

# Investigação matemática em meio ao quadro teórico dos Três Mundos da Matemática na formação do professor de matemática

## RESUMO

Neste trabalho, tem-se o objetivo de discutir a consonância entre o processo de Investigação Matemática em sala de aula e o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (Corporificado, Simbólico e Formal) em meio à formação inicial de professores de Matemática. Trata-se de uma pesquisa de natureza bibliográfica, na qual, por meio de análises textuais (livros, teses, dissertações, artigos, entre outros) promove-se o encontro teórico entre dois ou mais campos de estudo. Por conseguinte, debate-se, hipoteticamente, a resolução de equações do segundo grau, por meio de sua fórmula específica, tendo como possíveis interlocutores, acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática, no âmbito da disciplina de Práticas do Ensino Fundamental. Então, desenvolvem-se diálogos na perspectiva metodológica de Investigação Matemática, com vistas a envolver as três vertentes matemáticas distintas de se agir em objetos matemáticos (prática, teórica e formal) e, entrelaçadas aos três níveis de abstração do conhecimento matemático (estrutural, operacional e formal). As análises das discussões, com base no referencial teórico adotado, permite-se concluir que a inserção da prática de Investigação Matemática em consonância com o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática possibilita ao professor pesquisar, planejar, agir matematicamente e, analisar conjeturas de resoluções de um ou mais problemas, bem como fomentar e validar as discussões e resoluções apresentadas por seus estudantes em meio ao conjunto de áreas do conhecimento matemático (Aritmética, Geometria, Álgebra, Geometria Analítica, entre outras), de forma a ressaltar particularidades e ou destacar as similaridades e conjunções entre elas.

**PALAVRAS-CHAVE:** Educação Matemática. Investigação Matemática. Três Mundos da Matemática.

**Geraldo Aparecido Polegatti**  
[geappolegatti@gmail.com.br](mailto:geappolegatti@gmail.com.br)  
0000-0003-4515-3855  
Instituto Federal de Mato Grosso, Juína,  
Mato Grosso, Brasil.

**Angela Marta Pereira das Dores Savioli**  
[angelamarta@uel.br](mailto:angelamarta@uel.br)  
0000-0002-5624-6398  
Universidade Estadual de Londrina,  
Londrina, Paraná, Brasil.

## INTRODUÇÃO

Neste trabalho, tem-se o objetivo de discutir a consonância entre a metodologia de Investigação Matemática em sala de aula e o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (Corporificado, Simbólico e Formal), em meio à formação inicial de professores de Matemática. Assim, são apresentadas possíveis discussões hipotéticas entre o professor formador e seus acadêmicos de Licenciatura em Matemática, no cenário da disciplina de Práticas do Ensino Fundamental e, tendo como objeto de estudo, o processo de ensino e aprendizagem da resolução de equações do segundo grau por meio de sua fórmula específica. Destaca-se que este artigo corresponde a uma expansão do trabalho de Polegatti e Savioli (2021b), apresentado no VIII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.

Trata-se de uma pesquisa bibliográfica que, “utiliza-se de dados ou de categorias já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados” (SEVERINO, 2015, p. 122). Na dinâmica da pesquisa bibliográfica, o referencial teórico é inerente ao processo investigativo com interação entre o pesquisador e os autores referenciados por meio das análises e possíveis relações de seus documentos ou trabalhos publicados (livros, teses, dissertações, artigos, entre outros).

Concorda-se que “[...] a pesquisa bibliográfica não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob um novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras” (MARCONI; LAKATOS, 2010, p. 166). Assim, neste trabalho propõe-se a inserção da metodologia de Investigação Matemática no escopo do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática.

O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 23).

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), na dinâmica de Investigação Matemática a participação dos estudantes é de fundamental importância, requer envolvimento dos participantes no desenvolvimento do processo de aprendizagem com vistas à construção do conhecimento matemático em estudo. E, para além, Ferruzi e Costa (2018) salientam que o processo de se trabalhar com Investigação Matemática na práxis, conduz os estudantes a interagirem com conceitos matemáticos presentes na conjunção dos cenários que abarcam as atividades propostas, com outros conceitos matemáticos que emergem das discussões entre os estudantes e o professor.

Nesse interim, segundo Visintainer (2019), o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática vai ao encontro de formulação e interpretação de conjecturas e conjunções do conteúdo matemático a ser investigado, articulando-o em três estágios de desenvolvimento cognitivo, por intermédio da transição do pensamento matemático de cada viajante por entre os modos singulares de se agir nos objetos matemáticos em estudo em cada mundo.

Fundamentalmente, a teoria dos Três Mundos da Matemática nos apresenta como um ser humano, em seu desenvolvimento, faz conexões matemáticas e como são desenvolvidas as estruturas de conhecimento que crescem ao longo do tempo em tamanho e sofisticação (VISINTAINER, 2019, p. 31).

Para Tall (2020), o Mundo Corporificado agrega as ações humanas em objetos matemáticos (inicialmente reais que refletem na constituição de objetos mentais) oriundas das percepções, como por exemplo, a partir da observação, manipulação e mensuração de um cubo qualquer (objeto real) constroem-se as fórmulas (objetos mentais) para os cálculos de seu volume e de sua superfície total.

Segundo Tall (2020), o Mundo Simbólico é o lugar das ações humanas em objetos matemáticos como, por exemplo, expressões numéricas ou algébricas que desencadeiam ações humanas por meio de manipulações simbólicas cada vez mais sofisticadas, as quais promovem o aprimoramento do pensamento matemático com vistas ao desenvolvimento de um Sistema Axiomático Formal (axiomas, teoremas e prova matemática), que por intermédio da Lógica Matemática e da Teoria dos Conjuntos constitui o escopo do Mundo Formal (TALL, 2020).

