

# Ensino remoto de Equações Diferenciais para engenharia: modelando a propagação de uma epidemia

## RESUMO

**Aldo Peres Campos Lopes**

[aldoelopes@hotmail.com](mailto:aldoelopes@hotmail.com)

0000-0002-4046-0840

Universidade Federal de Itajubá, Itajubá,  
Minas Gerais, Brasil.

**Frederico Silva Reis**

[fredsilvareis@yahoo.com.br](mailto:fredsilvareis@yahoo.com.br)

0000-0001-6087-6483

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro  
Preto, Minas Gerais, Brasil.

**OBJETIVO:** Investigar as possíveis contribuições da realização de atividades de Modelagem Matemática de forma remota, devido às restrições impostas pela pandemia de COVID-19 para a aprendizagem de Equações Diferenciais. **MÉTODOS:** A pesquisa, de cunho qualitativo, foi realizada na universidade federal do estado de Minas Gerais com 117 alunos, dos 9 cursos de Engenharia, matriculados na disciplina Equações Diferenciais I, no 1º semestre letivo de 2020. Como metodologia de pesquisa, planejamos atividades de Modelagem Matemática a partir de temas envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª e 2ª ordem que foram desenvolvidas e gravadas no *Google Meet* e, posteriormente, avaliadas pelos alunos participantes por meio de um questionário. **RESULTADOS:** Os resultados possibilitam afirmar que as atividades da disciplina, realizadas de forma remota, configuraram ricas oportunidades de motivação aos alunos participantes, permitiram uma exploração diferenciada das aplicações dos conteúdos matemáticos relacionados às Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª e 2ª ordem - principalmente a atividade de Modelagem da propagação de uma epidemia - e, também, colaboraram para uma interpretação crítica da realidade, ainda que de forma incipiente. Particularmente nos resultados, são tecidas algumas considerações sobre os desafios enfrentados pelos alunos tanto no contexto acadêmico, a partir da imposição institucional do ensino remoto, como no contexto social, a partir das condições impostas pela pandemia que revelaram as enormes diferenças socioeconômicas dos alunos. **CONSIDERAÇÕES FINAIS:** As considerações finais do trabalho apontam para a importância de refletirmos sobre as possíveis implicações do contexto (pós)pandêmico para os caminhos da pesquisa vigente em Educação Matemática, especialmente no Ensino Superior.

**PALAVRAS-CHAVE:** Ensino Remoto. Equações Diferenciais. Modelagem Matemática. Educação Matemática no Ensino Superior.

## INTRODUÇÃO

As pesquisas concernentes aos processos de ensino e aprendizagem no Ensino Superior têm se caracterizado por investigar fenômenos relacionados à formação do pensamento avançado, bem como os diversos fatores que trazem dificuldades para a construção de conceitos matemáticos mais avançados, expandindo, assim, a pesquisa sobre as teorias de aprendizagem e as abordagens de ensino relacionadas a tal construção, dentre outros temas (IGLIORI, 2009).

Assim, a forma como a aprendizagem é concebida no Ensino Superior difere daquela concebida no Ensino Básico. De acordo com Iglori (2009), essa distinção pode ser percebida no modo como as temáticas curriculares são tratadas, bem como na conduta dos estudantes. Assim, os conceitos matemáticos são encarados como “objetos de ensino” ao invés de “objetos de aprendizagem” que, por sua vez, precisam ser compartilhados entre professores e alunos. Assim, os alunos do Ensino Superior granjeiam maior encargo pelo sucesso (ou insucesso) de sua aprendizagem (ALMEIDA; IGLIORI, 2013).

Nesse contexto, diversos autores se debruçaram sobre o tema do ensino de Cálculo Diferencial e Integral (MACHADO, 2008; LOPES; REIS, 2019; REIS; COMETTI; SANTOS, 2019). Segundo Machado (2008), algumas razões para o rendimento “deficiente” na aprendizagem de Cálculo são de caráter cognitivo, ou seja, os alunos não possuem a estrutura cognitiva necessária para compreender os conceitos de Cálculo. Na didática, segundo essa perspectiva, o desafio é encontrar a metodologia adequada. Já no âmbito epistemológico, os obstáculos estão nas lacunas anteriores ao ensino de Cálculo.

No presente trabalho, fruto de um recorte de uma pesquisa de mestrado, apresentamos uma pesquisa realizada com alunos de uma disciplina remota de Engenharia sobre a utilização da Modelagem Matemática no ensino de Equações Diferenciais (ED), aqui concebidas como um tema ou conteúdo integrante do Cálculo Diferencial e Integral. Sendo que, em algumas estruturas curriculares, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) compõem a ementa de disciplinas de Cálculo (em geral, Cálculo II, III ou IV) e, em outros casos, existem disciplinas específicas de EDO ou, simplesmente, ED.

## CONTRIBUIÇÕES DE PESQUISAS SOBRE O ENSINO DE ED

A partir de um levantamento bibliográfico, Oliveira e Iglori (2013) examinaram pesquisas na área de Educação Matemática no Ensino Superior com o objetivo de apresentar problemas na aprendizagem de ED e propostas de ensino diferenciadas, desenvolvidas a partir dos apontamentos de tais pesquisas. Coadunando com o que descrevemos na introdução, as pesquisadoras constataram que o ensino das ED enfatiza as resoluções analíticas e as manipulações algébricas envolvidas e discutiram, também, sobre as dificuldades enfrentadas por alunos em relação a conteúdos estudados anteriormente, tais como Matemática Básica, conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, etc.

Outro aspecto destacado consiste nas dificuldades de aprendizagem relacionadas às aplicações de situações-problema contextualizadas. A fim de atenuar essas dificuldades, a maior parte dos trabalhos analisados pelas pesquisadoras propôs um enfoque qualitativo das ED de um modo

contextualizado, por meio de situações-problema, que podem trazer grandes contribuições à aprendizagem quando associadas à futura área de atuação dos alunos, tornando-os, assim, mais motivados. Nessa perspectiva, um cenário ideal apontado por Oliveira e Iglori (2013) seria proporcionar um enfoque balanceado entre o tratamento analítico, gráfico e numérico, com o uso de recursos computacionais que auxiliem na aprendizagem de ED.

