019-06-04

DOI: 10.3895/rbect.v12n3.7286

Como citar: SOUZA, J. S. S.; SOUZA, L. O. Operacionalização da definição de função: um processo desencadeador da aprendizagem significativa do conceito de função. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, v. 12, n. 3, 2019. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/7286>>. Acesso em: xxx.

Correspondência: Jerson Sandro Santos de Souza - jersoncobain@gmail.com

Direito autoral: Este artigo está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.