Ferruzi e Costa (2018) destacam que a investigação matemática como uma prática pedagógica, atua para ampliar ou aprimorar as múltiplas capacidades dos estudantes, “como a criatividade, a interpretação, a reflexão, a argumentação, a sistematização e a autonomia” (FERRUZI; COSTA, 2018, p. 298). Com relação ao processo de formação de professores de Matemática as “oportunidades de ir e vir entre os Três Mundos da Matemática devem ser estimuladas pelos docentes formadores, em qualquer conteúdo trabalhado nas disciplinas” (BISOGNIN; BISOGNIN; LEIVAS, 2016, p. 374). Concorda-se que,

[...] os docentes de cursos de Licenciatura em Matemática, bem como os pesquisadores interessados em investigar o ensino e a aprendizagem em tais cursos, aprofundem os estudos sobre as ideias de Tall, especialmente sobre os Três Mundos da Matemática (SOARES; CURY, 2017, p. 81).

Bueno e Viali (2019) destacam que tanto a pesquisa quanto o planejamento de práticas de ensino da Matemática, tendo como perspectiva de abordagem, o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática possibilita-se: aprofundar no objeto matemático em estudo, abarcar ideias de resolução do problema que emergem das discussões, evidenciar conexões entre as áreas do conhecimento matemático (Geometria, Aritmética, Álgebra, entre outras), além de apresentar conjunções entre as diferentes formas de representações do objeto matemático durante o processo de Investigação Matemática, ou seja, é o “Ensino de Matemática com vistas a permitir ao aluno a aprender matemática fazendo matemática” (FERRUZI; COSTA, 2018, p. 298).

Nesse contexto, a seguir, debate-se o cenário abrangente, complexo, versátil e dinâmico dos Três Mundos da Matemática que culmina com a síntese desse quadro teórico desenvolvida por Polegatti, Savioli e Leivas (2022), com base em Polegatti (2020), a partir de reflexões dos contextos teóricos oriundos de Tall (2007; 2013; 2020), em consonância com o processo de investigação matemática no âmbito da formação inicial de professores de Matemática.

## **A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA EM MEIO AOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

A complexidade, a dinâmica e a diversidade do conhecimento matemático se fazem presente perante o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática “sendo algo mais amplo do que o acréscimo de novos saberes à base prévia do sujeito” (FLORES; LIMA; MÜLLER, 2020, p. 1343). De acordo com Polegatti e Savioli (2021b), discussões nos contextos de processos de ensino e aprendizagem da Matemática, que envolvem o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, proporcionam o diálogo entre as metodologias de ensino e as teorias de aprendizagem debatidas no cenário da Educação Matemática.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), o aluno deve envolver-se ativamente no processo de aprendizagem que possui objetivos traçados no planejamento do professor, e que conduz cada estudante a utilizar seu aparelho cognitivo, bem como considerar seus recursos afetivos para a construção de conhecimento. “Ao requerer a participação do aluno na formação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 23). Já as jornadas epistemológicas, de professores e estudantes, em meio aos três mundos matemáticos promovem o desenvolvimento cognitivo, incentivam a participação ativa do estudante e conduzem ao aprimoramento do pensamento matemático de cada viajante (POLEGATTI; SAVIOLI, 2021a).

Para Marcatto (2021), o processo de aprendizagem da Matemática perpassa pela necessidade dos alunos desenvolverem o raciocínio matemático com destreza e naturalidade perante a resolução de atividades debatidas com o professor. Para tanto, “os professores precisam compreender a natureza do raciocínio matemático e serem capazes de usar estratégias de ensino que o promovam nos alunos” (MARCATTO, 2021, p. 2). Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012) salientam que o estabelecimento de conexões inerentes ao conhecimento matemático por parte dos estudantes e acadêmicos da Licenciatura em Matemática, é primordial no processo de “pensar matematicamente e, conseqüentemente, de raciocinar matematicamente” (PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012, p. 362).

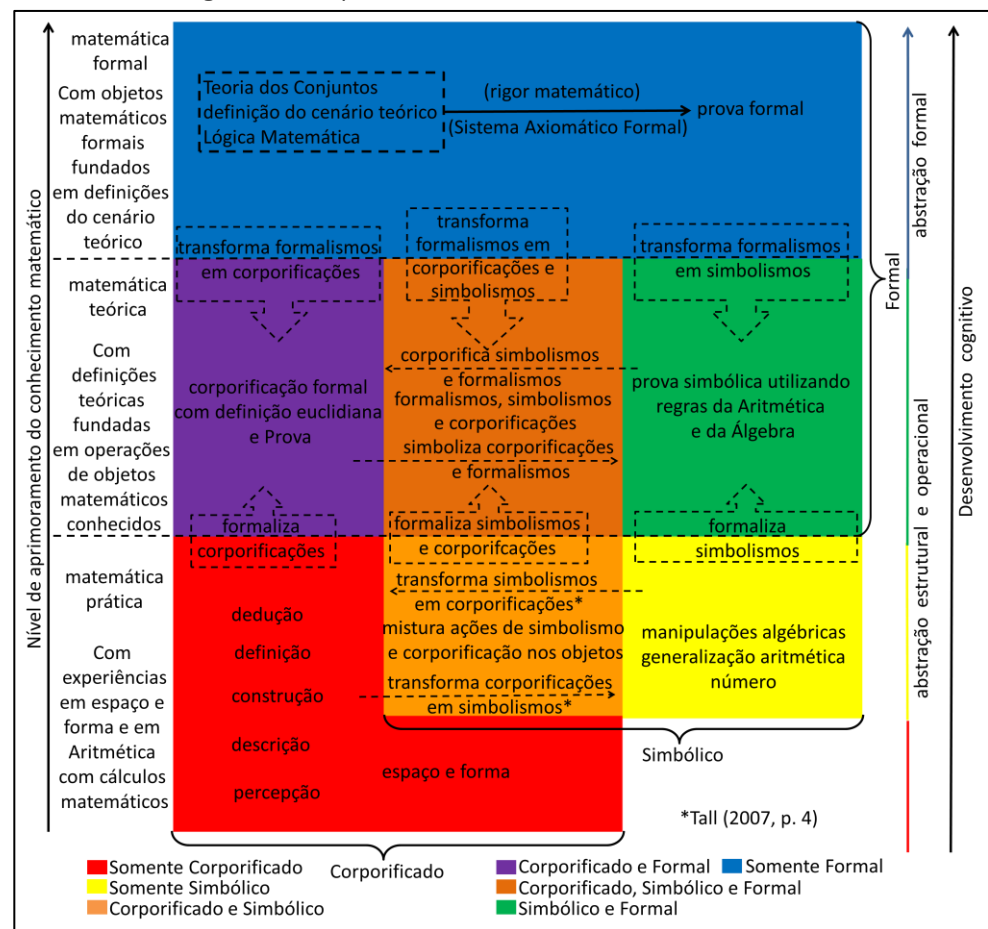
Flôres (2020) aponta que estudos relacionados ao quadro teórico dos Três Mundos da Matemática com acadêmicos da Licenciatura em Matemática, proporcionam a compreensão de que há diferentes maneiras de se pensar matematicamente (Corporificado, Simbólico e Formal) perante uma ou mais atividades e, ressalta que por meio desse quadro teórico, o professor atenta-se “ao modo como os alunos pensam e proporciona diferentes abordagens de um mesmo conceito, levando em consideração a jornada individual de cada estudante em sua evolução do pensamento matemático” (FLÔRES, 2020, p. 161).

