Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia
ISSN: 1982-873X

https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect

Investigando propriedades topológicas com alunos do ensino fundamental

Anne Desconsi Hassemann Bettin
nanydh@yahoo.com.br
0000-0003-1834-164X
Universidade Franciscana, Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil.

José Carlos Pinto Leivas
leivasjc@yahoo.com.br
0000-0001-6876-1461
Universidade Franciscana, Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil.

RESUMO

Este artigo é resultado de uma pesquisa originada em um Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria, o qual tem se dedicado a explorar metodologias alternativas que possam contribuir com essa área, inclusive por meio da elaboração de recursos didáticos adequados, cuja aplicação dever acontecer *in locus*, a fim de validar e sugerir propostas. O que se apresenta neste trabalho teve por objetivo analisar como estudantes do Ensino Fundamental compreendem fatos de uma geometria não euclidiana - a geometria topológica - explorando recursos materiais didáticos concretos. Foram aplicadas seis atividades envolvendo recursos materiais como mapas para colorir com quantidade mínima de cores, massa de modelar, para concluir sobre a conservação de massa, cordões, para transformações contínuas de linhas fechadas, Banda de Möebius, para analisar a propriedade de continuidade, balões, para ilustrar deformações contínuas, dentre outros. Com isso, foi possível averiguar a compreensão dos alunos, a respeito do tema, nesse nível de escolaridade. Concluiu-se da investigação que é possível introduzir noções topológicas básicas que tendem a contribuir para a formação geométrica desses indivíduos, inclusive na passagem para a geometria do Ensino Médio, por exemplo, ao estudar a relação de Euler para poliedros.

PALAVRAS-CHAVE: Topologia. Ensino Fundamental. Banda de Möebius.

INTRODUÇÃO

A geometria é uma importante área do conhecimento que despertou e desperta o interesse de muitas pessoas, não tendo uma data precisa de seu surgimento. Tem-se registros de ser usada para resolver problemas práticos da agricultura, como no caso das enchentes do Rio Nilo, na demarcação das terras depois que ele voltava ao normal.

A mais conhecida geometria abordada nas escolas é a de Euclides, a qual surgiu por volta do século III a.C. Ela se utiliza de axiomas e do pensamento dedutivo de forma rigorosa, mas foi por volta do século XX que surgiram novas geometrias, as quais não seguiam a axiomática euclidiana. Essas novas geometrias ficaram conhecidas como geometrias não euclidianas, dentre as quais encontram-se: a topológica, a hiperbólica, a esférica, a projetiva e a fractal, por exemplo.

Neste trabalho, pretendeu-se explorar, com uma turma do Ensino Fundamental, noções elementares sobre geometria topológica, de maneira informal. O escopo da RBECT prevê a divulgação de pesquisas que tenham por objeto o processo de ensino aprendizagem. Assim, realizou-se a pesquisa constante do presente artigo, na qual se explora com uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental estratégias pedagógicas de ensino de uma das geometrias não euclidianas. Motivados pelo trabalho realizado em um grupo de estudos e pesquisa em Geometria, liderado pelo segundo autor e do qual participa a primeira autora desde sua criação, buscou-se aplicar os conhecimentos e metodologias alternativas para uma turma de 9º ano deste nível de escolaridade.

Através da investigação e do entendimento de algumas propriedades desse tipo de geometria, buscou-se compreender, intuitivamente, o que é topologia, sem, contudo, aprofundar conhecimentos científicos sobre ela. Assim, justifica-se a presente pesquisa, que teve por objetivo analisar como estudantes do Ensino Fundamental compreendem fatos de uma geometria não euclidiana - a topológica, explorando recursos materiais didáticos concretos.

A topologia é uma área da Matemática conhecida, informalmente, como geometria da borracha. Nela, estudam-se as figuras situadas no espaço que tenham propriedades topológicas, ou seja, as que não variam quando são deformadas continuamente sem haver rompimento. Por exemplo, quando se está a usar uma borracha de apagar escritas em papel, é frequente deformá-la (mais comum são aquelas em forma de paralelepípedo retângulo) e ir observando a variação de sua forma até quando ela tende a se romper (suas faces deixam de ser planas). No momento em que a borracha se parte, pontos que estavam próximos podem ficar afastados, de modo que a propriedade de vizinhança se perde, perdendo a característica topológica. Para Pinto (2004, p. 02) "uma transformação topológica é uma transformação de uma figura em uma outra de tal maneira que dois quaisquer pontos que se encontrem juntos na figura original permaneçam juntos na figura transformada".

Um tipo de transformação dessa natureza que não altera as características topológicas é esticar ou alongar, por exemplo, um balão do tipo usado em aniversários. Marca-se com uma caneta dois pontos sobre ele e, ao enchê-lo, é possível perceber, não importando os aspectos quantitativos como comprimento, distância, área ou volume, que os qualitativos como os conceitos de interior/exterior, dentro/fora, a ordem dos pontos e a quantidade de material, permanecem inalterados. Assim, na topologia, algumas transformações são permitidas, como esticar/alongar, encolher, entortar e torcer. É uma área muito ampla e pode-se dividi-la de forma básica como topologia geral, topologia algébrica e topologia geométrica.

A geometria topológica estuda as superfícies de dimensão menor ou igual a 4, bem como, suas aplicações a fibrados (linhas que variam de ponto a ponto no espaço), incluindo a teoria dos nós. Os espaços de dimensão 1 e 2 têm nomes especiais: uma variedade de dimensão 1 chama-se curva; uma variedade de dimensão 2 chama-se superfície.

