Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia
ISSN: 1982-873X

https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect

Visualização do Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt com o GeoGebra

Givanildo Donizeti de Melo
givanildo.donizeti@ufrb.edu.br
0000-0002-6745-6331
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, Bahia, Brasil.

Rogelma Maria da Silva Ferreira
rogelma.maria@ufrb.edu.br
0000-0002-2095-4149
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, Bahia, Brasil.

Pollyane Vieira da Silva
pollyane.silva@ufpel.edu.br
0000-0002-5795-4943
Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil.

RESUMO

Este estudo apresenta o desenvolvimento de uma atividade proposta em sala de aula na disciplina de Geometria Analítica do curso de Bacharelado em Ciências Exatas e Tecnológicas, da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - Campus Cruz das Almas. Na referida atividade, o *software* GeoGebra foi utilizado como ferramenta na investigação da percepção de aprendizagem dos estudantes em relação ao conteúdo de bases e ao processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. O objetivo do artigo é apresentar os resultados dessa investigação, analisando como o uso de uma tecnologia digital pode contribuir para a compreensão desses conceitos. Os resultados do estudo revelaram que, apesar de alguns estudantes apresentarem dificuldades com o uso do *software* e com o conteúdo teórico da disciplina, a atividade foi capaz de reforçar a compreensão matemática da maioria dos alunos. Desta maneira, a atividade mostrou-se como uma alternativa para a inclusão de Tecnologias Digitais no ensino de matemática, mais especificamente no ensino de Geometria Analítica.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria analítica. Tecnologia digital. Ensino de matemática.

1. INTRODUÇÃO

A disciplina de Geometria Analítica está presente em diversos cursos da área de ciências exatas. Um dos conteúdos abordados na referida disciplina é o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, sendo este um algoritmo para obtenção de uma base ortogonal (ou ortonormal) de vetores a partir de uma base qualquer. Este método permite transformar uma tripla de vetores linearmente independentes em um conjunto ortogonal (ou ortonormal) de vetores que formam uma base de V^3, em que V^3 é o espaço dos vetores (Boulos; Camargo, 2005). Normalmente, os estudantes apresentam objeções sobre este conteúdo, visto que as fórmulas do processo envolvem muitos cálculos matemáticos e, assim, poucos conseguem alcançar uma compreensão geométrica do processo de ortogonalização.

Pesquisas ligadas à Educação Matemática têm enfatizado a importância da visualização e do raciocínio visual para o ensino e a aprendizagem da matemática, em particular da geometria (Corradi; Franco, 2020). Alguns autores, como Gutiérrez (1996) e Duval (2015), apresentam concepções distintas acerca da visualização, porém ambos a apontam como um processo a ser incentivado e que vai além do simples ato de ver ou da percepção em si, que envolve a capacidade de interpretar, refletir e utilizar informações visuais de maneira significativa para o aprendizado.

Define-se visualização matemática como “o processo de formação de imagens (mentais, com lápis e papel ou com o auxílio de tecnologias) usando essas imagens de forma eficaz para a descoberta e compreensão da matemática” (Zimmermann; Cunningham, 1991, p. 3). Nesse sentido, a visualização não é concebida como um fim em si mesma, mas como um recurso que potencializa a compreensão de conceitos matemáticos (Flores; Wagner; Buratto, 2012).

> Muitos autores destacam as contribuições que o uso de tecnologias podem trazer ao processo educativo, facilitando a visualização do que está ocorrendo, favorecendo a construção do conhecimento pelo estudante, possibilitando a interação professor-aluno, auxiliando o trabalho do professor. Quando usadas de forma criativa, as novas tecnologias podem impulsionar a participação dos estudantes nas aulas, pois é natural o interesse dos jovens pelas tecnologias; assim, cabe ao professor canalizar tal interesse para a promoção da sala de aula em um espaço de aprendizagem ativa e de reflexão. O aluno se sente fascinado pela interação que surge e pela possibilidade de poder participar, sugerindo ideias e tirando as dúvidas no próprio computador sem precisar se dirigir ao professor. Ele tem a possibilidade de testar várias variações dos dados, obtendo respostas às suas indagações e dúvidas que surjam no decorrer das atividades (Guedes, 2015, p. 366).

Segundo Maia, Gondim e Vasconcelos (2023), transformar a sala de aula em um ambiente interativo com a utilização do *software* GeoGebra, mais especificamente no ensino de Matemática, é uma estratégia de aprendizagem, o que possibilita que os alunos explorem, interajam e formem conceitos, além de contribuir para a superação das dificuldades no aprendizado da geometria evidenciadas nas avaliações.

Por outro lado, um estudo realizado por Yohannes e Chen (2021) revisou artigos na base de dados *Web of Science*, de 2010 a 2020, que foram relevantes para a integração do *software* GeoGebra na educação matemática. Os participantes das pesquisas realizadas nos referidos artigos foram estudantes do Ensino Fundamental, estudantes do Ensino Médio e estudantes do Ensino Superior. Verificou-se que poucos artigos investigaram a carga cognitiva, a ansiedade de aprendizagem e o envolvimento dos alunos. Apesar do GeoGebra ser um código aberto, esta pesquisa mostrou também que um número limitado de países está fazendo a integração do GeoGebra na educação matemática.

Segundo Miskulin (1999), quando se discute a possibilidade de utilizar *softwares* na Educação, pensa-se sempre em como esses recursos tecnológicos poderiam ser utilizados da melhor maneira possível para contribuir com o processo de ensino/aprendizagem. Em outras palavras, os professores devem sempre refletir sobre as possibilidades desses *softwares* no desenvolvimento de processos de pensamentos.