Segundo Tall (2013), o Mundo Corporificado baseia-se nas percepções e ações humanas em objetos matemáticos reais (sólidos geométricos, por exemplo) que se desenvolvem em representações mentais (expressões e equações, por exemplo) que são descritas em linguagem matemática cada vez mais aprimorada transformando-se em entidades mentais presentes no contexto das ideias matemáticas.

Tall (2013) destaca que as componentes matemáticas, características do Mundo Simbólico, emergem por intermédio das manipulações numéricas e ou algébricas em objetos matemáticos flexíveis (expressões, equações, funções, entre outros) com vistas ao aprimoramento da linguagem matemática e do pensar ou raciocinar matematicamente. Já no Mundo Formal, promove-se o desenvolvimento do conhecimento matemático por meio de linguagem axiomática com base em axiomas, teoremas, a Teoria dos Conjuntos e Lógica Matemática com vistas ao desdobramento de prova matemática (TALL, 2013).

Ainda de acordo com Tall (2013), em meio ao quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, a dinâmica de movimento do pensamento matemático se constitui em três níveis de sofisticação das ações humanas nos objetos matemáticos (matemática prática, matemática teórica e matemática formal) por três graus de desenvolvimento cognitivo (abstração estrutural, abstração operacional e abstração formal). Para Tall (2007; 2013; 2020), conforme a Figura 1, nas conjunções desses níveis e graus o pensamento matemático de cada estudante e professor se aprimoram em meio ao desenvolvimento de atividades matemáticas com vistas a perpassar pelos três mundos matemáticos e suas zonas de confluências ao formalizar corporificações, formalizar simbolismos e corporificações, formalizar simbolismos, corporificar formalismos, transformar formalismos em corporificações e simbolismos e transformar simbolismos em formalismos.

Figura 1 – Um panorama dos Três Mundos da Matemática



Fonte: Adaptado de Polegatti (2020) e Polegatti, Savioli e Leivas (2022).

No cenário da Figura 1, conforme Polegatti, Savioli e Leivas (2022), as ações humanas de matemática prática (observação, manipulação, classificação, construção, descrição, generalização, entre outras) em objetos matemáticos reais (sólidos geométricos, por exemplo) ou construídos no cognitivo de cada aluno (triângulos, retângulos, círculos, expressões numéricas ou algébricas, equações, dentre outros), instigam o desenvolvimento de abstração estrutural com ou sem indícios de abstração operacional, tanto no contexto restrito ao Mundo Corporificado (região vermelha da Figura 1), quanto no interior específico do Mundo Simbólico (região amarela da Figura 1) e, ao perpassar pela zona de confluência desses dois mundos (região alaranjada clara da Figura 1) com a mistura das características de ambos.

De acordo com Polegatti, Savioli e Leivas (2022), as ações humanas em objetos matemáticos, perante o nível de matemática teórica, se articulam em meio às zonas de confluências entre os três mundos matemáticos com intensidade de manipulações simbólicas que, por sua vez, promovem o desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural e com vistas à abstração formal. Em acordo com esse cenário,

[...] à medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 38).

Nesse sentido, perante as ações de matemática teórica, as corporificações vão sendo formalizadas (região roxa da Figura 1) por meio do estudo das definições euclidianas e consequente desenvolvimento de prova geométrica. Por sua vez, os simbolismos vão sendo formalizados (região verde da Figura 1) por intermédio de manipulações algébricas cada vez mais sofisticadas com o propósito da construção de prova algébrica. Já na tripla zona de confluência entre os três mundos (região alaranjada escura da Figura 1), há o processo de formalização das consonâncias entre as corporificações e os simbolismos. Com relação ao Mundo Formal, concorda-se que:

A introdução da ideia de prova matemática pode ser feita gradualmente, restringindo-se, numa fase inicial e com os alunos mais novos, à procura de uma justificação aceitável, que se baseia num raciocínio plausível e nos conhecimentos que os alunos possuem (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 38).