Um aspecto curioso da topologia é que não existe diferença em termos de dimensão entre uma xícara e um toro (como uma câmara de ar de pneus), pois ambos têm o mesmo número de furos (na xícara corresponde à alça). Esses dois objetos podem se transformar um no outro continuamente, sem rompimentos. Portanto, são considerados topologicamente equivalentes.

Conforme Druk (2011), os espaços topológicos são distintos. Por exemplo, se pegar uma bola (superfície esférica) ou uma câmara de ar (toro) e desenhar uma circunferência em cada uma delas, perceber-se-á que na bola, toda circunferência sobre ela limita um disco contido nessa superfície, ou seja, uma parte superior na bola e uma parte inferior, digamos assim. Se ela fosse maciça e recortada por tal circunferência, surgiria um disco. Para a câmara de ar, tem-se que nem toda circunferência será o contorno de um disco contido nessa superfície, pois esta, ao ser recortada, não irá manter tal forma.

Möebius, Listing e Gauss foram os precursores da topologia que surgiu com o desenvolvimento da geometria no século XIX. Druk (2011) atribui o início dessa parte da geometria ao trabalho de Leonard Euler sobre as pontes de Konigsberg, por volta de 1973. No trajeto percorrido ao longo do rio, desde o ponto de saída até o retorno, passando por todas as pontes existentes ao longo do percurso, a distância não era relevante para a solução, mas a condição de passar uma única vez por cada ponte sim. Tal problema desencadeou a fórmula de Euler, a qual demonstra que, independentemente do tamanho de um poliedro, é possível ter o número de vértices menos o número de arestas mais o de faces igual a dois. Por si só, isso evidencia uma nova geometria, diferente da euclidiana.

Conforme Silva e Leivas (2013), existem três problemas clássicos da topologia: (1) pontes de Konigsberg; (2) o teorema das quatro cores; (3) a Faixa de Möebius (ou Banda ou tira, expressões usuais). Estes estão conectados, pois, segundo Laranjeiras,

> o Matemático e Astrônomo alemão August Ferdinand Möebius (1790-1868), [...] estudou esse objeto em 1858 motivado por um concurso promovido pela Academia de Ciências de Paris que, na época, estava estimulando o estudo da teoria geométrica dos poliedros, sólidos geométricos cujas superfícies são compostas por um número finito de faces. O objeto acabou ficando popularmente conhecido como “Fita de Möebius” (LARANJEIRAS, 2010, p.01).

Para construir a Faixa, pode-se pegar uma fita de papel de 5cm por 30cm, por exemplo, e dar meia volta em uma das extremidades, de modo a emendá-la à outra (extremidades com 5cm). Observa-se, a partir disso, um fato curioso e intrigante: a Faixa tem apenas um lado e uma borda! Ou seja, não se consegue distinguir qual é o lado interno e o externo desta, o que significa ser uma superfície de um único lado, isto é, uma superfície não orientável. Estudos e buscas de soluções matemáticas para compreender a forma e as propriedades da fita foram muito investigados no século XXI.

O matemático Johann Benedict Listing (1808-1882), que era arquiteto, também estudou essa forma que hoje pode ser encontrada em obras de arte, joias, música, arquitetura, psicanálise, biologia celular, cristais líquidos, robótica, engenharia de materiais, etc. Um exemplo bem prático onde pode ser encontrada a Faixa de Möebius é no símbolo da reciclagem, o qual é gerado a partir da noção de triangulação da faixa.

A Fita de Möebius ganhou destaque no mundo da Psicanálise com o francês Jacques-Marie Émile Lacan (1901-1981), o qual utilizou a Faixa como modelo de representação da psique humana. Em Leivas, Bettin, Franke (2019), encontra-se uma investigação com essa abordagem.

O Centro Internacional de Mídia Phoenix, localizado no Parque Chaoyang, em Pequim[1], é um belo exemplo de arquitetura que utiliza o conceito de "Faixa de Möebius" na sua construção sustentável, e partiu da ideia de integrar as pessoas de ambos os lados do edifício (Figura 1).

Figura 1 – Exemplo de figura

Fonte: Dados primários (2020).

Outras aplicações podem ser vistas em um artigo no qual autores deste estudo apresentam uma investigação envolvendo possibilidades de uso e de aplicação da Banda de Möebius em diferentes áreas Leivas, Bettin, Franke (2019).

METODOLOGIA

A fim de se delinear o presente trabalho, buscou-se amparo em Bauer, Gaskell e Allum (2015), os quais distinguem quatro dimensões para uma investigação social, como a presente, que buscou analisar como estudantes do Ensino Fundamental compreendem fatos de uma geometria não euclidiana - a topológica -, explorando recursos materiais didáticos concretos. Assim, os autores descrevem, na dimensão, o delineamento da pesquisa como: "levantamento por amostragem, a observação participante, os estudos de caso e os experimentos e quase experimentos" (p. 19). Pode-se entender a presente pesquisa como uma combinação desses elementos, uma vez que os pesquisadores participaram ativamente do estudo, orientando os indivíduos na realização das tarefas. Além disso, a investigação levou em consideração um grupo específico de estudantes que experienciaram atividades concretas envolvendo elementos topológicos.