Ademais, a utilização de Tecnologias Digitais (TD) nas universidades brasileiras depara-se com dificuldades de ordem prática, particularmente de carência de recursos materiais. Contudo, as possibilidades oferecidas pelos recursos tecnológicos e computacionais, tal como a utilização do *software* GeoGebra, não devem ser negligenciadas. De acordo com a obra de Giraldo, Caetano e Mattos (2012), faz-se necessário o conhecimento destas possibilidades por parte dos professores para que estes possam adquirir contra-argumentos para tais dificuldades. Além disso, de acordo com Borba e Villarreal (2005), as TD funcionam como ferramentas que promovem a exploração e a experimentação, estimulando a autonomia dos estudantes, a curiosidade e uma abordagem dinâmica para a produção de conhecimentos.

Nessa perspectiva, o construto “seres-humanos-com-mídia” amplia essa compreensão ao considerar as TD como coparticipantes na produção do conhecimento matemático, e não apenas como ferramentas auxiliares. Segundo Borba (2012), Borba, Silva e Gadanidis (2014), Borba *et al.* (2016) e Borba, Souto e Canedo Jr. (2022), o desenvolvimento desse construto acompanha as transformações das próprias tecnologias digitais, sendo possível identificar diferentes fases de sua inserção na educação matemática, as quais têm sido utilizadas para compreender como essas tecnologias reconfiguram a sala de aula e os processos de aprendizagem.

Neste sentido, a utilização de recursos tecnológicos na educação é uma das preocupações da UNESCO (Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura) desde a alfabetização escolar, dado que existe o incentivo à aquisição de habilidades básicas no uso de computadores para todos e a ampliação da implementação e do uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) para o desenvolvimento sustentável e a paz, com um foco ainda maior na formação de professores para sensibilizá-los sobre a importância da alfabetização midiática e informacional no processo educacional. Desta maneira, a UNESCO estimula a formação de sociedades alfabetizadas em mídia e informação, tais como bibliotecas, arquivos, museus e a internet, independentemente das tecnologias utilizadas (UNESCO, 2023).

Nesse contexto, e com o intuito de facilitar a aprendizagem dos estudantes na disciplina de Geometria Analítica, propõe-se neste artigo o uso do *software* GeoGebra no ensino do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. O GeoGebra é um *software* dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma online com diversos recursos gratuitos (GeoGebra, 2023).

O processo de ortogonalização baseia-se na utilização da álgebra vetorial — soma de vetores e multiplicação de um número por um vetor — e no conceito de projeção ortogonal de vetores (Boulos; Camargo, 2005). Tanto as fórmulas do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt quanto a fórmula da projeção ortogonal são expressões analíticas, e a ausência da compreensão geométrica pode comprometer o entendimento pleno desses conceitos. Para Duval (2003), a aprendizagem de Geometria favorece três diferentes formas do processo cognitivo — a visualização, a construção e o raciocínio — que se inter-relacionam para habilitar o aluno com a proficiência necessária em Geometria.

Este artigo tem como objetivo apresentar os resultados de uma investigação realizada em uma turma de estudantes matriculados na disciplina de Geometria Analítica do curso Bacharelado em Ciências Exatas e Tecnológicas (BCET) da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB). Foca-se na percepção de aprendizagem por parte dos alunos em relação ao conteúdo de bases ortogonais e ao processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt com o uso de uma tecnologia digital para auxílio da construção matemática e visualização do conteúdo.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Adotou-se neste artigo uma abordagem qualitativa de natureza aplicada do tipo observação participante. Segundo Souza, Lopes e Souza (2015), este tipo de metodologia envolve um projeto emergente e em evolução, de modo que não precisa, necessariamente, ser previamente descrito. A coleta de dados ocorre a partir das interações do sujeito com o pesquisador no ambiente natural, no campo. Esta metodologia está centrada nas perspectivas dos participantes, porém, neste caso, o processo de análise é condicionado ao movimento das ações do sujeito durante o processo de interação com o pesquisador. Normalmente acontece em um ambiente de formação onde o pesquisador está inserido, e é comum que o pesquisador seja o responsável pelo processo de condução das atividades de formação, mesmo que esta seja desenvolvida de maneira colaborativa.

Com o intuito de aprimorar o processo de ensino e aprendizagem e de promover maior engajamento dos estudantes nas aulas de Geometria Analítica, o professor-pesquisador planejou e aplicou atividades que integravam o uso de TD ao conteúdo trabalhado. A ferramenta escolhida para esse propósito foi o *software* GeoGebra, considerando seu potencial para exploração visual e manipulação dinâmica de objetos tridimensionais.

Nessas atividades, os alunos tiveram um primeiro contato com o *software*, favorecendo a familiarização com a ferramenta. Assim, o público-alvo da atividade proposta neste trabalho foram estudantes que já haviam participado dessas atividades prévias de ambientação e que, portanto, possuíam condições mínimas para utilizar o GeoGebra.

A aplicação da atividade, ponto central deste artigo, foi realizada no dia 4 de abril de 2024, às 16 horas, no Laboratório de Informática do Pavilhão de Aulas 1, para estudantes do curso de BCET do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da UFRB, *Campus* Cruz das Almas, matriculados na disciplina de Geometria Analítica, uma turma de aproximadamente 40 alunos. O Laboratório de Informática dispunha de 28 computadores de mesa, um quadro branco e um projetor.

No horário agendado, os pesquisadores tiveram acesso ao Laboratório de Informática e, juntamente com o monitor, ligaram os computadores para receber os estudantes. A aplicação teve início com a apresentação do projeto de pesquisa e do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). Aqui vale destacar que o projeto de pesquisa que originou este artigo foi submetido e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da UFRB sob Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE) de número 71406123.9.0000.0056.