Assim, o Mundo Formal (região azul da Figura 1) corresponde ao nível das ações humanas em objetos matemáticos formais (matemática formal). Com base em Tall (2013), nesse mundo as provas geométricas e ou algébricas são aprimoradas para a prova matemática por meio da construção de um Sistema Axiomático Formal, que utiliza axiomas e teoremas em conjunção com a Teoria dos Conjuntos e a Lógica Matemática, com vistas ao desenvolvimento de abstração formal em cada viajante. Ou seja, o indivíduo pensa ou raciocina matematicamente ao realizar manipulações com objetos matemáticos formais que operam com uma linguagem formal axiomática.

A seguir, descreve-se a resolução e apresenta-se um panorama das discussões entre o professor formador e os três acadêmicos participantes envolvendo o processo de ensino e aprendizagem de resolução de equações do

segundo grau, perante o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, a partir de um problema escolhido pelos participantes.

## **INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E O ENSINO DA FÓRMULA DE RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU POR ENTRE OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA**

Polegatti e Savioli (2021b) ressaltam que o professor de Matemática, já no processo de elaborar o seu plano de ensino tendo como base o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, perfaz sua jornada cognitiva pelos três modos distintos, organizados e conexos de desenvolvimento do conhecimento matemático (Corporificado, Simbólico e Formal). Lembrando que “[...] nem todos os indivíduos passam da mesma forma pelos Três Mundos da Matemática, porque há influências diversas, de seu meio ambiente, de sua formação escolar e das dificuldades que encontrou no seu aprendizado” (BISOGNIN; BISOGNIN; LEIVAS, 2016, p. 366).

Já com relação a dinâmica da Investigação Matemática em processos de ensino e aprendizagem da Matemática,

Uma atividade de investigação matemática desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito. (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 25).

Nesse sentido, em cumprimento a primeira fase da dinâmica de Investigação Matemática, o professor formador responsável pela disciplina de Práticas do Ensino Fundamental, propõe aos acadêmicos o estudo da fórmula de resolução de equação do segundo grau. Nesse componente curricular tem-se o objetivo de debater com os futuros professores de Matemática os processos de ensino de conteúdos da Matemática presentes nos currículos das séries finais do Ensino Fundamental (quinto ao nono ano), atrelando a eles, teorias da aprendizagem da Matemática. Concorde-se que,

Os Três Mundos da Matemática não são hierárquicos, misturam-se e complementam-se no processo de aprendizagem da Matemática, sendo essas experiências, fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático (MARTELOZO; SAVIOLI, 2019, p. 59).

Ressalta-se que “a partir da combinação de três mundos distintos e complementares, enfatizamos a importância de experiências envolvendo conceitos matemáticos em diferentes contextos” (MARTELOZO; SAVIOLI, 2019, p. 60). Contextos esses que tanto envolvem diferentes áreas do conhecimento matemático (Geometria, Aritmética, Álgebra, entre outras) quanto àqueles relacionados ao(s) problema(s) utilizado(s) como fonte de discussões envolvendo conteúdo(s) matemático(s) a ser(em) estudado(s). As investigações matemáticas em sala de aula envolvendo contextos geométricos contribuem para a percepção de “aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 71). Além disso, assim como acontece em os Três Mundos da Matemática, a dinâmica de investigação matemática pode contribuir,

[...] para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 71).

Nesse sentido, tem-se o seguinte problema para essa investigação “Pedro utilizou 500 metros de arame para contornar, uma vez, um pasto retangular de 1 hectare. Quais são as dimensões desse pasto?” (BARROSO, 2006, p. 61). Argumenta-se com os acadêmicos que na resolução desse problema podem-se envolver contextos matemáticos distintos (geométricos, aritméticos, algébricos e formais), que ganham notoriedade e conexões na dinâmica de investigação matemática em meio ao quadro teórico dos Três Mundos da Matemática.

Na segunda fase da investigação matemática, fomenta-se a discussão conjunta dos acadêmicos no âmbito da zona de confluência entre os Três Mundos da Matemática (região alaranjada escura), que ao serem afetados por suas ações de matemática teórica, conduz-se ao desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural. Nesse contexto, busca-se construir uma representação geométrica do problema por meio do desenho de uma região retangular, denotando as variáveis  $x$  e  $y$  para seus comprimento e largura, respectivamente. E, após algumas manipulações simbólicas chega-se às relações  $y = 250 - x$ , considerando-se o perímetro do pasto e,  $x \cdot y = 10000$  para o cálculo de sua área. Destaca-se que essas representações estão presentes na resolução do livro didático utilizado.

De fato, o desafio lançado pela generalização de um padrão numérico e a compreensão do que traduz essa generalização constituem aspectos que muitas vezes estão envolvidos nas investigações numéricas e que apoiam o desenvolvimento do raciocínio algébrico (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 69).

Nessa perspectiva, prossegue-se com as discussões no interior da zona de confluência entre os mundos Corporificado e Simbólico (região alaranjada clara da Figura 1). Por meio de ações de matemática prática conduzem-se os acadêmicos a calcular alguns valores para essas dimensões (aqui se sugere cinco valores). Então, após os cálculos numéricos que promovem o desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional, chega-se ao resultado de que, perante o que é informado no problema, o comprimento do pasto mede  $50\text{ m}$  e sua largura  $200\text{ m}$ . Em seguida, o professor intervém para questionar se esses valores são os únicos que satisfazem a resolução do problema.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) ressaltam que o processo de criação matemática é dinâmico e de movimentos de idas e vindas entre as áreas do conhecimento matemático em contraste “com a imagem usual dessa ciência, como um corpo de conhecimento organizado de forma lógica e dedutiva, qual edifício sólido, paradigma de rigor e da certeza absolutas” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 15). Nesse sentido, as discussões retornam ao âmbito da zona de confluência entre os três mundos matemáticos, por intermédio de ações conjuntas de matemática teórica, que possibilitam o desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural e com vistas à abstração formal. Dessa dinâmica emerge a equação do segundo grau



$-x^2 + 250x - 10000 = 0$ , oriunda das manipulações simbólicas entre as relações do perímetro e da área do referido pasto.