Podemos destacar, também, algumas pesquisas com foco no ensino de ED para cursos de Engenharia a partir de situações-problema contextualizadas ou da análise de fenômenos físicos (DULLIUS, 2009; BUÉRI, 2019) ou, ainda, com a utilização da Modelagem Matemática sob diferentes perspectivas (FERREIRA, 2010; FECCHIO, 2011). Ainda que tenham sido realizadas sob diferentes aportes teóricos e com diferentes focos investigativos, tais pesquisas apontam que, no ensino de ED, prevalecem os métodos analíticos de resolução em comparação com a exploração de interpretações gráficas. Pode-se destacar, ainda, a relutância, por parte dos alunos, quanto a um tratamento mais qualitativo das ED, bem como o raro uso de recursos tecnológicos na abordagem dos conceitos e propriedades.

Por outro lado, os pesquisadores destacaram a contribuição do ensino de ED a partir da contextualização/modelação de situações-problema e/ou fenômenos naturais para o caráter formativo dos alunos, o fortalecimento da sua competência crítica e a motivação para a aprendizagem por meio da configuração de uma alternativa epistemológica que proporciona uma combinação de conhecimentos, habilidades e competências ligadas ao cotidiano dos alunos (LOPES, 2020b; LOPES; REIS, 2022).

A partir dessas contribuições advindas da pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior, passamos a delinear a pesquisa por nós realizada, também abordando o ensino de ED, começando por contextualizá-la em seu lócus e perspectivá-la metodologicamente.

## **APRESENTANDO O LÓCUS E A METODOLOGIA DA PESQUISA**

Em meados de março de 2020, devido à pandemia de COVID-19, a universidade federal do estado de Minas Gerais, na qual a presente pesquisa foi realizada, adotou oficialmente o ensino remoto que foi chamado de Regime de Trabalho Excepcional. Assim, as aulas passaram a ser ministradas através de encontros síncronos realizados no *Google Meet*, sendo que a comunicação com os alunos se deu por meio dessas aulas e de fóruns semanais disponibilizados na Plataforma *Moodle*, ambiente virtual de ensino e aprendizagem que já vigora na instituição há vários anos.

Assim, semanalmente, no 1º semestre letivo de 2020, nos horários previstos para as 2 aulas presenciais da disciplina Equações Diferenciais I em 2 dias distintos, ou seja, perfazendo um total de 4 aulas semanais de 55 minutos cada (uma vez que a disciplina possui carga horária de 60 horas), foram realizados encontros síncronos com os 117 alunos dos 9 cursos de Engenharia da referida universidade, matriculados em 2 turmas sob a responsabilidade do 1º autor deste trabalho. Apesar de o *Google Meet* ser uma ótima ferramenta, a frequência dos alunos nesses encontros ficou entre 50% e 75%, ou seja, porcentagem de frequência um pouco inferior à das aulas presenciais. Dentro do planejamento da disciplina foram desenvolvidas atividades de Modelagem Matemática que serão apresentadas a

seguir. Investigar suas contribuições para a aprendizagem de ED foi o objetivo principal da pesquisa delineada no presente trabalho.

As atividades foram elaboradas considerando-se a perspectiva de Modelagem Matemática trazida por Bassanezi (2002) e concebida na perspectiva educacional trazida por Biembengut (2016), que utiliza o termo “Modelação” para se referir à Modelagem na Educação. Segundo a pesquisadora, “A Modelação é um método de ensino com pesquisa nos limites e espaços escolares, em qualquer disciplina e fase de escolaridade: dos anos iniciais do Ensino Fundamental aos finais do Ensino Superior” (BIEMBENGUT, 2016, p. 177).

Para Biembengut (2016), no Ensino Superior podemos fazer uso da modelação física e/ou da modelação simbólica, dependendo de alguns fatores, tais como: A quantidade de alunos em uma sala, o conteúdo da disciplina e a experiência dos alunos com a Modelação. Cabe ressaltar que essa perspectiva de Modelagem é apenas uma dentre diversas outras, sendo que todas “têm em comum, entre seus objetivos, a utilização da Matemática para o estudo de problemas ou situações reais” (ARAÚJO, 2002, p. 31).

Biembengut (2016) descreve três etapas na Modelagem Matemática para que a Modelação seja realizada na sala de aula: 1) Percepção e apreensão; 2) Compreensão e explicitação; 3) Significação e expressão. Na etapa de significação e expressão, destaca-se o modelo matemático que, de acordo com Bassanezi (2002, p. 19), é a expressão do fenômeno observado por meio da representação sintética dos elementos observados usando uma linguagem simbólica.

Burghes e Borrie (1981, p. 13), por sua vez, afirmam em seu livro *Modelling with Differential Equations* que um modelo serve para explicar alguns dados observados, fazer alguma previsão e tomar uma decisão. Assim, para fazer um modelo que objetiva a tradução de um problema do mundo real em um problema matemático é preciso assumir algumas simplificações que envolvem, por exemplo, desconsiderar as variáveis menos relevantes e considerar/incluir no modelo somente as variáveis relevantes. Além disso, as variáveis importantes devem ser identificadas e as relações entre elas, a partir de então, devem ser explicitadas, pois: “As suposições e as relações constituem o ‘modelo matemático’ e, geralmente, levam a algum tipo de problema matemático que é solucionado para as variáveis relevantes em questão usando técnicas apropriadas. As soluções devem agora ser interpretadas em termos do problema real”<sup>1</sup> (BURGHES; BORRIE, 1981, p. 14).