Na sequência, o professor responsável pela disciplina apresentou a atividade e colocou-se à disposição para eventuais dúvidas. Os discentes deram início à atividade aproximadamente às 16:30, e tiveram até às 18:30 para finalizá-la. Estavam presentes o professor responsável pela disciplina, uma professora colaboradora do projeto de pesquisa, um discente monitor da disciplina e 26 estudantes (Figura 1). As atividades tiveram início com a descrição do processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt no GeoGebra.

Figura 1 – Estudantes durante a aplicação da atividade.

Fonte: Os autores (2024).

Os conteúdos de base e o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt foram previamente ministrados para a turma pelo professor responsável em aulas anteriores, possibilitando aos alunos o acesso ao material disponibilizado pelo professor, a saber, *slides*, notas de aula e lista de exercícios. Além disso, os alunos tiveram contato com o GeoGebra Calculadora 3D para a realização de um exercício da disciplina. Foi enviado aos alunos, antes da realização da atividade, o *link* de acesso, via Sistema de Gestão de Atividades Acadêmicas (SIGAA), que os direcionava para a atividade.

A coleta de dados deu-se por meio da aplicação de quatro questões estruturadas com construções geométricas, utilizando o *software* GeoGebra e uma questão dissertativa sobre a percepção dos estudantes em relação à atividade proposta. Os alunos tiveram acesso à atividade por meio de um *link* gerado pelo GeoGebra Calculadora 3D, direcionando-os para uma sala de aula interativa em que puderam realizar a atividade (Figura 2). Ao abrir a atividade, o aluno se deparou com a estrutura apresentada no Quadro 1.

Figura 2 – Interface do GeoGebra ao abrir a atividade

Fonte: Os autores (2024).

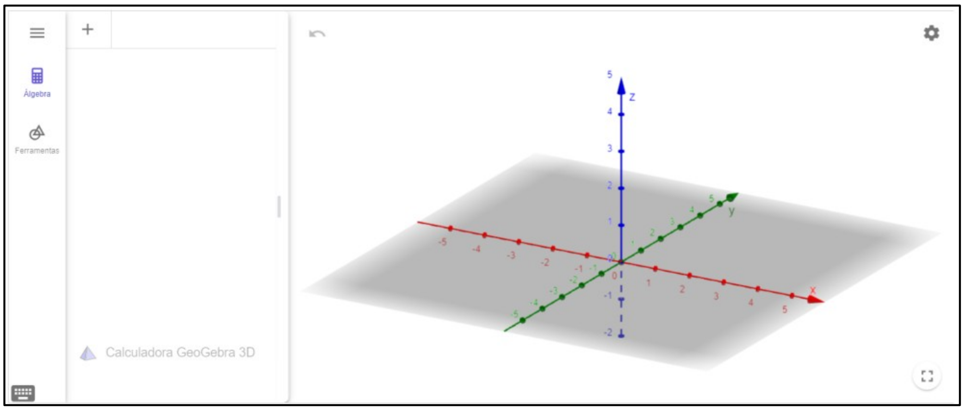
Quadro 1 – Momentos da atividade.

Momentos	**Descrição**
Momento 1	Introdução à atividade e ao uso do GeoGebra Calculadora 3D
Momento 2	Apresentação das questões sobre o conteúdo de base no espaço dos vetores V^3
Momento 3	Apresentação das questões sobre o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt
Momento 4	Questão dissertativa sobre a percepção dos estudantes em relação à atividade proposta

Fonte: Os autores (2026).

Na introdução foram apresentados comandos básicos necessários para a realização da atividade, tais como: inserção de ponto, vetor e plano; e cálculo do comprimento de vetor, ângulo entre vetores e produto escalar entre vetores. Nos demais momentos da atividade foram apresentadas as questões (Quadro 2) onde, para cada questão, disponibilizou-se uma janela gráfica do GeoGebra Calculadora 3D para auxílio na resolução e visualização geométrica da questão (Figura 3).

Figura 3 – Janela gráfica GeoGebra Calculadora 3D.



Fonte: Os autores (2024).

Quadro 2 – Enunciados das questões aplicadas aos estudantes.

Questões	Enunciados
Questão 1	Insira três vetores quaisquer não nulos no GeoGebra Calculadora 3D. Determine se esses vetores formam uma base. Justifique sua resposta de forma completa, utilizando argumentos geométricos e analíticos.
Questão 2	Insira uma base para V^3 no GeoGebra Calculadora 3D, em que V^3 é o espaço dos vetores. Determine se esta base é ortogonal ou ortonormal e justifique sua resposta de forma completa, utilizando argumentos geométricos e analíticos.
Questão 3	De acordo com o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, a base (v1,v2,v3) é ortogonal. Como você pode verificar no software GeoGebra se essa base é realmente ortogonal? Verifique.
Questão 4	De acordo com o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, a base (e1,e2,e3) é ortonormal. Como você pode verificar no software GeoGebra se essa base é realmente ortonormal? Verifique.
Questão 5	Você enfrentou alguma dificuldade ao realizar a atividade? Se sim, quais foram? Como você avalia a contribuição desta atividade para o seu entendimento do conteúdo estudado? Por favor, compartilhe qualquer elogio, crítica ou sugestão que possa ter