Segundo Lima, Healy e Koch (2017), as manipulações algébricas de resolução de equações do segundo grau envolvem principalmente características do Mundo Simbólico. Então, perante as ilustrações da Figura 1, no interior do Mundo Simbólico, por meio de ações de matemática prática resolve-se a equação do segundo grau promovendo o desenvolvimento de abstração estrutural com indícios de abstração operacional, cujas raízes são 50 e 100 indo ao encontro do que fora calculado anteriormente. Após essa constatação, o professor convida os acadêmicos a analisarem o que se fez até aqui. Chega-se à conclusão que a forma como se resolveu o problema, condiz exatamente ao que está sugerido no livro didático utilizado. Porém, no cenário de Investigação Matemática precisa-se destacar que:

Quando trabalhamos num problema, o nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 17).

Assim, no interior do Mundo Corporificado (região vermelha da Figura 1), por meio de ações de matemática prática, destacam-se representações retangulares do pasto calculadas pelos acadêmicos (as cinco sugeridas), sem a inclusão de suas medidas, que auxiliam no desenvolvimento de abstração estrutural. Afinal, como afirma Tall (2020), a representação visual auxilia no processo de aprendizagem do conhecimento matemático.

Seguindo com as discussões, busca-se formalizar, geometricamente, o cálculo da área de uma região retangular. Assim, com as discussões no interior da região roxa de confluência entre os mundos Corporificado e Formal (conforme Figura 1), propõem-se quadricular um retângulo dado de forma que a soma das áreas de seus quadrados pode ser determinada pelo produto entre a quantidade de quadrados na posição horizontal e o total de quadrados na posição vertical. Essa ação de matemática teórica ilustra o cálculo da área de uma região retangular, promove o desenvolvimento de abstração operacional com indícios de abstração estrutural e com vistas à abstração formal.

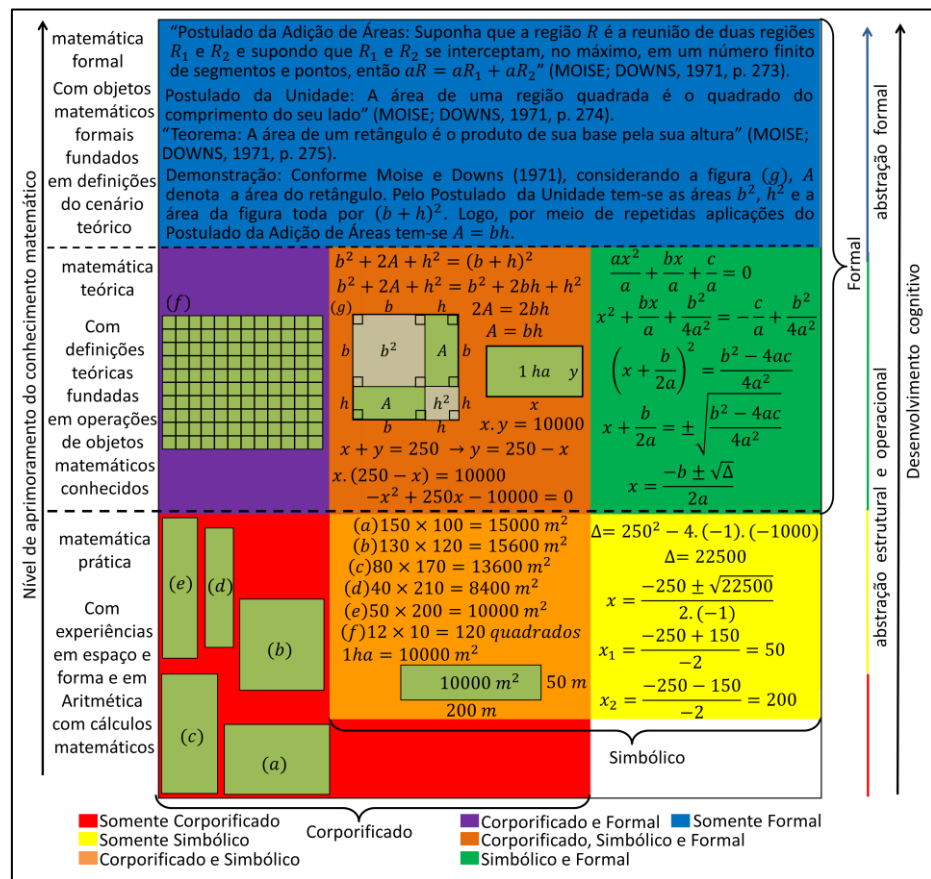
Na dinâmica de Investigação Matemática, para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), faz-se necessário atentar-se aos processos de refinamento das resoluções já formuladas, elaborar outras conjecturas, bem como realizar demonstrações em meio à realização de manipulações formais. Nessa perspectiva, por intermédio de ações de matemática teórica, desenvolve-se no âmbito da zona de confluência entre os mundos Simbólico e Formal (região verde da Figura 1), a demonstração algébrica da fórmula de resolução de equações do segundo grau. Essas manipulações simbólicas promovem os desdobramentos de abstração operacional, com indícios de abstração estrutural e com vistas à abstração formal.