Assim, como é costumeiro no processo de Modelagem Matemática, Burghes e Borrie (1981) enfatizam a importância de não apenas se atentar ao ensino de técnicas de solução para ED, mas também às interpretações dos resultados de um problema. Caso não sejam feitas as interpretações e a conexão com a realidade, além de deixar de ser uma atividade de Modelagem, os alunos não terão a percepção de que a Matemática tem um papel importante na resolução de problemas. Acrescentamos, ainda, que a discussão crítica/social de um modelo deve estar prevista em qualquer concepção de Modelagem Matemática. Assim, um contexto que propicie esse tipo de discussão também foi considerado em nossas atividades, especialmente por serem destinadas a futuros profissionais das mais diversas áreas de Engenharia.

## APRESENTANDO AS ATIVIDADES DA PESQUISA

Para a realização das atividades de Modelagem Matemática, nas 2 turmas, foram formados grupos de 4 a 6 componentes escolhidos pelos próprios alunos. Na turma T1, de 52 alunos, foram formados 9 grupos e na turma T2, de 65 alunos, foram formados 11 grupos. Todos os grupos realizaram as atividades de Modelagem Matemática, ou seja, nenhum grupo desistiu ao longo do semestre letivo.

As atividades de Modelagem Matemática foram divididas em 2 blocos para que cada grupo realizasse duas atividades no total, ou seja, cada bloco continha 2 atividades a serem desenvolvidas pelos alunos. Dessa forma, cada grupo fez uma atividade do 1º bloco, relacionado a EDO de 1ª ordem e outra do 2º bloco, relacionado a EDO de 2ª ordem. Como a Modelagem visa ao “estudo de problemas ou situações reais” (ARAÚJO, 2002, p. 31), sugerimos os seguintes temas para os alunos:

1º bloco:

- 1A) Absorção de álcool no organismo e risco de acidentes;
- 1B) Modelando a adequação de uma dieta;

2º bloco:

- 2A) Comportamento de compra do consumidor;
- 2B) Modelando a propagação de uma epidemia;

Esses temas foram inspirados no livro *Modelling with Differential Equations*, de Burghes e Borrie (1981). Sugerimos esses temas porque, acreditamos, poderiam ser de interesse para a maioria dos alunos e estavam adequados ao conteúdo matemático da disciplina.

Uma pesquisa bibliográfica sobre pesquisas da Educação Matemática que utilizam Modelagem com Equações Diferenciais destacou que os temas escolhidos geralmente são os mesmos e não têm uma implicação em problemas do cotidiano ou no futuro profissional dos alunos (LOPES, 2021). De fato, segundo Bassanezi (2002, p. 45), “a formulação de problemas novos ou interessantes nem sempre é uma atividade muito simples para um professor de Matemática”. Assim, os temas de Modelagem sugeridos visavam a não somente motivar os alunos, mas também a facilitar as discussões após a obtenção das soluções matemáticas.

Para a condução das atividades de Modelagem Matemática fizemos uma adaptação dos 8 passos para aplicações de EDO em fenômenos físicos descritos em Laudares *et al.* (2017, p. 98) e, assim, definimos os seguintes passos didáticos:

Passo 1: Matematização da Lei Física

Passo 2: Resolução da Equação Diferencial do modelo

Passo 3: Condições iniciais ou de contorno

Passo 4: Substituição das constantes dadas

Passo 5: Cálculos solicitados nos problemas (explícite o que se pede)

Passo 6: Modelo matemático do fenômeno (equação encontrada)

Passo 7: Gráficos do modelo

Passo 8: Descrição sintética do fenômeno

Passo 9: Análise da equação do modelo

Passo 10: Análise crítica do modelo

Devido as características de alguns problemas das atividades de Modelagem Matemática, alguns passos foram subdivididos em alguns subitens a fim de facilitar o entendimento e a resolução. Objetivando estimular uma discussão crítica do modelo, e levando-se em consideração a afirmação de Laudares *et al.* (2017, p. 98) de que “Essa estrutura pode ser considerada um padrão a ser seguido, ocorrendo alterações de acordo com o tipo de problema a resolver”, acrescentamos os passos 9 e 10 ao roteiro original que, por sua vez, tinham como foco aguçar a percepção crítica dos alunos diante do modelo concebido pelo grupo. De acordo com esses autores, esses passos são uma forma prática de aplicar as ideias de modelagem de Bassanezi (2002). Além disso, notamos que as etapas de Biembengut (2016) estão articuladas a esses Passos: O Passo 1 está ligado à etapa (1) Percepção e apreensão; os Passos 2 ao 7 estão relacionados à etapa (2) Compreensão e explicitação; os Passos finais, de 8 a 10, estão conectados à última etapa (3) Significação e expressão.

Cada atividade de Modelagem Matemática iniciava-se com uma pergunta-problema para estimular os estudantes. Em seguida, um breve texto introdutório contextualizava o problema fornecendo algumas pistas de dados. Daí, os grupos passavam à resolução dos modelos. Como última tarefa, houve uma apresentação de cada grupo para os demais alunos.

A seguir, detalharemos e discutiremos alguns resultados da atividade de Modelagem Matemática 2B. Todas as outras são descritas e analisadas em Lopes (2020a).

## **MODELANDO A PROPAGAÇÃO DE UMA EPIDEMIA**

A atividade de Modelagem Matemática 2B com o tema “Modelando a propagação de uma epidemia” foi inspirada na seção 7.4 do livro de Burghes e Borrie (1981, p. 150) e nos artigos de Weiss (2013) e Catlett (2015). O objetivo dessa atividade foi discutir a seguinte questão: “Como formular um modelo que mostre a propagação de uma epidemia e qual é a importância de tais modelos atualmente?”

Iremos descrever o processo de Modelagem tendo como base os passos apresentados. No Passo 1, os grupos realizaram uma proveitosa discussão tendo em vista o contexto da pandemia de COVID-19. Eles identificaram que as principais variáveis, em função do tempo, são as pessoas contaminadas ou suscetíveis (S), as infectadas (I) e aquelas que foram removidas (R), pois faleceram ou foram imunizadas. Esse é o conhecido modelo SIR. Um dos grupos relatou que esse

modelo é “razoável para o cálculo de propagação de pandemias” (LOPES, 2020a, p. 122). Nesse passo e nos 2 últimos, alguns grupos reconheceram que outras variáveis poderiam ter sido incluídas, como o fluxo de pessoas que entram e saem de uma cidade todos os dias. Porém, também perceberam que essas alterações poderiam gerar um sistema de EDO bem mais complexo para ser resolvido, ou seja, os alunos notaram que a proximidade com a realidade é “proporcional à complexidade do modelo” (BASSANEZI, 2002, p. 125).