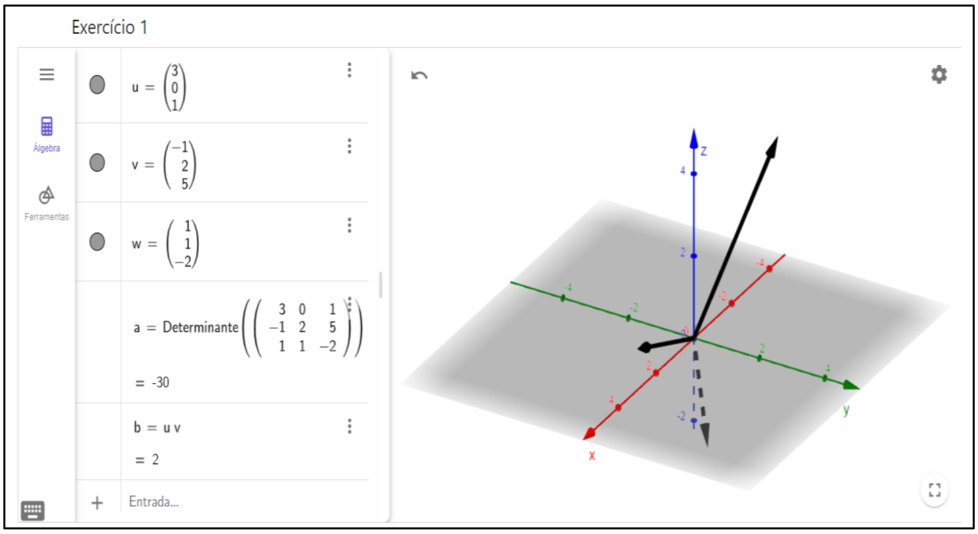
Fonte: Os autores (2024).

A análise dos dados foi realizada em duas etapas complementares. Primeiramente, as respostas produzidas pelos estudantes na plataforma GeoGebra 3D foram extraídas e organizadas conforme cada questão proposta na atividade. Em seguida, essas respostas foram agrupadas por similaridade, considerando padrões de compreensão, tipos de erros e estratégias utilizadas pelos alunos durante o processo de resolução. Na segunda etapa, procedeu-se a uma análise qualitativa, cujo foco foi identificar dificuldades, avanços conceituais e potenciais contribuições do uso do GeoGebra para a aprendizagem do procedimento de Ortogonalização de Gram-Schmidt.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Todos os estudantes que responderam às questões 1 e 2 sobre o conteúdo de base no espaço dos vetores, V^3, utilizaram a janela do GeoGebra Calculadora 3D como ferramenta auxiliar nas suas respostas. Todavia, percebeu-se que a maioria dos alunos utilizaram apenas argumentos analíticos para responder à Questão 1. Por exemplo, o Aluno 1 (A1) respondeu: “*Calculando o determinante dos vetores u=(3,0,1), v=(-1,2,5) e w=(1,1,-2), o resultado obtido deu -30 ou seja ≠ 0, confirmando ser linearmente independentes, assim formando uma base.*” O referido aluno utilizou a janela para construir a Figura 4:

Figura 4 - Janela do GeoGebra Calculadora 3D do A1 para a questão 1.

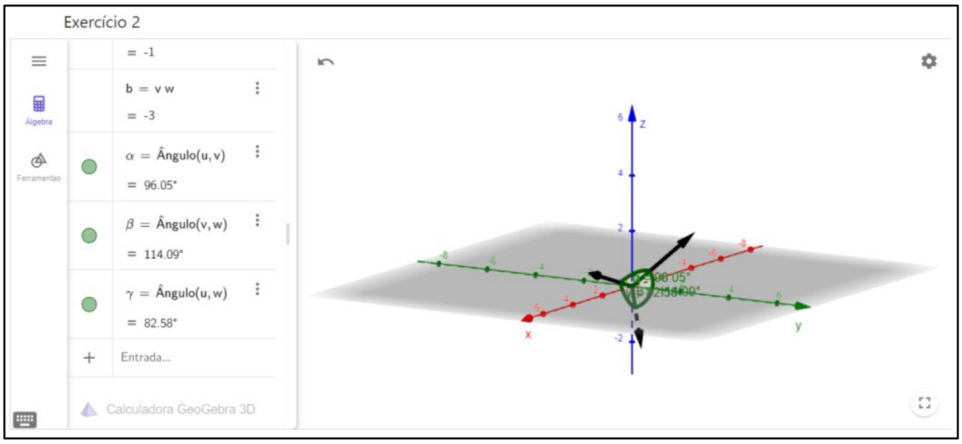


Fonte: Os autores (2024).

Observa-se que o estudante utilizou o cálculo do determinante como argumento, evidenciando uma abordagem analítica. Embora na Figura 4 haja a representação gráfica dos vetores, o estudante não fez uso de argumento geométrico de que, por exemplo, os três vetores não são paralelos a um mesmo plano.

Na Questão 2, um possível argumento analítico seria o cálculo do produto escalar dos vetores dois a dois, enquanto um argumento geométrico seria a verificação do ângulo reto entre quaisquer dois vetores. Notou-se que aproximadamente 39% dos alunos priorizaram o argumento geométrico. Isto deve-se ao fato de que a verificação do ângulo é de fácil visualização geométrica no *software* GeoGebra, como respondeu o Aluno 2 (A2): “*Tendo uma observação que os vetores u, v e w formam uma base V³, mas não são ortogonais, pois não possui o ângulo de 90º, e nem ortonormal, pois nenhum dos ângulos formaram 90º*”. Com a construção da seguinte representação na janela do GeoGebra Calculadora 3D (Figura 5).

Figura 5 - Janela do GeoGebra Calculadora 3D do A2 para a questão 2



Fonte: Os autores (2024).