Já no interior do Mundo Formal, com base em Moise e Downs (1971), realiza-se a pesquisa dos objetos matemáticos formais (postulados e o teorema) que embasam o cálculo da área de uma região retangular. Nessa investigação matemática, por meio de ações de matemática formal com vistas ao desenvolvimento de abstração formal há a imersão do Postulado de Adição de

Áreas, do Postulado da Unidade e do Teorema que embasa, formalmente, o procedimento geométrico do cálculo da área de uma região retangular.

Por sua vez, a demonstração do teorema é construída no âmbito da zona de confluência entre os três mundos matemáticos por meio de ações de matemática teórica por parte dos participantes, com o desenvolvimento de abstração operacional (manipulações algébricas), em meio aos indícios de abstração estrutural ao envolver a representação do desenho da região retangular, como uma soma de áreas quadradas e retangulares (Postulado da Unidade em consonância com o Postulado da Adição de Áreas) e, com vistas à abstração formal em meio ao processo de construção da prova matemática do referido teorema. A Figura 2 ilustra as representações oriundas das discussões em meio aos Três Mundos da Matemática.

Figura 2 – As discussões na perspectiva dos Três Mundos da Matemática



Fonte: Adaptado de Polegatti (2020).

De acordo com Tall (2020), são úteis nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática as distinções entre matemática prática, teórica e formal. Para o autor a matemática formal, por exemplo, é, conceitualmente, mais poderosa que a matemáticas prática e teórica por ela poder ser aplicada em qualquer contexto matemático em que os axiomas e teoremas são válidos, inclusive em qualquer cenário educacional futuro ainda desconhecido que satisfaça os axiomas e suas definições. As ações humanas de matemática formal,

[...] se aplicam à evolução futura de ideias na matemática formal axiomática, sempre com a possibilidade de desenvolvermos maneiras de pensar ainda

mais sofisticadas no futuro que ainda não consideramos. [...] o futuro já está aqui no sentido de que é possível prova formal por *estruturas de teoremas* que nos levam a formas mais sofisticadas de corporificação e simbolismo. Isso ainda pode ser englobado na estrutura atual com três formas de matemática (corporificação, simbolismo, formalismo) em três níveis de sofisticação (prática, teórica, formal axiomática) (TALL, 2020, p. 3-4, tradução nossa<sup>1</sup>).

Nesse sentido, conforme Tall (2020), a matemática formal e a abstração formal representam o ápice do conhecimento matemático, mas não o seu fim, pois as ações humanas em objetos formais (postulados, axiomas e teoremas) repercutem nas ações dos indivíduos nos objetos matemáticos em estudo por meio de matemática teórica e ou matemática prática. Nesse cenário, compreende-se que processos de ensino e aprendizagem da Matemática, em perspectiva no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, favorecem o desenvolvimento de práticas de Investigação Matemática em sala de aula, sejam elas, numéricas, geométricas, algébricas ou formais, bem como suas consonâncias.

Assim como ressaltam Polegatti e Savioli (2021a), a metodologia de Investigação Matemática em consonância com o quadro Teórico dos Três Mundos da Matemática, promove interação entre os objetos matemáticos em estudo, de forma que o pensamento ou o raciocínio matemático de cada viajante se desenvolva não de forma linear, mas sim dinâmica em sua complexidade e flexibilidade, de forma espontânea ou provocada e com movimentos articulados entre os mundos e suas zonas de confluência.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Perante o que foi debatido, conclui-se que a dinâmica da metodologia de Investigação Matemática na práxis, em consonância com o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, favorece o planejamento e processos de ensino e aprendizagem mediados por debates entre o professor e seus estudantes, em meio às ações de matemática prática, teórica e formal no objeto matemático em estudo com vistas ao desenvolvimento de abstrações matemáticas (estrutural, operacional e formal).

Cabe ressaltar a pesquisa de Lima, Healy e Koch (2017) que, por intermédio da investigação da aprendizagem sob a perspectiva do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, ficam evidenciadas as dificuldades dos estudantes do nono ano do Ensino Fundamental participantes, no processo de transição de resolução de equações lineares para equações quadráticas. Tais dificuldades envolvem tanto características corporificadas, em tentativas de avaliar equações ou usar gráficos, quanto simbólicas, ao buscar manipulação algébrica para resolver as equações (LIMA; HEALY; KOCH, 2017, p.766).

Lima (2019) salienta que as discussões envolvendo características do Mundo Formal, não se aplicam, axiomáticamente, no âmbito do Ensino Fundamental (no caso o debate com estudantes do nono ano que estudam a resolução de equações do segundo grau). “Entretanto, em qualquer atividade matemática encontram-se características do mundo formal, pois um aluno não constrói conceitos matemáticos sem compreender as características formais dele” (LIMA, 2019, p. 8). Além disso, a autora resalta que o trabalho em sala de aula com

atividades matemáticas que promovem a transição do pensamento ou raciocínio matemático de cada estudante entre os Três Mundos Matemáticos é essencial para a construção de conhecimento matemático.

Ainda com relação ao escopo do Mundo Formal, no caso de investigação com acadêmicos da Licenciatura em Matemática, segundo Flôres (2020), o estudo das representações formais que embasam um ou mais objetos Matemáticos são fundamentais para as construções das argumentações dos professores de Matemática em seus procedimentos de validação das resoluções matemáticas de seus estudantes, bem como para sanar dúvidas e responder questões elencadas por seus alunos.

Após todas as discussões, verificou-se que o problema utilizado por Barroso (2006) trás inconsistência no contexto abordado. A solução de que os lados do pasto retangular são  $50\text{ m}$  e  $200\text{ m}$  perante  $10000\text{ m}^2$  de área é válido no contexto matemático. Mas, há pastos cercados com apenas uma volta de arame? Ao investigar-se essa indagação chega-se a conclusão que, usualmente, se circunda um pasto por meio de uma cerca composta por cinco voltas de arame liso.