No Passo 2, os grupos se depararam com o seguinte sistema de EDO:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I, \quad \frac{dR}{dt} = \mu I$$

A população total é uma constante indicada por  $N$ , de modo que  $N=S(t)+I(t)+R(t)$ . Dessa forma, a soma das 3 EDO do sistema é uma constante igual a zero. A constante  $\beta$  é a taxa de infecção da doença e  $1/\mu$  é o período médio de infecção.

A resolução de um sistema de EDO pode ser uma tarefa árdua e trabalhosa e, nesse caso do sistema SIR, a situação não foi diferente. Os alunos relataram diversas dificuldades na resolução do sistema e isso estava relacionado com a não possibilidade de simplificação para obter resoluções mais diretas. Assim, foi sugerido que os grupos obtivessem as funções envolvidas ( $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$ ) de uma forma indireta. Por exemplo, a função  $S(t)$  e a constante que representa o número inicial de suscetíveis ( $S_0 = S(0)$ ) podem ser obtidas por meio do quociente entre as equações do sistema. Exemplificamos esse ponto com a resolução de um grupo, na Figura 1, a seguir.

Para os Passos 3 ao 6, os grupos escolheram cidades brasileiras, tais como Belo Horizonte, Brasília, São Paulo, Rio de Janeiro, dentre outras, para determinar as constantes do sistema e as condições iniciais. Dessa maneira, eles puderam comparar os resultados obtidos com modelos divulgados pela mídia e órgãos do governo.

Figura 1 — Obtenção da evolução da quantidade de suscetíveis por um grupo.

$$R(t) = 1 - S_0 * e^{-R_0(R(t)-R(0))}$$

Pois:

$$\frac{dS}{dR} = \frac{-\beta S}{\gamma}$$

$$\frac{dS}{dR} = R_0 * S$$

$$\int \frac{dS}{S} = \int R_0 dR$$

$$\ln(S) = R_0 * R(t) + K_1$$

$$e^{\ln(S)} = e^{R_0 * R(t) + K_1}$$

$$S(t) = e^{R_0 * R(t)} * e^{K_1}$$

$$e^{K_1} = K$$

$$S(t) = e^{R_0 * R(t)} * K$$

$$S(0) = S_0$$

$$S_0 = e^{R_0 R(0)} * K$$

$$K = \frac{S_0}{e^{R_0 R(0)}} = S_0 * e^{-R_0 R(0)}$$

$$S(t) = e^{R_0 R(t)} * S_0 * e^{-R_0 R(0)}$$

$$S(t) = S_0 * e^{-R_0(R(t)-R(0))}$$

$$S e S(t) + I(t) + R(t) = N$$

$$N = 1 e I(t) = 0$$

$$R(t) = 1 - S(t)$$

$$R(t) = 1 - S_0 * e^{-R_0(R(t)-R(0))}$$

Fonte: Lopes (2020a).

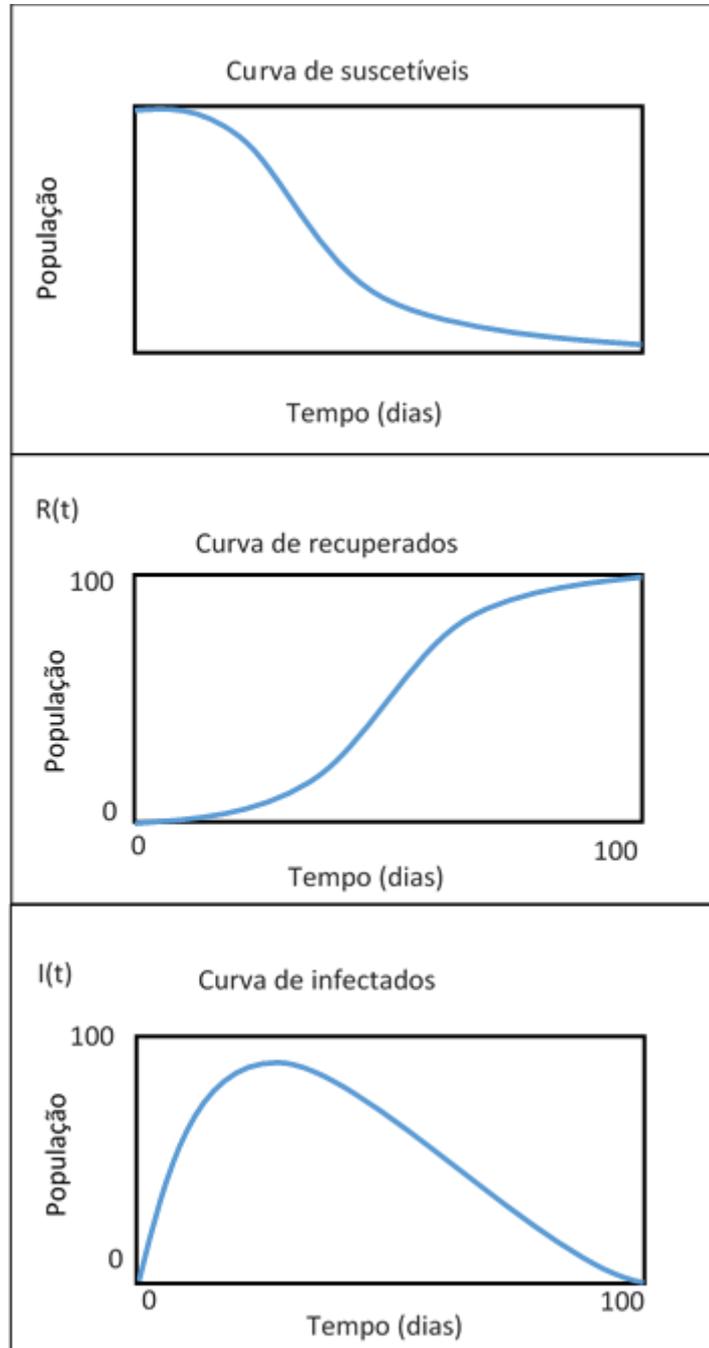
No Passo 7, muitos grupos relataram diversos contratempos na elaboração dos gráficos. Um deles foi a dificuldade matemática em resolver o sistema SIR e em obter as funções do sistema de maneiras indiretas. Além disso, até mesmo alguns grupos que apresentaram menos dificuldade na parte matemática das EDO relataram problemas na elaboração dos gráficos. Nesse caso, sugerimos o uso de recursos tecnológicos e *softwares*, tais como o GeoGebra. Apesar das explicações e intervenções em prol de facilitar o uso dos recursos tecnológicos, alguns alunos apresentaram dificuldades com “a ferramenta utilizada para plotar gráficos”. Além dos gráficos relacionados diretamente com as funções do sistema SIR, sugerimos outros.