Ainda na Questão 2, 19% dos estudantes apresentaram tanto argumentos geométricos quanto analíticos. Um exemplo de resposta é a do Aluno 3 (A3): "*A base não é ortogonal, pois os vetores não formam o ângulo de 90° entre eles e o produto escalar é diferente de 0. Também não é ortonormal, porque os vetores não são unitários*".

Aproximadamente 27% dos estudantes não apresentaram respostas corretas e/ou satisfatórias, e 15% dos estudantes utilizaram apenas argumentos analíticos, como por exemplo o Aluno 4 (A4):

> A tripla ordenada de vetores (e, f, g) formam uma base! Isso acontece porque os vetores são linearmente independentes. A base formada não é ortogonal nem ortonormal! é apenas uma base. Para que a base fosse ortogonal, o produto escalar de todos os vetores, de dois em dois, deveria dar 0. O produto escalar dos vetores (e, f) = 12; logo, não atende os requisitos para ser uma base ortogonal. Não menos importante, para ser ortonormal, a base deveria, além de ser ortogonal, a norma de cada vetor deve ser 1 (Aluno 4).

A aplicação do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt foi apresentada de modo detalhado no terceiro momento, de acordo com os passos a seguir:

Passo 1: Defina a origem do sistema de coordenadas tridimensional, incluindo o ponto O=(0,0,0);

Passo 2: Insira uma tripla ordenada de vetores (u_1, u_2, u_3) linearmente independentes que formam uma base para o espaço vetorial V^3;

Passo 3: Nesta etapa, aplique o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, isto é, insira no GeoGebra Calculadora 3D a tripla de vetores (v_1, v_2, v_3) dada por:

$v_1=u_1$

$v_2=u_2-[(u_2v_1)/|v_1|^2]v_1$

$v_3=u_3-[(u_3v_1)/|v_1|^2]v_1-[(u_3v_2)/|v_2|^2]v_2$

Com os seguintes comandos:

Vetor v_1: v_{1} = u_{1}

Vetor v_2: v_{2} = u_{2}-((u_{2} v_{1})/(Comprimento(v_{1})^(2)))v_{1}

Vetor v_3: v_{3} = u_{3}-((u_{3} v_{1})/(Comprimento(v_{1})^(2))) v_{1}-((u_{3} v_{2})/(Comprimento(v_{2})^(2))) v_{2}.

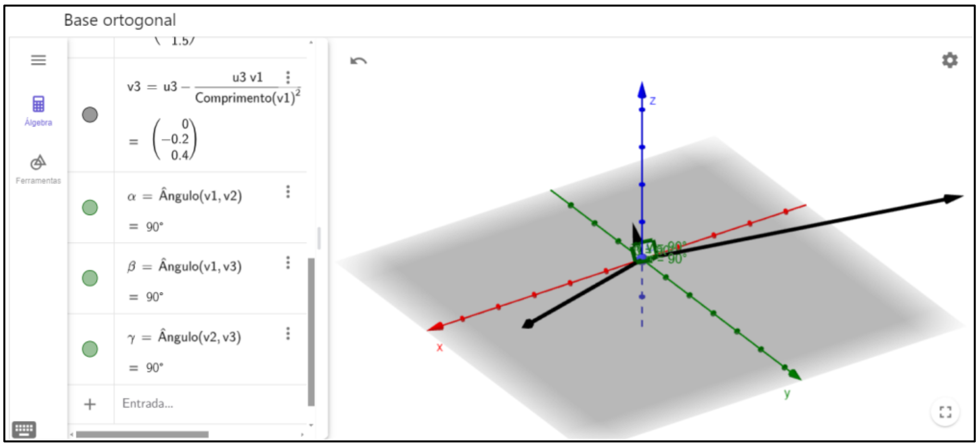
Foi disponibilizada uma janela do GeoGebra Calculadora 3D para que o discente pudesse aplicar o processo a partir dos comandos apresentados, e na sequência foi exposta a Questão 3, como apresentada no Quadro 2.

A partir da análise das respostas, 73% dos estudantes obtiveram uma base ortogonal aplicando os passos descritos no processo. No entanto, observou-se que 58% dos discentes apresentaram dificuldades em justificar geometricamente e/ou analiticamente que a base é ortogonal, como respondeu o Aluno 5 (A5): *"A base é realmente ortogonal pois o produto escalar entre dois vetores é igual a 0".* Nesta resposta, pode-se perceber que o estudante não argumentou corretamente o fato de a base obtida ser ortogonal, pois para isso, a tripla ordenada (v_1, v_2, v_3) deve formar uma base para o espaço vetorial V^3 e os vetores da base serem dois a dois ortogonais, isto é, o ângulo entre quaisquer dois vetores da base é igual a 90°.

À luz das contribuições de Duval (2003), essa dificuldade pode ser interpretada como um obstáculo no processo de articulação entre diferentes registros de representação semiótica. Embora o estudante utilize corretamente um argumento algébrico, sua justificativa não evidencia a conversão para o registro geométrico. Segundo Duval, a compreensão matemática exige não apenas o tratamento dentro de um mesmo registro (como o algébrico), mas, sobretudo, a capacidade de conversão entre registros distintos, o que constitui uma das principais dificuldades dos estudantes.

Podemos destacar também a resolução do Aluno 6 (A6) (Figura 6), o qual utilizou a janela gráfica do GeoGebra Calculadora 3D e argumentos geométricos para a resolução, como os cálculos dos ângulos entre os vetores da base, para verificação de que realmente a base é ortogonal.

Figura 6 - Janela do GeoGebra Calculadora 3D do A6 para a Questão 3.