Nesse sentido, a medida de  $500\text{ m}$  de arame informada no problema deve ser convertida para  $100\text{ m}$  por volta, quando consideramos o contexto de uma cerca composta por cinco voltas de arame. Diante dessa realidade seria possível cercar o pasto retangular, cuja área mede  $1\text{ hectare}$  ( $10000\text{ m}^2$ ), com a quantidade de tela fornecida no problema? As representações matemáticas dos novos cálculos são apresentadas no cenário da Figura 3.

Figura 3 – Resolução do problema com a cerca composta por cinco voltas de arame

$1\text{ ha} = 10000\text{ m}^2$	$y$	$2x + 2y = 100$	$x \cdot y = 10000$
$x$		$x + y = 50$	$x \cdot (50 - x) = 10000$
		$y = 50 - x$	$-x^2 + 50x - 10000 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 50^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10000) = -37500$			
$\Delta < 0 \rightarrow x \notin \mathbb{R}$			

Fonte: Os autores (2022).

Logo, os  $500\text{ m}$  de arame liso são insuficientes para cercar com cinco voltas um pasto de área  $1\text{ ha}$ . Então, pode-se elencar outro questionamento: quantos metros de arame são necessários para se construir uma cerca composta por cinco arames para se cercar um pasto retangular de  $10000\text{ m}^2$  de área e com as mesmas medidas apresentadas na resolução do problema no livro didático? Após algumas argumentações, conclui-se que são necessários  $2500\text{ m}$  de arame para se ter as mesmas dimensões,  $50\text{ m}$  e  $200\text{ m}$ , dos lados do pasto retangular.

Destaca-se que na versão de 2018, o texto do problema sofreu alterações “Mariana contornou com  $500\text{ m}$  de tela um terreno retangular de  $10000\text{ m}^2$ . Quais as dimensões do terreno?” (GAY; SILVA, 2018, p. 184). Substitui-se o arame pela tela, subentendendo, a necessidade de se dar somente uma volta para cercar o terreno e, retirou-se da questão a medida agrária do hectare. Por fim, ressalta-se a importância de se olhar para o quadro todo de um problema, suas informações, suas possíveis resoluções, interpretações e o contexto envolvido.

Nesse sentido, salienta-se que atividades de Investigação Matemática em consonância com os Três Mundos da Matemática favorecem o olhar para o quadro geral, de professores e estudantes e, com atenção aos detalhes dos contextos e das representações (corporificadas, simbólicas e formais) dos objetos matemáticos sob investigação em meio aos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

# MATHEMATICAL RESEARCH IN THE MIDST OF THE THEORETICAL FRAMEWORK OF THE THREE WORLDS OF MATHEMATICS IN THE MATHEMATICS TEACHER TRAINING

## ABSTRACT

In this work, the objective is to discuss the consonance between the process of Mathematical Research in the classroom and the theoretical framework of the Three Worlds of Mathematics (Embodied, Symbolic and Formal) in the midst of the initial training of Mathematics teachers. This is a bibliographic research, in which, through textual analysis (books, theses, dissertations, articles, among others) a theoretical meeting between two or more fields of study is promoted. Therefore, hypothetically, the resolution of quadratic equations is debated, through its specific formula, having as possible interlocutors, academics of a Mathematics Degree course, within the discipline of Elementary School Practices. Then, dialogues are developed in the methodological perspective of Mathematical Research, with a view to involving the three distinct mathematical aspects of acting on mathematical objects (practical, theoretical and formal) and, intertwined with the three levels of abstraction of mathematical knowledge (structural, operational and formal). The analysis of the discussions, based on the theoretical framework adopted, allows us to conclude that the insertion of the practice of Mathematical Research in line with the theoretical framework of the Three Worlds of Mathematics allows the teacher to research, plan, act mathematically and analyze conjectures of resolutions of one or more problems, as well as promoting and validating the discussions and resolutions presented by their students in the set of areas of mathematical knowledge (Arithmetic, Geometry, Algebra, Analytical Geometry, among others), in order to highlight particularities and/or highlight the similarities and conjunctions between them.

**KEYWORDS:** Mathematical Education. Mathematical Research. Three Worlds of Mathematics.

## NOTAS

1. “it applies to future evolution of ideas in axiomatic formal mathematics, always with the possibility that we will develop even more sophisticated ways of thinking in the future that we have not yet considered. I will later show that the future is already here in the sense that it is possible to prove formal structure theorems that take us on to more sophisticated forms of embodiment and symbolism. This can still be encompassed in the current framework with three forms of mathematics (embodiment, symbolism, formalism) in three levels of sophistication (practical, theoretical, axiomatic formal)”.

## REFERÊNCIAS

BARROSO, J. M. **Projeto Araribá Matemática 8º ano do Ensino Fundamental**. São Paulo: Moderna, 2006.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V.; LEIVAS, J. C. P. Aprendizagem de sequências numéricas: pesquisa sobre dificuldades de Licenciandos em Matemática. **Zetetiké**. Campinas-SP, UNICAMP, v. 24, n. 3, p.361-377, 2016. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.20396/zet.v24i3.8648090>. Acesso em: mar. 2022.

BUENO, R. W. S.; VIALI, L. O Cálculo e os Três Mundos da Matemática: um estudo do conhecimento. **DYNAMIS**. Blumenau-SC, FURB, v. 25, n. 2, p. 39-55, 2019. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.7867/1982-4866.2019v25n2p39-55>. Acesso em: mar. 2022.

FERRUZZI, E. C.; COSTA, J. A. A. Investigação matemática e seu aporte para a aprendizagem. **RBECT**. Ponta Grossa-PR, UTFPR, v. 11, n. 3, p. 296-311, set./dez. 2018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.3895/rbect.v11n3.6058>. Acesso em: abr. 2022.