No que diz respeito à segunda dimensão indicada pelos autores (BAUER; GASKELL; ALLUM, 2015), ocorre o processo de coletas de dados, o que no presente caso corresponde à busca de documentos originados pelos participantes e pelos investigadores para posterior análise. Os autores (Idem, 2015) colocam como terceira dimensão: “há os tratamentos analíticos dos dados, tais como a análise de conteúdo, a análise retórica, a análise de discurso e a análise estatística” (p. 19), sendo que a pesquisa em apreço se aterá ao tratamento analítico dos dados coletados. Os autores finalizam indicando os interesses do conhecimento.

As atividades a serem descritas, cujos dados foram coletados e, posteriormente, analisados, foram realizadas no primeiro semestre de 2019, com uma turma de 13 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual de uma cidade na região central do Rio Grande do Sul– RS. A professora titular da turma e autora do artigo motivou-se a aplicar os conhecimentos adquiridos no grupo de pesquisa a fim de incorporá-los na turma cuja característica envolve a curiosidade e a motivação para aquisição de novos conhecimentos uma vez que se preparam para ingressar em uma escola que tem um nível de exigência mais elevado do que outras em seu processo seletivo.

No plano de ensino da escola não consta tal conteúdo por não ser obrigatório segundo referencial curricular do estado. Entretanto, foi percebida a possibilidade de explorar construções com materiais concretos envolvendo propriedades topológica comparativamente com euclidianas.

Atividade 1

Enunciado - Teorema das quatro cores: para esta atividade você precisará de um mapa do Brasil para colorir. Pinte esse mapa com a menor quantidade possível de cores, sendo que duas regiões vizinhas não devem permanecer com a mesma cor.

O objetivo desta atividade é notar que a quantidade mínima de cores que satisfaz a condição dada é quatro. Essa atividade permite analisar a primeira relação topológica elementar, segundo Piaget e Inhelder (1993), que é a de vizinhança, pois “[...] corresponde à condição mais simples de toda a estrutura perceptiva, isto é, a ‘proximidade’ dos elementos percebidos no mesmo campo” (p. 21). Para os autores, esse problema deu origem à teoria dos grafos, que levou à dos nós, sendo importante para o estabelecimento do teorema de Euler.

OBS.: A atividade foi extraída do artigo “a construção do espaço segundo Jean Piaget”, de Lívia de Oliveira, da UNESP.

Atividade 2

Enunciado - Transformação topológica: para esta atividade você precisará de massa de modelar e barbante com 30cm de comprimento.

a) Iniciar a atividade com o barbante. Amarrar as pontas e formar um quadrado em uma superfície plana e lisa. Depois, transformar em uma circunferência. Posteriormente, em um losango e, a seguir, em um retângulo. Finalmente, transformá-lo em uma curva qualquer fechada. Anote suas observações a respeito do experimento.

b) Com a massa de modelar fazer uma esfera e a transformar, posteriormente, em um disco, sem partir, rasgar, acrescentar ou tirar massa.

A partir desta atividade, pretende-se que os alunos entendam as noções de transformação topológica e a propriedade de conservação de massa, pois, antes e depois da transformação contínua, ela se mantém, ou seja, os dois objetos possuem a mesma massa, independente do tamanho e da forma. Assim, por transformações contínuas, passa-se de uma forma à outra.

Atividade 3

Enunciado - Propriedades topológicas: para esta atividade você precisará de duas regiões quadradas de cores diferentes, obtidas em papel cartão. Pegue as regiões e coloque em cada canto uma letra diferente. Amasse uma delas e rasgue a outra em pedaços. Depois, desamasse ou alise a primeira e tente reunir os pedaços da segunda. Observe as duas regiões e responda as seguintes perguntas:

a) As duas regiões alteraram ou mantiveram a forma?

b) Os pontos antes e depois da transformação mantiveram a mesma proximidade?

Para Piaget e Inhelder (1993), com essa atividade, explora-se, principalmente, a segunda relação espacial elementar, isto é, a de separação. Para os autores, “Dois elementos vizinhos podem, com efeito, se interpenetrar e se confundir em partes: introduzir entre eles uma relação de separação consiste em dissociá-los ou, pelo menos, em fornecer um meio de distingui-los” (p. 21). Além disso, podem ser exploradas as propriedades topológicas de transformação, proximidade, forma, longe/perto, separado/unido e contínuo/descontínuo.

Atividade 4

Enunciado - Construção da Faixa de Möebius: para esta atividade você precisa de três tiras de papel de 30cm de comprimento por 5cm de largura, caneta colorida, tesoura e cola. Pegue uma das tiras e cole uma extremidade na outra no formato de anel. Nas outras duas tiras de papel, dar meia volta em uma das extremidades e emendar na outra, colando-as. Observe e responda as seguintes perguntas:

a) Quantos lados tem cada fita?

b) Se cortar ao meio a fita que possui a torção no sentido longitudinal, o que acontece?

c) Se cortar apenas um terço da outra fita que possui a torção, o que acontece?

A partir desta atividade, pretende-se que o aluno entenda a existência de formas geométricas que possuem apenas um lado e uma borda, as quais são denominadas superfícies não orientáveis. O discente deve analisar, também, as seguintes propriedades: “não orientável”, “só um lado”, “uma borda”, “interno e externo”, “aumento no comprimento sem aumentar a quantidade de material”, “curva fechada”, “aberto/fechado”, “noção de infinito e finito”, “diferença entre círculo e circunferência”.