Fonte: Os autores (2024).

O A6 complementou a resolução com a seguinte resposta: *"Após o processo de ortogonalização, eu calculei o ângulo entre os vetores e todos eles resultaram em 90°, logo, a base de V³ se tornou uma base ortogonal"*, o que indica que ele compreendeu os conceitos envolvidos nesta questão.

Em seguida, foram apresentados os passos para ortonormalizar a base ortogonal obtida anteriormente, isto é, obter uma base ortogonal com vetores unitários. Este processo é conhecido como processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, e então foi proposta a Questão 4, como apresentada no Quadro 2.

Passo 1: Repita os passos da aplicação do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortogonal para V^3, ou insira a base ortogonal (v_1, v_2, v_3) previamente obtida;

Passo 2: Insira no GeoGebra a tripla de vetores (e_1, e_2, e_3), onde cada vetor e_i é o versor de v_i, em que $e_i = v_i/|v_i|$ com i=1,2,3.

Com os seguintes comandos:

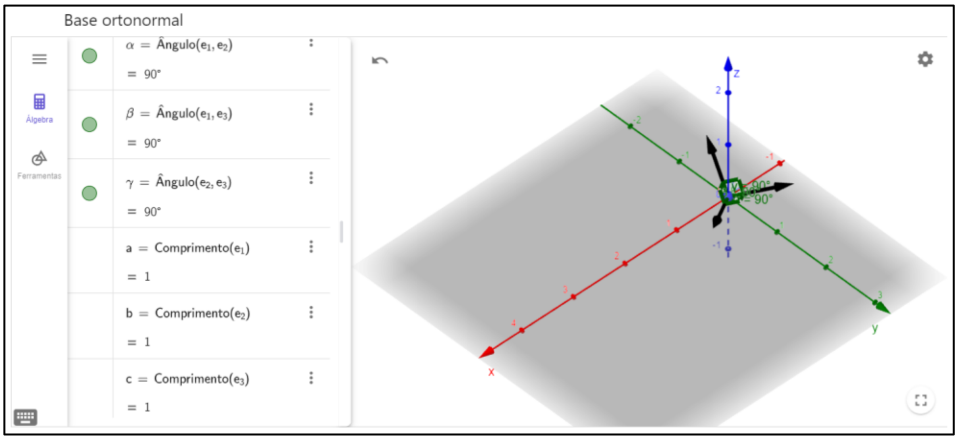
Versor e_1: e_{1}=v_{1} / Comprimento(v_{1});

Versor e_2: e_{2}=v_{2} / Comprimento(v_{2});

Versor e_3: e_{3}=v_{3} / Comprimento(v_{3}).

O Aluno 7 (A7) respondeu à Questão 4 de forma correta e apresentou argumentos geométricos, como descrito a seguir e apresentado na Figura 7: *"Através do cálculo do comprimento, dos versores e dos ângulos, com o auxílio do geogebra, descobri que a base ortogonal que eu tinha feito anteriormente se tornou uma base ortonormal, porque o comprimento dos vetores é igual a 1 e o ângulo entre eles é igual a 90°"*.

Figura 7 - Janela do GeoGebra Calculadora 3D do A7 para a questão 4



Fonte: Os autores (2024).

Portanto, pode-se observar que o *software* ajudou o aluno na verificação de que a tripla de vetores (e_1, e_2, e_3) é uma base ortonormal por meio do cálculo do ângulo entre quaisquer dois vetores e do comprimento de cada um dos vetores. Uma base ortonormal é composta por três vetores unitários dois a dois ortogonais que formam uma base para o espaço vetorial V^3.

Por outro lado, a Questão 4 não foi respondida por 44% dos alunos presentes. Os autores acreditam que esse número se deve ao fato de que muitos discentes não conseguiram finalizar a atividade no tempo proposto por dificuldade com o *software* e por não possuírem domínio do conteúdo teórico, embora visto em aulas anteriores.

Como encerramento da atividade, utilizou-se uma questão dissertativa, a Questão 5, para que os alunos pudessem compartilhar suas percepções sobre a atividade, mesmo que não tivessem concluído as questões anteriores, destacando pontos positivos e negativos, também com a possiblidade de oferecer sugestões para melhorias futuras na atividade. Verificou-se que 96% das respostas foram positivas, com expressões como: "*gostei muito, divertido, parabéns pela iniciativa, estimulou o conhecimento, fixou o conteúdo e facilitou a aprendizagem*".

Alguns estudantes expuseram a dificuldade com o uso do *software* e com o conteúdo teórico da disciplina. Outros sugeriram a utilização do *software* com maior frequência nas aulas. Dentre as várias respostas positivas, destaca-se a do Aluno 8 (A8):

> De primeira, o contato com o software causa estranheza, pois o primeiro contato que tive com o mesmo foi através dessa disciplina. No entanto, aprender geometria analítica com a visualização em tempo real do que estamos buscando é extremamente didático e gratificante! Certamente foi a melhor aula que tive sobre a disciplina durante o curso. Gratidão (Aluno 8).

A única resposta negativa foi a seguinte: "*Achei péssimo, não sei usar esse aplicativo e tive vergonha de pedir ajuda para o monitor (: prefiro fazer no papel*".

A visualização tem sido apontada como uma ferramenta essencial no processo de aprendizagem, pois facilita o entendimento de conteúdos complexos. Neste sentido, Miskulin (1999) destaca dois caminhos que justificam a utilização de computadores no ensino. O primeiro consiste em promover atividades que reproduzam o ensino tradicional utilizando a tecnologia. O segundo caminho, considerado mais adequado, envolve a exploração de novas atividades que tirem proveito dos recursos tecnológicos, possibilitando novas formas de visualização e representação de conceitos, especialmente no campo da matemática. Dessa forma, a tecnologia pode oferecer novas oportunidades para a compreensão dos conceitos de maneira inovadora.