FLÔRES, M. V. **Construção dos Números Racionais na Licenciatura**: um estudo desenvolvido à luz dos Três Mundos da Matemática. 181 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana. Santa Maria - RS, 2020. Disponível em: [https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=9175015](https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=9175015) Acesso em: mar. 2022.

FLORES, J. B.; LIMA, V. M. R.; MÜLLER, T. J. Convergências e Complementariedades entre as teorias dos Três Mundos da Matemática e da Sociointeratividade. **Bolema**. Rio Claro - SP, UNESP, v. 34, n. 68, p. 1341-1358, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a24>. Acesso em: mar. 2022.

GAY, M. R. G.; SILVA, W. R. **Araribá Mais Matemática 9º ano do Ensino Fundamental**. São Paulo: Moderna, 2018.

LIMA, R. N.; HEALY, L.; KOCH, R. M. O ensino de equações quadráticas: como “costurar” o corte didático? **Acta Scientiae**. Canoas-RS, v. 19, n. 5, p. 759-781, set./out. 2017. Disponível em: <http://posgrad.ulbra.br/periodicos/index.php/acta/article/view/3031>. Acesso em: mar. 2022.

LIMA, R. N. Dispositivos móveis em sala de aula: uma jornada por Três Mundos da Matemática. **REVEMAT**. Florianópolis-SC, UESC, v. 14, n. 1, p. 1-21, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2019.e59790>. Acesso em: mar. 2022.

MARCATTO, F. S. F. O Desenvolvimento Profissional do professor de Matemática para promover o raciocínio matemático. **REMAT**. São Paulo-SP, v. 18, p. 1-17, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id464id543>. Acesso em: mar. 2022.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos da metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 2010.

MARTELOZO, D. P. S.; SAVIOLI, A. M. P. D. Já-encontrados na aprendizagem da Matemática: quais implicações. **VIDYA**. Santa Maria-RS, v. 39, n. 1, p. 55-71, 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/2622>. Acesso em: mar. 2022.

MOISE, E. E.; DOWNS, F. L. **Geometria Moderna**. São Paulo: Edgard, 1971.

POLEGATTI, G. A. **Jornadas Pelos Três Mundos da Matemática Sob Perspectiva da Etnomatemática na Licenciatura Intercultural Indígena**. 360 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina. Londrina-PR, 2020.

POLEGATTI, G. A.; SAVIOLI, A. M. P. D. Os Três Mundos da Matemática na formação de professores que ensinam Matemática: o cálculo da área limitada por regiões poligonais regulares. **REVEMAT**. Florianópolis-SC, v. 16, p. 1-21, 2021a. Disponível em: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2021.e82694>. Acesso em: abr. 2022.

POLEGATTI, G. A.; SAVIOLI, A. M. P. D. Os Três Mundos da Matemática na formação de professores que ensinam Matemática. *In*: SEMINÁRIO



INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2021b. **Anais [...] Uberlândia-MG**, 22-27 nov. 2021b, p. 861-876. Disponível em: <https://even3.blob.core.windows.net/anais/380693.pdf>. Acesso em: abr. 2022.

POLEGATTI, G. A.; SAVIOLI, A. M. P. D.; LEIVAS, J. C. P. A dinâmica de movimento do pensamento matemático em perspectiva nos Três Mundos da Matemática: o caso hipotético do Teorema de Pitágoras no Ensino Fundamental. **DYNAMIS**, [S.l.], v. 28, n. 1, p. 3-23, 2022. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.7867/1982-4866.2022v28n1p03-23>. Acesso em: abr. 2022.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático dos alunos no Ensino Básico e do Ensino Superior. **Práxis Educativa**. Ponta Grossa-PR, v. 7, n. 2, p. 355-377, jul./dez. 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.7i2.0003>. Acesso em: mar. 2022.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. São Paulo: Cortez, 2015.

SOARES, G. O.; CURY, H. N. O conteúdo de limite em cursos de licenciatura em matemática: uma pesquisa à luz da teoria dos três mundos da matemática. **ReBECCEM**. v. 1, n. 1, p. 64-83, dez. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.33238/ReBECCEM.2017.v.1.n.1.18557>. Acesso em: mar. 2022.

TALL, D. O. Embodiment, Symbolism and Formalism in Undergraduate Mathematics Education. **Proceedings** of the Plenary at 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education, Feb. 22–27, San Diego, California, USA, 2007, p. 1-18. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2007b-rume-keynote.pdf>. Acesso em: mar. 2022.

TALL, D. O. **How Humans Learn to Think Mathematically**: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. O. Making Sense of Mathematical Thinking over the Long Term: The Framework of Three Worlds of Mathematics and New Developments. Draft. To appear in Tall, D.; Witzke, I. (Eds.). **MINTUS: Beiträge zur mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Bildung**. Wiesbaden: Springer, p. 1-26, 2020. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2020a-3worlds-extension.pdf>. Acesso em: mar. 2022.

VISINTAINER, M. **Significados de Cônicas à luz dos Três Mundos da Matemática**. 2019. 228 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo-SP, 2019. Disponível em: [https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=7707034](https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7707034). Acesso em: mar. 2022.

**Recebido:** 24 jun. 2022

**Aprovado:** 21 nov. 2022.

**DOI:** 10.3895/rbect.v15n3.15653

**Como citar:** POLEGATTI; G. A.; SAVIOLI, A. M. P. D. Investigação Matemática em meio ao quadro teórico dos Três Mundos da Matemática na formação do professor de Matemática. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, Edição Especial, p. 1-18, dez. 2022. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/15653>>. Acesso em: XXX.

**Correspondência:** Geraldo Aparecido Polegatti - [geappolegatti@gmail.com.br](mailto:geappolegatti@gmail.com.br)

**Direito autoral:** Este artigo está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.