Vale citar um ponto em particular no qual os grupos demonstraram dificuldade: Eles foram incentivados a considerar o caso vacinado, mas, até junho de 2020, essa era uma realidade distante de todos, pois nenhum laboratório havia terminado de produzir uma vacina para a COVID-19. Uma vez que foi necessário fazer algumas (poucas) modificações nas equações do sistema, os alunos consideraram difícil resolver a parte matemática da nova EDO obtida para o caso vacinado. Assim, nenhum grupo conseguiu resolver e, conseqüentemente, não esboçaram o gráfico desse caso.

A seguir, na Figura 2, apresentamos os gráficos produzidos por um outro grupo que, por sua vez, analisou a propagação da COVID-19 na cidade de Ipatinga, Minas

Gerais. Eles produziram gráficos com a evolução dos suscetíveis  $S(t)$ , removidos  $R(t)$  e infectados  $I(t)$ .

Figura 2 — Gráficos de evolução da COVID-19 em Ipatinga – MG.



Fonte: Adaptado de Lopes (2020a).

Os Passos 8 ao 10 não envolveram cálculos matemáticos, mas sim uma interpretação do que foi obtido. Embora alguns grupos tenham enfrentado algumas dificuldades na parte matemática, nesses 3 últimos passos todos os grupos discutiram o que foi obtido. O Passo 8 representou o início das discussões realizadas pelos grupos tendo em vista os resultados matemáticos obtidos, principalmente os gráficos.

Analisando o modelo utilizado, um grupo reconheceu que “apesar de simples, é profundamente efetivo em seu uso, modelando a evolução de uma população suscetível, infectada e recuperada” (LOPES, 2020a, p. 139). Outro grupo comentou que, apesar de o modelo abranger diversos aspectos importantes da propagação de uma epidemia, ainda há “diversos fatores que influenciam na trajetória de uma epidemia” (LOPES, 2020a, p. 136). Muitos grupos reconheceram a necessidade de uma quarentena para evitar um rápido aumento do número de infectados, o que poderia ocasionar diversos problemas para a população. Ademais, um grupo notou que “a inserção de vacinas” pode levar a um cenário no qual os “indivíduos vacinados passem diretamente para o grupo de recuperados” (LOPES, 2020a, p. 140).

Nas expressões dos alunos para averiguar a adequação do modelo com a realidade (Passo 9), percebemos que a maioria dos grupos verificaram que o modelo produzido se aproximava da realidade, embora simplificações tenham sido feitas. Bassanezi (2002) menciona, e isso foi constatado pelo grupo, que um modelo não é uma reprodução fiel da realidade, pois há variáveis que não são incluídas e imprevistos podem acontecer em situações reais. Nesse sentido, um grupo notou que “o que causará grande variabilidade nos resultados são os fatores humanos, como a capacidade de tratamento ou as medidas que uma pessoa toma para impedir que a doença se espalhe, por exemplo.” (LOPES, 2020a, p. 141). Além disso, um grupo observou que:

O modelo utilizado em questão possui importantes variáveis a serem analisadas. É de extrema importância saber a porção não infectada da população que ainda é suscetível à doença, saber o número de pessoas que foram infectadas com a doença e estar ciente do número de pessoas que não são mais capazes de infectar ou espalhar a doença. Embora sejam variáveis importantíssimas nesse modelo epidemiológico, não é suficiente. O vírus sofre várias mutações e uma mesma pessoa que foi infectada e adquiriu anticorpos pode ser infectada novamente, e assim, esse modelo se torna ineficiente (LOPES, 2020a, p. 141).

Notamos que esse grupo teceu comentário a respeito da adequação do modelo com a realidade e uma breve discussão crítica.

Em seguida, os grupos analisaram a relevância e a importância do modelo na sociedade atual (Passo 10). Um grupo concluiu que:

Construímos um modelo que se compara a um dos mais utilizados nos dias de hoje e que tem extensa aplicação e visibilidade pelos profissionais da saúde. O que, por sua vez, nos leva a concluir que o nosso modelo poderia ser aplicado no mundo real (LOPES, 2020a, p. 144).

Nessa mesma direção, outro grupo retomou a importância da quarentena afirmando que:

A importância de tais modelos nos dias atuais reside no fato de que podem ser usados tanto para que um governo controle a disseminação do vírus com medidas protetivas (como quarentena e afins), bem como para saber quando interromper/retomar o fluxo entre países. Além disso, alertar as pessoas do perigo do vírus pode estimular todos a tomar medidas sanitárias necessárias pra evitar que o vírus se espalhe (LOPES, 2020a, p. 145).

Percebemos por esses comentários e outros similares que os alunos notaram a relevância do modelo produzido no contexto vivido de uma pandemia.