Durante a aplicação da atividade, observou-se o alinhamento do conteúdo às necessidades de aprendizagem da turma, visto que os alunos já haviam sido introduzidos ao conteúdo de forma teórica. A atividade foi eficaz em reforçar a compreensão, dado que a maioria dos alunos conseguiu trabalhar de forma autônoma. No entanto, ficou evidente que o tempo previsto para a atividade (2 horas) não foi suficiente para 9 dos 26 estudantes, os quais não conseguiram concluir todas as questões propostas dentro desse período.

Notou-se também, durante a aplicação da atividade, dificuldades em executar comandos básicos do GeoGebra apresentadas por alguns alunos, os quais solicitaram ajuda aos professores e ao monitor presentes. Em dois momentos, o professor responsável foi ao quadro explicar os comandos que geraram dúvidas. Este cenário, também relatado na literatura, aponta que a utilização do GeoGebra, apesar de favorecer a visualização e a compreensão conceitual, exige um período de familiarização por parte dos alunos (Hauenstein, 2022). Estudos desenvolvidos no ensino superior mostram que a necessidade de apoio docente é comum nas etapas iniciais de atividades com GeoGebra, especialmente em conteúdos de retas e planos, dado o caráter abstrato da Geometria Analítica (Silva, 2020).

Todavia, vale destacar que todos os alunos mostraram interesse e engajamento durante a aplicação da atividade proposta. Assim como observado em outras experiências, os discentes demonstraram interesse e participação ativa ao longo da atividade, indicando que, superadas as dificuldades iniciais, o GeoGebra contribuiu significativamente para a exploração dinâmica dos conceitos e para o fortalecimento das conexões entre representações algébricas e geométricas (Guadarrama; Becerril, 2023).

Portanto, o uso do GeoGebra mostrou-se particularmente vantajoso para o ensino de Geometria Analítica ao permitir a visualização em tempo real das expressões analíticas e de objetos geométricos por parte dos alunos. Essa integração entre múltiplas representações, a saber, algébrica, geométrica e computacional, favoreceu a compreensão de conceitos abstratos como dependência linear entre vetores, base do espaço vetorial V^3 e processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. A possibilidade de manipulação dinâmica das figuras também estimulou a investigação e o pensamento crítico, uma vez que os alunos puderam expor seus conhecimentos e explorar o conteúdo de maneira interativa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de matemática apresenta inúmeras deficiências que precisam ser melhoradas. O uso das tecnologias em sala de aula é uma forma de proporcionar um ambiente de aprendizagem diferente, onde os alunos podem desenvolver atividades e explorar diferentes formas de resolução de problemas com o auxílio da visualização de conceitos matemáticos por meio do uso de um *software*, no caso deste trabalho, do GeoGebra.

Neste cenário, propôs-se que os estudantes utilizassem a janela do GeoGebra como ferramenta de cálculos e visualização para aprimorar a resposta com argumentos analíticos e geométricos. Os alunos relataram gostar de usar o *software*, principalmente pela facilidade de visualização geométrica do conteúdo teórico abordado, o que mostra o alcance do objetivo deste trabalho, além de confirmar a importância do uso de TD no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Entretanto, também foram identificadas limitações no uso do recurso, uma vez que parte dos estudantes demonstrou pouca familiaridade com o *software*, o que impactou a resolução das questões propostas. Esse aspecto sugere que a inserção de ferramentas tecnológicas no contexto educacional deve ocorrer de forma contínua e planejada, a fim de que os alunos desenvolvam maior autonomia em sua utilização. Dessa forma, recomenda-se que o GeoGebra seja utilizado com maior frequência nas aulas da disciplina, bem como em outros conteúdos matemáticos.

Com relação ao foco da atividade, foi identificado um aproveitamento satisfatório, uma vez que 73% dos estudantes obtiveram uma base ortogonal por meio do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. No entanto, observou-se que 58% destes discentes, apesar de alcançarem corretamente o resultado, apresentaram dificuldades em justificar suas respostas por meio de argumentos algébricos e geométricos.

Portanto, o ensino da Matemática com a utilização de recursos tecnológicos como o *software* GeoGebra mostrou-se eficiente na abordagem do ensino do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, permitindo o aprendizado da Geometria Analítica aliado à visualização dos conceitos matemáticos envolvidos.

VISUALIZATION OF THE GRAM–SCHMIDT ORTHOGONALIZATION PROCESS WITH GEOGEBRA

ABSTRACT

This study presents the development of an activity carried out in the classroom within the Analytical Geometry course of the Bachelor's degree in Exact and Technological Sciences at the Federal University of Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas campus. In this activity, the GeoGebra software was used as a tool to investigate students' learning perceptions regarding the concepts of bases and the Gram–Schmidt orthogonalization process. The objective of this article is to present the results of this investigation, analyzing how the use of digital technology can contribute to the understanding of these concepts. The results indicate that, although some students experienced difficulties with both the use of the software and the theoretical content of the course, the activity was able to enhance the mathematical understanding of most students. Thus, the activity proved to be a viable alternative for the integration of Digital Technologies in mathematics teaching, particularly in the teaching of Analytical Geometry.

KEYWORDS: Analytical geometry. Digital technology. Mathematics education.

REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo de Carvalho. Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. **ZDM-Mathematics Education** 44(6), p. 801-814, 2012. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s11858-012-0436-8. Acesso em: 29 mar. 2026.