Atividade 5

Enunciado - A experiência do balão: para esta atividade você precisará de um balão de aniversário vazio. Marque com a caneta dois pontos A e B sobre ele, e depois, encha-o. Observe o que aconteceu antes e depois de encher o balão e responda as seguintes perguntas:

a) Qual a transformação topológica sofrida pelo balão?

b) Complete o Quadro 1 com as palavras conserva ou modifica.

Quadro 1 – Propriedades geométricas obtidas (A escrita em vermelho representa a resposta esperada)

Propriedades geométricas	Geometria Topológica	Geometria Euclidiana
Ordem dos pontos	conserva	conserva
Interior/exterior	conserva	conserva
Retas	modifica	conserva
Ângulos	modifica	conserva
Distância	modifica	conserva
Quantidade de Material	conserva	conserva
Posições	modifica	modifica

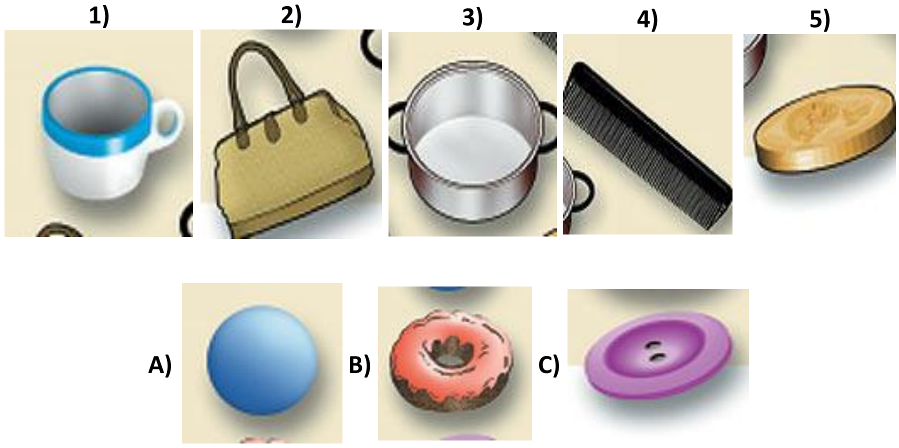
Fonte: Autores (2020).

Atividade 6

Enunciado - Na topologia, pode-se deformar um objeto (esticar ou comprimir), mas não fazer cortes ou remendos. Nessa situação, as propriedades geométricas se manterão constantes. Então, uma rosquinha pode ser transformada em uma xícara de café. O buraco da rosquinha se transforma no buraco da asa da xícara de café, por exemplo.

Seguindo essa ideia, relacione as figuras numeradas com as três marcadas com letras (Figura 2), capturadas da Revista Galileu[2].

Figura 2 – Configurações topológicas



Fonte: Dados capturadores pelos autores (2020).

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Na resolução da primeira atividade, que era pintar o mapa, os alunos discutiram sobre a quantidade de cores necessárias para pintá-lo. Nessa etapa, a maioria respondeu que o mínimo necessário eram cinco cores.

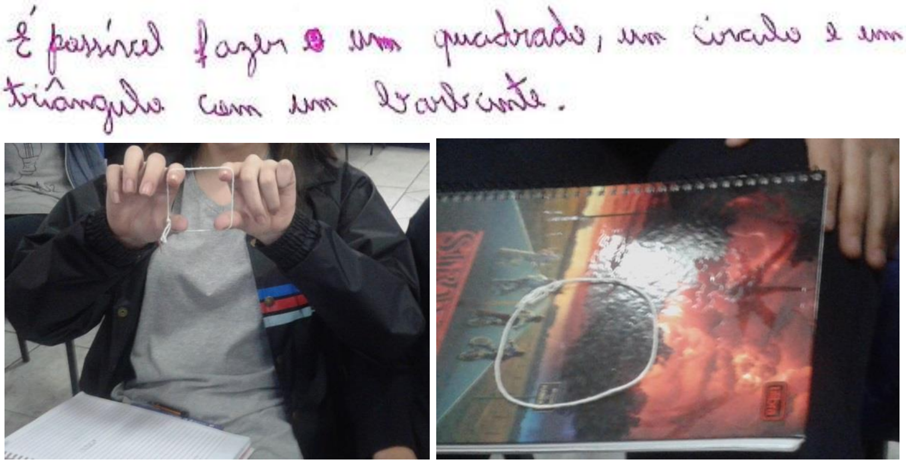
Figura 3 – Participantes realizando a atividade de pintar mapa

Fonte: Autores (2020).

Alguns alunos foram pintando de forma aleatória, enquanto outros pensavam e elaboravam estratégias antes de pintar, verificando possibilidades de cores ao visualizarem os estados vizinhos no mapa. Percebeu-se, no primeiro mapa pintado da sequência apresentada na Figura 3 (à esquerda), que o aluno tentou usar uma quantidade mínima de três cores, mas, ao chegar a vez de pintar o estado da Bahia, teve de usar outra cor.

Na atividade 2, ilustra-se o feito pelo aluno A, o qual amarrou o barbante e fez as formas pedidas, conforme registros na Figura 4.

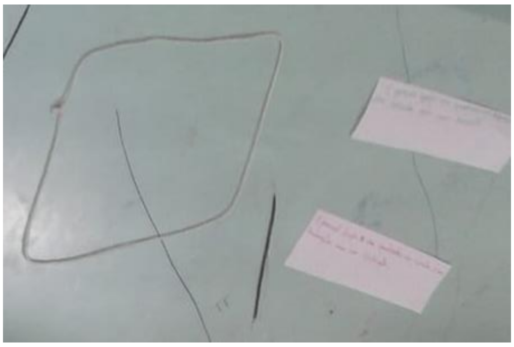
Figura 4 – Registro do Aluno A



Fonte: Autores (2020).