Concluíram que uma projeção prevista por um modelo pode servir de bases para ações governamentais que, por sua vez, podem evitar elevações abruptas do número de infectados.

## **CONTRIBUIÇÕES PARA A APRENDIZAGEM DE ED**

Como descrevemos em Lopes e Reis (2021), em relação às contribuições das atividades de Modelagem Matemática para a aprendizagem de ED, foi apontado de forma unânime pelos alunos o fato de que elas proporcionaram um maior interesse em relação a ED o que, talvez, possa ser associado ao fato de que os alunos, em geral, não estão acostumados com “metodologias diferentes”, especialmente no Ensino Superior. Logo, a motivação os levou a fazerem pesquisas e a se dedicarem mais aos estudos. Outro destaque cabe para as aplicações da Matemática que também foram bastante mencionadas e mostraram algumas contribuições da Modelagem na visão dos alunos, como ficou claro nas respostas ao questionário de avaliação que aplicamos ao final das atividades de Modelagem Matemática.

Enquanto alternativa metodológica, a Modelagem Matemática teve ampla aceitação dos alunos que deixaram claro a importância do conhecimento construído por meio das atividades desenvolvidas. De modo geral, eles conseguiram perceber contribuições do uso da Modelagem na perspectiva de uma “prática docente fundamentada nos preceitos da Modelagem Matemática na Educação evidenciando o caráter mediador do professor e tornando o estudante mais autônomo em relação a sua aprendizagem” (SCHELLER; BONOTTO; BIEMBENGUT, 2015, p. 17), permitindo, assim, conciliar a teoria e a prática, unindo o mundo da Matemática acadêmica com a Matemática presente no cotidiano. Colaborando, dessa forma, para sua interpretação crítica.

Outra contribuição para a aprendizagem apontada por alguns alunos foi a possibilidade de observar a conexão que a Matemática e a Modelagem podem ter com outras disciplinas. Já para outros, o uso da Modelagem na disciplina contribuiu para uma melhor compreensão de conteúdos estudados anteriormente, especialmente de Cálculo I. Notamos, ainda, que alguns grupos não só seguiram as instruções, como decidiram, sem expectativa ou direcionamento do professor, fazer pesquisas adicionais, tais como: Buscar outras literaturas sobre o tema; fazer pesquisas de campo com parentes, conhecidos e amigos; e, guiados por essas informações extras, resolver o modelo de outra forma que não a sugerida pelo professor. Além disso, todos os grupos usaram softwares para apresentar a parte gráfica do modelo, o que certamente contribuiu não somente para uma compreensão do modelo, mas também para a aprendizagem de ED.

Ademais, julgamos importante destacar questões que influenciaram na aprendizagem envolvendo, em muitos casos, o ambiente de estudos, visto que alguns alunos não tinham um ambiente adequado para estudar em suas casas. Em outros casos, as dificuldades de aprendizagem esbarraram com as dificuldades ocasionadas pelo Regime de Trabalho Excepcional implementado por meio do ensino remoto, como por exemplo a necessidade de os alunos estudarem sozinhos, longe dos colegas e pela dificuldade de adequação ao sistema remoto enfrentada por alguns.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

No contexto pandêmico de 2020, repentinamente, os professores foram obrigados a tomar decisões sobre como incentivar seus alunos a continuar sua aprendizagem a distância (BAKKER; WAGNER, 2020). Segundo os pesquisadores, há um receio de que a adoção de tecnologias digitais sirva como instrumento para manter a pedagogia de “transmissão de conhecimento” ou um “*laissez faire*”, que poderia deixar os alunos em uma descoberta não guiada, ou seja, à deriva. Como interessante exemplo, eles citam um pedido feito por um aluno de Cálculo: “Por favor, mesmo quando você usa ferramentas tecnológicas, por favor, envie-nos uma cópia de suas notas escritas à mão. Será como quando você escreve no quadro negro”.

Em nossa pesquisa, percebemos que o encontro “face a face” é importante para os alunos e que houve um período de adaptação dos alunos (e dos professores), nas primeiras semanas. Entretanto, após o período de adaptação, os alunos se adequaram, na medida do possível, às novas circunstâncias. Durante as primeiras aulas no ensino remoto, os alunos lamentavam estar longe dos colegas e da universidade. Era comum perguntarem quando seria o “retorno às aulas” pois, para alguns, uma aula remota não era, de fato, uma “aula”. As posteriores reclamações eram relacionadas à aprendizagem, pois alguns não estavam seguros do que realmente aprenderiam no semestre letivo e sentiam-se sobrecarregados pelas demandas do conjunto de disciplinas cursadas.

Por outro lado, o ensino remoto favoreceu a interatividade: Houve fóruns de discussão, encontros constantes com os alunos por meio das plataformas disponíveis e a realização de atividades que os motivaram. Tudo isso levou a uma satisfação geral com a disciplina de ED - como demonstraram os comentários majoritariamente positivos feitos ao final do semestre letivo - e a certeza de que um ensino remoto de qualidade é possível.

Percebemos também que, assim como em uma sala de aula presencial, os alunos precisam de orientações claras e de um acompanhamento mais próximo durante as atividades de Modelagem Matemática. No ensino remoto, visto que o contato presencial não é possível, é importante que haja outros tipos de encontros constantes, preferencialmente síncronos, que devem ser feitos por meio de videoconferências para uma melhor interação com os alunos. Por outro lado, a realização de atividades assíncronas, como um fórum de dúvidas e discussões, é bastante proveitosa, bem como prever e programar horários extras para a abordagem de dúvidas. Algo que consideramos importante é a forma com que são feitas as videoconferências e a condução dos fóruns: o aluno deve se sentir respeitado, sendo parte do processo, tendo em vista suas particularidades (sejam elas relacionadas a conexões com a internet ou outras).