BORBA, Marcelo de Carvalho; VILLARREAL, Mónica E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation. Springer Science & Business Media, 2005.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia R.; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática:** sala de aula e internet em movimento. Autêntica, 2014.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ASKAR, Peter; ENGELBRECHT, Johann; GADANIDIS, George; LLINARES Salvador; AGUILAR, Mario Sánchez. Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. **ZDM-Mathematics Education** 48, p. 589–610, 2016. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-016-0798-4. Acesso em: 29 mar. 2026.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SOUTO, Daise Lago Pereira.; CANEDO JR, Neil da Rocha. **Vídeos na educação matemática**: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais. Autêntica, 2022.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. **Geometria Analítica**: um tratamento vetorial. São Paulo: Pearson, 2005.

CORRADI, Raquel Polizeli; FRANCO, Valdeni Soliani. Visualização em Geometria, aproximações entre as perspectivas de Duval e Gutiérrez: um estudo com acadêmicos de um curso de licenciatura em Matemática. **Revista BOEM**, Florianópolis, v. 8, n. 16, p. 32-51, 2020. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/17836. Acesso em: 26 nov. 2025.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática (1995) *In*: MACHADO, D.A. **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semióticas. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, Raymond. Figures et visualisation géométrique: «voir» en géométrie. *In*: BAILLÉ, J.; LIMA, J. (ed.). **Du mot au concept**. Figure. Grenoble: Presses Universitaires, 2015. p. 147-182.

FLORES, Cláudia Regina; WAGNER, Débora Regina; BURATTO, Ivone Catarina Freitas. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 31-45, 2012. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/8008. Acesso em: 21 nov. 2025.

GEOGEBRA. O que é o GeoGebra?, 2023. Disponível em: https://www.geogebra.org/about. Acesso em: 22 mar. 2026.

GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo; MATTOS, Francisco. **Recursos computacionais no ensino de matemática**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, SBM, 2012.

GUADARRAMA, Alberto; BECERRIL, Fernando. Figuras feitas com GeoGebra como estratégia didática para o ensino de geometria analítica. **REAMEC – Revista de Educação em Ciências e Matemática**, v. 11, n. 1, p. e23112, 2023. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/16861. Acesso em: 22 mar. 2026.

GUEDES, Paulo Cezar Camargo. Aplicação do software geogebra ao ensino da geometria analítica. **Ciência e Natura**, *37*(3), p. 365-375, 2015. Disponível em: https://doi.org/10.5902/2179460X14555. Acesso em: 03 maio 2026.

GUTIÉRREZ, Ángel. **Visualization in 3-Dimensional Geometry: in search of a framework.** University of Valence, Spain, 1996. Disponível em: https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf. Acesso em: 22 mar. 2026.

HAUENSTEIN, Débora Marília. **Ensino de geometria analítica auxiliado pela geometria computacional**: uma sequência didática desenvolvida com o uso do GeoGebra. 2022. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2022. Disponível em: https://guaiaca.ufpel.edu.br/handle/prefix/8699. Acesso em: 22 mar. 2026.

MAIA, Lucas Emanuel de Oliveira; GONDIM, Raquel de Souza; VASCONCELOS, Francisco Herbert Lima. Utilização do geogebra para o ensino de geometria: uma revisão sistemática de literatura. **Ensino Da Matemática Em Debate**, *10*(1), p. 31–51, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.23925/2358-4122.2023v10i60031. Acesso em: 22 mar. 2026.

MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra. **Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da geometria**. 1999. Tese (Doutorado em Educação) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999. Disponível em: https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/232997. Acesso em: 22 mar. 2026.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS PARA A EDUCAÇÃO, A CIÊNCIA E A CULTURA [UNESCO]. **Gestão escolar e tecnologia na educação do Brasil**. 2023**.** Disponível em: https://www.unesco.org/pt/fieldoffice/brasilia/expertise/educational-management. Acesso em: 22 mar. 2026.

SILVA, Alessandro Pereira Marcelina da. **O uso do software GeoGebra como recurso metodológico no processo de ensino e aprendizagem de retas e planos**. 2020. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/27697. Acesso em: 22 mar. 2026.

SOUZA, Leandro Oliveira; LOPES, Celi Espasandin; SOUZA, Antonio Carlos. Os Delineamentos Metodológicos nas Investigações Brasileiras em Educação Estatística. **Revista Perspectivas da Educação Matemática**, UFMS, v. 8, n. 18, p. 506-525, 2015. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1461. Acesso em: 22 mar. 2026.

YOHANNES, Abebayehu; CHEN, Hsiu-Ling. GeoGebra in mathematics education: a systematic review of journal articles published from 2010 to 2020. **Interactive Learning Environments**, p. 5682-5697, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.1080/10494820.2021.2016861. Acesso em: 22 mar. 2026.

ZIMMERMANN, Walter; CUNNINGHAM, Steve. Editors´ Introduction: What is Mathematical Visualization? *In*: ZIMMERMANN, Walter; CUNNINGHAM, Steve (Eds.). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics**. Washington: MAA, 1991. p. 1-7. Disponível em: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:17034582. Acesso em: 22 mar. 2026.

Recebido: 9 fev. 2025.
Aprovado: 13 maio 2026.
DOI: 10.3895/rbect.v19n1.19889
Como citar: MELO, G. D.; FERREIRA, R. M. S.; SILVA, P. V. Visualização do Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt com o GeoGebra. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 19, p. 1-19, 2026. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/19889>. Acesso em: XX.
Correspondência: Givanildo Donizeti de Melo - givanildo.donizeti@ufrb.edu.br