Nos registros constantes da Figura 5, o aluno B explicou verbalmente e a pesquisadora fez o respectivo registro: “Não, pq não tem vértice no quadrado”.

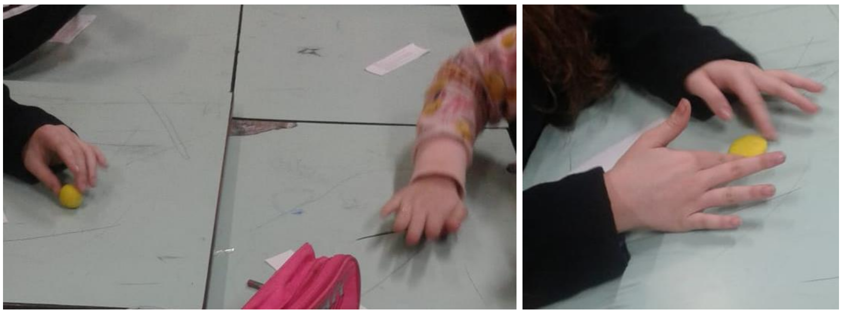
Figura 5 – Registros do aluno B



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Ao usarem a massa de modelar, ainda na atividade 2, os alunos obtiveram a esfera e a transformaram, depois, em um disco, sem partir, separar, acrescentar ou tirar massa. Julgaram a atividade fácil. A Figura 6 ilustra os alunos C e D realizando a tarefa.

Figura 6 – Alunos elaborando a esfera com massa de modelar



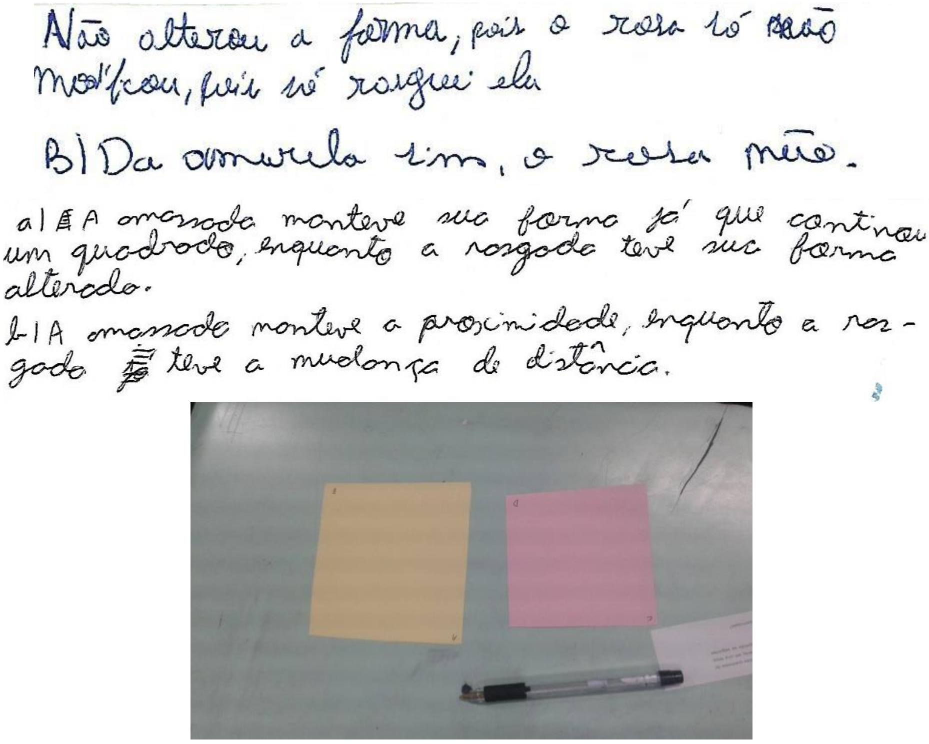
Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Assim, por meio de transformações contínuas, os alunos conseguiram concretizar a atividade, ilustrando concretamente a respectiva propriedade topológica esperada, isto é, mudança de forma sem perda de massa. Grande parte dos participantes disse ser possível fazer as transformações e verificaram que a quantidade de massa antes e depois da transformação continuava a mesma, independentemente do tamanho e da forma do objeto.

Ao utilizarem o barbante, alguns alunos afirmaram ser possível passar de uma forma à outra. Outros, porém, disseram que isso não poderia ocorrer, pois não se formavam os vértices do quadrado e nem os do triângulo. A professora concordou com estes últimos, informando que eram representações e não o próprio objeto geométrico, que é conceito abstrato.

Na atividade 3, os alunos entenderam a alternativa, a qual consistia em alterar ou manter a forma, bem como justificar o fato de ficar ou não um quadrado após a transformação. Sendo assim, a maioria disse que alterou a forma, pois a que fora rasgada não era mais uma região quadrada, como se ilustra na Figura 7.

Figura 7 – Registro da atividade 3a) dos alunos E e F



Fonte: Autores (2020).

Já na letra b) da atividade 3, foi unânime a afirmação de que os pontos mantinham a proximidade no ‘quadrado’ que fora amassado, enquanto que no que foi rasgado não houve a manutenção de proximidade, como se espera em uma transformação topológica. Observa-se que, ao trabalhar com o material, os alunos não distinguiram quadrado de região quadrada, até mesmo porque o quadrado, que é uma figura geométrica plana, está na mente do indivíduo. A Figura 8 ilustra alunos tentando reestruturar as duas formas.