Em relação ao ensino de ED, a utilização da Modelagem Matemática se mostrou muito enriquecedora ao processo de aprendizagem, uma vez que os alunos demonstram um interesse maior na disciplina quando se envolvem com algum projeto. Importante ressaltar, também, que os temas trabalhados com os alunos nas atividades de Modelagem devem fazer parte do cotidiano deles ou ter alguma relação com a futura área de atuação profissional. Quanto a construção do modelo, alguns alunos apresentaram dificuldades na produção de gráficos, mas compreenderam a importância deles, uma vez que tais aspectos visuais do modelo fornecem uma boa base para as conclusões que serão feitas pelos alunos

posteriormente. Outro ponto a se considerar é a questão dos prazos: Na medida do possível, é necessário que sejam flexíveis, pois os grupos podem encontrar dificuldades ou terem imprevistos com relação aos dispositivos tecnológicos utilizados.

Ademais, durante todo o processo de Modelagem, os alunos precisam ser estimulados a uma discussão crítica que pode dar-se, inicialmente, a respeito do modelo em construção e das variáveis envolvidas. Além disso, a discussão do modelo pode e deve ser conduzida de forma a abarcar questões sociais, ambientais e econômicas. Assim, se todo o processo para a construção do modelo for acompanhado de reflexões críticas relevantes, a atividade de Modelagem poderá estimular os alunos a uma postura crítica no exercício da sua profissão e cidadania. Contribuindo, assim, para a vivência em sociedade.

Percebemos, também, que o mundo está se adaptando às novas situações impostas pela pandemia. Empresas estão passando a adotar o modelo híbrido de trabalho e algumas têm considerado o momento como uma grande oportunidade para uma “mudança histórica real” levando, inclusive, à “reinvenção de conceitos” como escritório, *home office*, dentre outros. Essas mudanças são globais e a perspectiva é que perdurem mesmo depois da pandemia, gerando uma nova forma de trabalho em várias empresas.

Assim, diante das mudanças trazidas pela pandemia, é de se esperar que as instituições educacionais repensem e projetem o futuro da Educação. Fica a pergunta: No contexto pós-pandêmico da Educação Matemática, prevalecerá o ensino remoto ou o ensino híbrido? Ou, ainda, simplesmente retornaremos ao ensino presencial de antes?

Nessa perspectiva de olhar para o futuro da Educação Matemática no Ensino Superior para além da Modelagem Matemática, acreditamos que nossa pesquisa vislumbrou a possibilidade de abordagem do ensino remoto por meio da utilização de ferramentas digitais para estudos *online* colaborativos (ENGELBRETCH; LLINARES; BORBA, 2020).

Por fim, o período de isolamento social certamente trouxe alguns aspectos negativos (ENGELBRETCH *et al.*, 2020), tal como o fato de que em nossa pesquisa vieram à tona as diferenças socioeconômicas dos alunos, implicando em dificuldades de adaptação ao sistema remoto de ensino e aprendizagem. Dessa forma, acreditamos que a adaptação dos alunos e de suas famílias ao sistema remoto constitui amplo campo de estudo e deve ser objeto de novas pesquisas em Educação Matemática no Ensino Superior.

# REMOTE TEACHING OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR ENGINEERING: MODELING THE PROPAGATION OF AN EPIDEMIC

## ABSTRACT

**OBJECTIVE:** To investigate the possible contributions of carrying out Mathematical Modeling activities remotely due to the restrictions imposed by the COVID-19 pandemic, for the learning of Differential Equations. **METHODS:** The qualitative research was carried out with 117 students from nine Engineering courses at a federal university located in the state of Minas Gerais, enrolled in the Differential Equations I discipline, in the 1st semester of 2020. As a research methodology, we planned Mathematical Modeling activities based on themes involving first and second order Ordinary Differential Equations, which were developed and recorded on *Google Meet*, and subsequently evaluated by participating students through a questionnaire. **RESULTS:** The results make it possible to affirm that the activities of the discipline, carried out remotely, provided rich opportunities for motivation on the part of the participating students, allowing a differentiated exploration of the applications of mathematical contents related to first and second order Ordinary Differential Equations, notably, the activity of modeling the propagation of an epidemic, and contributed to a critical interpretation of reality, albeit in an incipient way. Particularly, in the results, some considerations are made about the challenges that were presented to students both in the academic context, from the institutional imposition of remote teaching, and in the social context, from the conditions imposed by the pandemic, which revealed the enormous socioeconomic differences of the students. **FINAL CONSIDERATIONS:** The final considerations of the work point to the importance of reflecting on the possible implications of the (post)pandemic context for the current research paths in Mathematics Education, especially in Higher Education.

**KEYWORDS:** Remote Teaching. Differential Equations. Mathematical Modeling. Mathematics Education in Higher Education.

## NOTAS

1. Tradução nossa de: “The assumptions and relationships constitute the ‘mathematical model’, and generally lead to a mathematical problem of some sort, which is solved for the relevant variables using appropriate mathematical techniques. The solutions must now be interpreted back in terms of the real problem” (BURGHES; BORRIE, 1981, p. 14).

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. V.; IGLIORI, S. B. C. Educação Matemática no Ensino Superior e abordagens de Tall sobre o ensino/aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 15, n. 3, p. 718-734, 2013. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/17617>. Acesso em: 14 jun. 2022.

ARAÚJO, J. L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática**: as discussões dos alunos. 2002. 173 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10549/6954>. Acesso em: 14 jun. 2022.

BAKKER, A.; WAGNER, D. Pandemic: lessons for today and tomorrow? **Educational Studies in Mathematics**, v. 104, n. 1, p. 1-4, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09946-3>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-020-09946-3>. Acesso em: 14 jun. 2022.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. 1 ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

BUÉRI, J. W. S. **Análise de fenômenos físicos no ensino de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem em cursos de Engenharia**. 2019. 118 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Informática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2019. Disponível em: [https://oasisbr.ibict.br/vufind/Record/PUC\\_MINS\\_53d8b80d763bb4302a7162fc56c30cd7](https://oasisbr.ibict.br/vufind/Record/PUC_MINS_53d8b80d763bb4302a7162fc56c30cd7). Acesso em: 2 nov. 2022.