Figura 8 – Região retangular inteira e rasgada

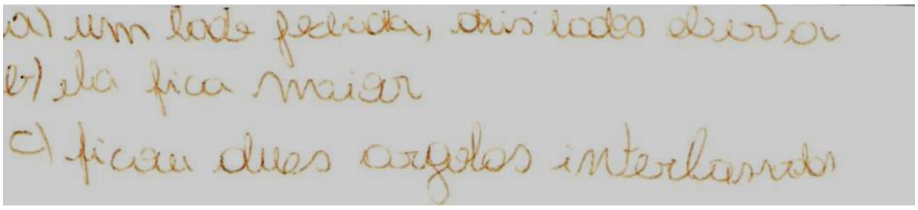
Fonte: Autores (2020).

Após essa atividade, explorou-se as propriedades topológicas de transformação: proximidade, forma, longe/perto, separado/unido e contínuo/descontínuo.

Para a realização da atividade 4, foram utilizados dois períodos de aula de Matemática, durante os quais os alunos construíram três faixas. Eles foram questionados sobre quantos lados tinha a primeira delas. Para a maioria dos estudantes, essa pergunta teve como resposta verbal dois lados, pois eles se reportavam a ela antes da colagem, de acordo com as explicações dadas à professora após seus questionamentos.

Após colarem para obter a Fita de Möebius, foi recomendado que a pintassem, o que os levou a concluírem, com algum espanto, que não, ela não tinha os dois lados, como inicialmente havia antes da colagem. O resultado os deixou bastante intrigados e questionadores. Como a professora havia comentado a respeito da Faixa ser empregada para determinadas escritas, especialmente no sentido de declarações amorosas, uma aluna se deu conta de que havia uma escrita contínua, lendo sem parar ao percorrer a faixa, o que a deixou intrigada por não constatar os dois lados iniciais que havia antes da colagem. Foi explicado pela professora que isso acontecia justamente porque a Fita, nessa situação, tinha somente um lado. Na Figura 9 estão os registros da aluna aos três itens dessa atividade.

Figura 9 – Registros da aluna G aos itens da atividade 3



Fonte: Autores da pesquisa (2020).

Essa mesma aluna quis dizer que, quando a Fita está fechada, possui um lado e, quando está aberta, possui dois (Figura 10).

Figura 10 – Alunos construindo a Faixa de Möebius

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

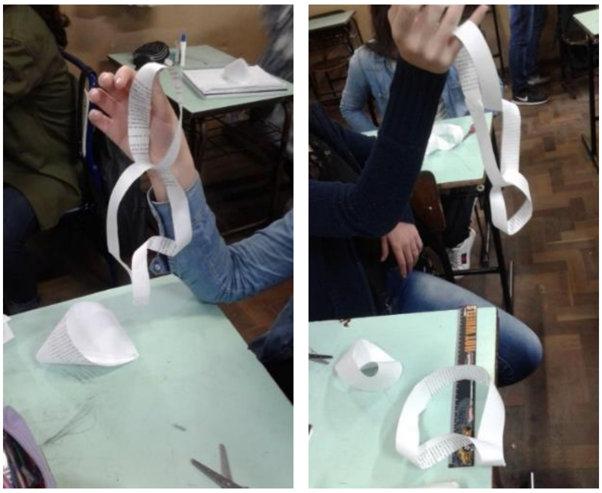
Na letra b), questionava-se como cortar a Fita ao meio no sentido longitudinal e pedia-se que verificassem o que ocorreria. Eles constataram que, tendo feito a torção na fita inicial, ao cortá-la, ela não se partiu, o que, novamente, gerou grande espanto, como ilustrado na Figura 11.

Figura 11 – Fita partida no sentido longitudinal

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Para esses alunos, a novidade maior veio quando fizeram o que se pedia na letra c): ao cortar apenas no sentido longitudinal, por um terço da largura inicial da que possui a torção, o que aparece? A Figura 12 registra o que foi realizado.

Figura 12 – Cortando a fita pelo terço de sua largura no sentido longitudinal

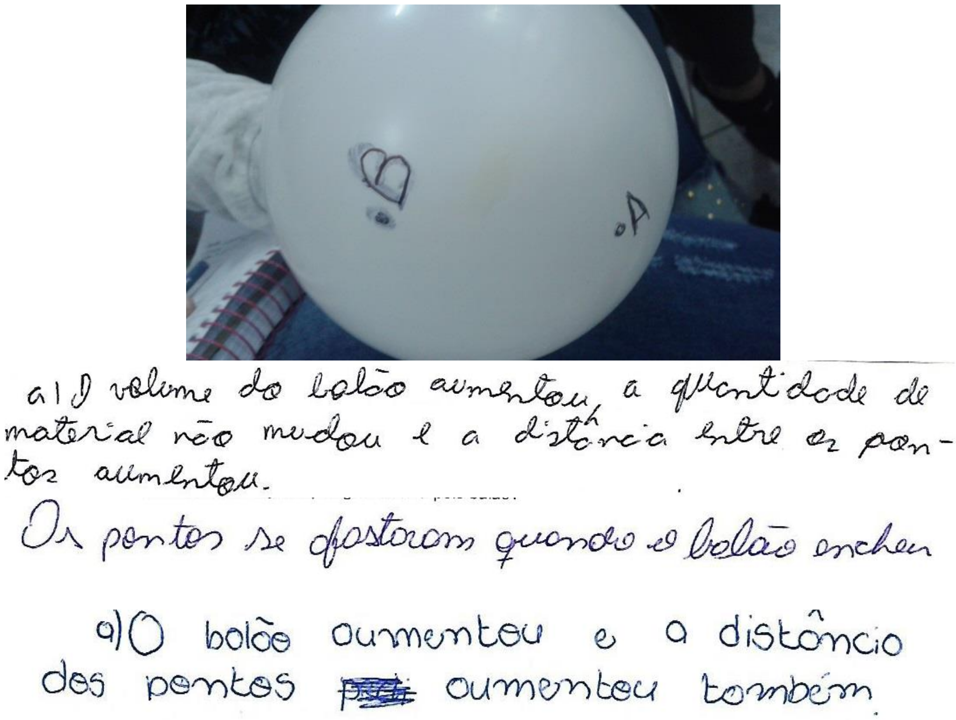


Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Essa atividade proporcionou aos alunos um momento de curiosidade, surpresa e descoberta, pois antes de cortar a Fita todos acreditavam que a partiriam ao meio, tornando-a novamente uma outra Faixa de Möebius. Ao se espantarem e não acreditarem no que estava acontecendo, questionavam a professora como ocorria a obtenção de formas diferentes. Diziam que, se a Fita com a torção fosse cortada ao meio, tendo como referência sua largura no sentido longitudinal, ela ficaria maior e não separada. Já se o corte fosse feito pelo terço da largura, na outra fita com torção, ficavam duas fitas, sendo uma de maior comprimento e a outra de menor.

Na atividade 5, os alunos trabalharam com um balão de aniversário e perceberam que, quando o enchiam, a distância entre os pontos que haviam demarcado inicialmente, antes de iniciar o processo, aumentava (Figura 13).

Figura 13 – Pontos demarcados no balão e explicações de estudantes



Fonte: Autores (2020).

Na letra c), era solicitado aos alunos que completassem o quadro comparativo, tarefa que gerou certa dificuldade. A questão exigia dos participantes maior atenção ao compararem uma situação em duas áreas diferentes: a topológica e a euclidiana. Para orientar essa atividade, foi imaginada cada situação descrita no balão e na folha de papel. Por exemplo, desenhar um ângulo no balão e enchê-lo; depois, desenhar um ângulo no papel, dobrar a folha e questionar: o ângulo permaneceria o mesmo nas duas situações?

Alguns se perderam nessa atividade, pois ela exigia um pouco mais de imaginação e raciocínio e, como era o último período de aula, houve grupo que teve de sair mais cedo, entregando-a em branco.

A atividade 6 foi respondida apenas por 9 participantes, sendo que cinco deles a fizeram corretamente, quatro erraram pelo menos em uma associação. Dentre esses quatro, um acertou quatro associações; um acertou três; um acertou duas e um acertou uma.

CONSIDERAÇÕES

Nesta pesquisa, de cunho qualitativo, teve-se por objetivo explorar propriedades topológicas elementares, por meio de atividades envolvendo recursos materiais concretos. Nessa busca, investigou-se uma forma de inserir em um 9º ano do Ensino Fundamental algumas noções preliminares sobre geometria topológica. Para alcançar tal objetivo, empregou-se materiais concretos, cuidadosamente elaborados pelos investigadores, de modo que fossem descobertas propriedades dessa geometria, ainda que não formais da perspectiva matemática.

Por meio de seis atividades envolvendo desde o problema das quatros cores até a Faixa de Möebius, propriedades elementares da topologia foram sendo obtidas. Isso vem ao encontro do dito por Piaget e Inhelder (1993), isto é, por independer de medidas, a geometria topológica é mais intuitiva do que a euclidiana com sua métrica bem definida.

Acredita-se que o objetivo foi alcançado, uma vez que, ao final das atividades, os estudantes perceberam, por exemplo, a exigência de um mínimo de quatro cores para pintar um mapa de forma que estados vizinhos não fossem coloridos da mesma cor. Esse problema foi resolvido apenas recentemente, com o advento dos métodos computacionais. Tal problema é de relevância, por exemplo, para a obtenção da relação entre vértices, faces e arestas de um poliedro convexo. Assim, os estudantes com o conhecimento inicial sobre o tema poderão ser despertados e estimulados ao estudo de geometria euclidiana espacial no Ensino Médio.

Por sua vez, ao explorarem as atividades intuitiva e concretamente, obtendo a Faixa de Möebius, os estudantes poderão ter noções mais propícias ao estudo de conjunto finitos, infinitos, limitados e ilimitados, o que poderá conduzi-los a uma melhor compreensão do estudo de progressões e limites no Ensino Médio, bem como dos números reais.

Ao investigar atividades envolvendo propriedades topológicas de maneira informal e recreativa, entende-se que houve compreensão de algumas destas, o que permitiu ao grupo investigado ter noção de que não somente a geometria euclidiana necessita ser estudada e aprofundada. Como há inúmeras possibilidades de aplicações, como exemplificado neste artigo, defende-se que tais atividades poderiam ser incluídas em disciplinas do Ensino Fundamental.

A professora titular da turma e autora do artigo esperava que as atividades realizadas levassem os alunos a serem instigados a conhecer outros tipos de geometria e de Matemática. Pretendia-se, com isso, ir além daqueles dos conteúdos rotineiros constantes no currículo básico, sem perder de vista o cumprimento deste. Esperava-se, desse modo, despertar interesse pela geometria em suas diversas nuances.