BURGHES, D. N.; BORRIE, M. S. **Modelling with Differential Equations**, 1 ed. Chichester: Ellis Horwood, 1981.

CATLETT, J. **Epidemic Modeling using Differential Equations**. 2015. Disponível em:  
<https://mse.redwoods.edu/darnold/math55/DEProj/sp15/JamesonCatlett/SIRpdfscreen.pdf>. Acesso em: 26 jun. 2021.

DULLIUS, M. M. **Enseñanza y Aprendizaje en Ecuaciones Diferenciales con Abordaje Gráfico, Numérico y Analítico**. 2009. 514 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências) – Departamento de Didáticas Específicas, Universidade de Burgos, Burgos, Espanha, 2009. Disponível em:  
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=21530>. Acesso em: 14 jun. 2022.

ENGELBRECHT, J.; BORBA, M. C.; LLINARES, S.; KAISER, G. Will 2020 be remembered as the year in which education was changed? **ZDM Mathematics Education**, v. 52, n. 5, p. 821-824, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01185-3>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-020-01185-3>. Acesso em: 14 jun. 2022.

ENGELBRECHT, J.; LLINARES, S.; BORBA, M. C. Transformation of the mathematics classroom with the internet. **ZDM Mathematics Education**, v. 52, n. 5, p. 825-841, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01176-4>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-020-01176-4>. Acesso em 14 jun. 2022.

FECCHIO, R. **A Modelagem Matemática e a Interdisciplinaridade na introdução do conceito de Equação Diferencial no ensino de Engenharia**. 2011. 209 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/10880>. Acesso em: 2 nov. 2022.

FERREIRA, V. D. T. **A Modelagem Matemática na introdução ao estudo de Equações Diferenciais em um curso de Engenharia**. 2010. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/10838>. Acesso em: 2 nov. 2022.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do Cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009, p. 11-26.

LAUDARES, J. B.; MIRANDA, D. F.; REIS, J. P. C.; FURLETTI, S. **Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace: análise gráfica de**

fenômenos com resolução de problemas e atividades com softwares livres. 1 ed. Belo Horizonte: Artesã, 2017.

LOPES, A. Formação crítica dos professores de Matemática articulada às questões contemporâneas. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 6, p. 809-817, 2020b. DOI: <https://doi.org/10.26843/rencima.v11i6.1901>. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1901>. Acesso em: 14 jun. 2022.

LOPES, A. Modelagem Matemática e Equações Diferenciais: um mapeamento das pesquisas em Educação Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 4, p. 1-25, 2021. DOI: <https://doi.org/10.26843/rencima.v12n4a16>. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/3135>. Acesso em: 14 jun. 2022.

LOPES, A. P. C. **Uma experiência de Modelagem Matemática no ensino remoto de Equações Diferenciais para cursos de Engenharia**. 2020a. 221 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2020a. Disponível em: <http://www.repositorio.ufop.br/jspui/handle/123456789/13062>. Acesso em: 14 jun. 2022.

LOPES, A. P. C.; REIS, F. S. Contributions of Mathematical Modelling for Learning Differential Equations in the Remote Teaching Context. **Acta Scientiae**, v. 24, n. 3, p. 184-215, 2022. DOI: <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7011>. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/7011>. Acesso em: 14 jun. 2022.

LOPES, A. P. C.; REIS, F. S. Ensino Remoto de Equações Diferenciais para Engenharia: reflexões para a Educação Matemática em tempos de (pós)pandemia. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2021, Evento online. **Anais [...]** Uberlândia: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2021, p. 802-815. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemviii.pdf>. Acesso em: 2 nov. 2022.

LOPES, A. P. C.; REIS, F. S. Vamos viajar? - uma abordagem da Aprendizagem baseada em Problemas no Cálculo Diferencial e Integral com alunos de Engenharia. **Revista de Educação Matemática**, v. 16, p. 449-469, 2019. DOI: <https://doi.org/10.25090/remat25269062v16n232019p449a469>. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/30424/1/Peres2019Vamos.pdf>. Acesso em: 2 nov. 2022.

MACHADO, R. M. **A visualização na resolução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral no ambiente computacional MPP**. 2008. 288 f. Tese

(Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008. Disponível em:  
<http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/251984>. Acesso em: 14 jun. 2022.

OLIVEIRA, E. A.; IGLIORI, S. B. C. Ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana**, v. 4, n. 2, p. 1-24, 2013. Disponível em:  
<https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia/article/view/2231/1803>. Acesso em: 14 jun. 2022.

REIS, F. S.; COMETTI, M. A.; SANTOS, E. C. Contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 2, p. 15-29, 2019. DOI:  
<https://doi.org/10.26843/rencima.v10i2.2328>. Disponível em:  
<https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2328>. Acesso em: 14 jun. 2022.

SHELLER, M.; BONOTTO, D. L.; BIEMBENGUT, M. S. Formação Continuada e Modelagem Matemática: percepções de professores. **Educação Matemática em Revista**, v. 20, n. 46, p. 16-24, 2015. Disponível em:  
<http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/emr/article/view/499>. Acesso em: 14 jun. 2022.

WEISS, H. The SIR model and the Foundations of Public Health. **Materials Mathematics**, v. 3, p. 1-17, 2013. Disponível em:  
<http://mat.uab.es/~matmat/PDFv2013/v2013n03.pdf>. Acesso em: 14 jun. 2022.

**Recebido:** 14 jun. 2022.

**Aprovado:** 05 ago. 2022.

**DOI:** 10.3895/rbect.v15n3.15607

**Como citar:** LOPES, A. P. C.; REIS, F. S. Ensino remoto de Equações Diferenciais para engenharia: modelando a propagação de uma epidemia. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, Edição Especial, p. 1-18, dez. 2022. Disponível em:  
<<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/15607>>. Acesso em: XXX.

**Correspondência:** Aldo Peres Campos Lopes - [aldoelopes@hotmail.com](mailto:aldoelopes@hotmail.com).

**Direito autoral:** Este artigo está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.