A partir dessas atividades, percebeu-se que os alunos ficaram curiosos com a existência de formas geométricas não vistas na geometria euclidiana, bem como com propriedades que nem imaginavam existir, como a existência da Fita de Möebius, uma superfície unilateral. Além disso, os estudantes descobriram transformações de objetos distintos, preservando propriedades topológicas. Ilustra-se, na Figura 14, a concentração dos alunos durante as atividades realizadas.

Figura 14 – Alunos realizando atividades topológicas

Fonte: Dados da pesquisa dos autores (2020).

A investigação mostrou ser possível utilizar conhecimentos não empregados no nível em questão, favorecendo aprendizagem, inclusive, de conceitos de geometria euclidiana a partir das construções realizadas, além de outros de geometria topológica. Acredita-se que as atividades podem ser relevantes também para outros anos escolares, por exemplo, no Ensino Médio.

Acredita-se que a investigação cumpriu com o desejado e espera-se, na sequência, aplicar algo similar em turmas do Ensino Médio, pois espera-se que tais inovações no currículo da escola básica possam despertar mais indivíduos para a Matemática e, especificamente, para a geometria.

INVESTIGATING TOPOLOGICAL PROPERTIES WITH STUDENTS OF THE ELEMENTARY SCHOOL

ABSTRACT

This article is the result of a research originated in a Study and Research Group in Geometry, which has been dedicated to exploring alternative methodologies that can contribute to this area, including through the development of appropriate teaching resources, whose application should happen in locus, in order to validate it and suggest proposals. This work aimes to analyze how elementary school students understand facts of a non-Euclidean geometry - topological geometry - exploring concrete didactic material resources. Six activities were applied involving material resources such as: coloring maps with minimal amount of colors; modeling clay, in order to conclude the mass conservation; strings, for continuous transformations of closed lines; Möebius Band, to analyze the continuity property; balloons, to illustrate continuous deformations, among others. It was possible to investigate the students' understanding of the theme at this level of education. It was concluded from the research that it is possible to introduce basic topological notions that tend to contribute to the geometric formation of the students, which includes the transition to high school geometry, for example, when studying the Euler's relation to polyhedra.

KEYWORDS: Topology. Elementary School. Möebius band.

NOTAS

1 Disponível em: http://revistavidroealuminio.com.br/centro-internacional-de-midia-phoenix-exemplo-de-construcao-sustentavel/.

2 Disponível em: Extraído da Revista Galileu. O enigma de US$ 1 milhão Edição 144 - Jul/03, disponível na internet: http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT560640-2680-2,00.html reportagem de Carmem Kawano.

3 Agradece a CAPES pela concessão de bolsa de doutorado para a autora do artigo.

REFERÊNCIAS

BAUER, M. W.; GASKELL, G. **Pesquisa Qualitativa com texto, imagem e som**: um manual prático.13a ed. Petrópolis: Vozes, 2. Reimpressão, 2017.

DRUK, S. **Entenda a topologia, a matemática que estuda as formas geométricas.** 12/2011. Disponível em: http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/entenda-topologia-matematica-que-estuda-formas-geometricas.html. Acesso em: 31 out. 2016.

KAWANO, C. Como os matemáticos da topologia vêem o mundo. **Revista Galileu, O enigma de US$ 1 milhão** Edição 144 - Jul/03. Disponível em: http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT560640-2680-2,00.html. Acesso em: 17 nov. 2016.

LARANJEIRAS, C. C. **A Fita de Listing-Möebius**: A Matemática da Beleza e do Mistério. 04/2010. Disponível em: http://www.experimentum.org/blog/?p=846. Acesso em: 31 out. 2016.

LEIVAS, J. C. P.; BETTIN, A. D. H.; FRANKE, R. F. Faces da Banda de Möebius. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v.10, n. 3, 2019, p.93-110.

OLIVEIRA, L. D. (2005). A construção do espaço segundo Jean Piaget. **Sociedade e Natureza**, 17, 33, 105-107. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/sociedadenatureza/article/viewFile/9205/5667. Acesso em: 17 nov. 2016.

PIAGET, J.; INHELDER, B. tradução Octavio Mendes Cajada. **A psicologia da criança**. Rio de Janeiro: Difel, 2003,144p.

PINTO, J. A. P. **Notas sobre História da Topologia**. Cidade do Porto: Universidade do Porto, 2004.

SILVA, E. S.; LEIVAS, J. C. P. Um estudo sobre contribuições de noções de Topologia Geométrica para um grupo de mestrandos. **Anais ...** (EBRAPEM). Curitiba. Disponível em http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/maio2013/matematica_artigos/artigo_silva_leivas.pdf. Acesso em: 25 ago. 2019.

SOUSA, M. R. M. **A Fita de Möebius e suas aplicações**. Disponível em: http://maraeducare.blogspot.com.br/2014/02/aplicaciones-de-la-increible-cinta-de.html. Publicado em: 27 fev. 2014.

Recebido: 26 jun. 2020.
Aprovado: 29 jun. 2021.
DOI: 10.3895/rbect.v14n1.12649
Como citar: LEIVAS, J. C. P.; BETTIN, A. D. H. Investigando propriedades topológicas com alunos do ensino fundamental. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v.14, n. 2, p. 19-36, mai./ago. 2021. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/12649>. Acesso em: XXX.
Correspondência: José Carlos Pinto Leivas - leivasjc@yahoo.com.br