Ensino e Tecnologia em Revista

ISSN: 2594-3901

http://periodicos.utfpr.edu.br/etr

Implicações da Filosofia da Matemática na elaboração e mediação de tarefas matemáticas

Mauricio Berns
mauricioberns1997@gmail.com
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), Cascavel, Paraná, Brasil

Paulo Wichnoski
wichnoskio@gmail.com
orcid.org/0000-0003-1183-0897
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), Cascavel, Paraná, Brasil

Renato Francisco Merli
renatomerli@utfpr.edu.br
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), Cascavel, Paraná, Brasil // Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

RESUMO

A Filosofia da Matemática é um campo de pesquisa que trata das compreensões sobre a matemática. Tais compreensões afetam como o ensino de matemática é pensado, pois implicitamente subsidiam o pensar do professor na elaboração das tarefas e na condução da prática docente. Nesse contexto, o presente artigo tem por objetivo discutir como a concepção filosófica sobre matemática implica na elaboração e mediação de tarefas matemáticas. Para tanto, inicialmente foi realizado um estudo da literatura sobre as escolas filosóficas do Logicismo, Formalismo e Intuicionismo e em seguida, por meio de discussões favorecidas pelos estudos anteriores, apresentamos algumas tarefas matemáticas à luz das escolas filosóficas supramencionadas. Em face das discussões e resoluções das tarefas apresentadas foi realizada uma análise de caráter qualitativo, buscando verificar se as questões ensejaram o pensar conforme os pressupostos das escolas filosóficas que as caracterizam e como a concepção filosófica do professor influencia na sua mediação e, por consequência, na resolução das tarefas apresentada pelos alunos. As conclusões sugerem que é possível pensar em tarefas que desenvolvam diferentes formas de pensar a matemática, levando em conta também a forma de as mediar.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino. Formalismo. Intuicionismo. Logicismo.

INTRODUÇÃO

Questões que interrogam a realidade dos objetos matemáticos, como eles são conhecidos, quais suas origens, sob quais critérios a veracidade dos fatos matemáticos repousa, entre outras, têm engendrado e alimentado as discussões dentro da Filosofia da Matemática. Compreender estas e outras questões correlatas a matemática, do ponto de vista epistemológico, torna-se relevante para a sua compreensão, bem como para a compreensão das implicações sobre o processo de ensino e aprendizagem.

Com esse objetivo instauraram-se, na história da matemática, algumas escolas filosóficas que buscavam explicar e sustentar a matemática num conjunto de ideias e concepções próprias a respeito da produção do conhecimento matemático. Essas escolas, hoje ditas clássicas, referem-se às correntes filosóficas do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo, as quais marcaram o processo de elaboração e reelaboração da matemática até configurar-se tal como a conhecemos hoje.

Embora clássicas e não tendo se sustentado como filosofias universais acerca da produção do conhecimento em matemática, os ideais e as teorias enunciadas por cada uma delas criaram raízes tão fortes que ainda hoje possuem implicações no currículo, no ensino e na aprendizagem da matemática, bem como na prática docente. Nesse sentido, há razões para supor que os modos de organizar o ensino de matemática por parte do professor como, por exemplo, os diferentes tipos de tarefas matemáticas, também sofrem influências dessas correntes filosóficas.

Dessa premissa e nos movendo no campo epistemológico do ensino da matemática, assumimos o desafio de buscar, em diferentes tipos de tarefas matemáticas, indícios de implicações das correntes do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo, bem como ponderar até que ponto as heranças deixadas por essas escolas constituem-se efetivamente em contribuições para o ensino de matemática. Estudos epistemológicos que enfocam a natureza do conhecimento matemático são proeminentes em Educação Matemática e podem contribuir para a compreensão não somente da matemática, mas de aspectos relacionados ao seu ensino. Estes argumentos justificam e legitimam o trabalho.

Na próxima seção trazemos uma síntese compreensiva das ideias do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo, produto das nossas leituras de textos sobre Filosofia da Matemática, principalmente em Barker (1969), Fossa (2014), Silva (2007) e Snaper (1984); além de leituras sobre Filosofia da Educação Matemática em Bicudo (2010), Bicudo e Garnica (2011), Dias (1999), Erickson e Fossa (2006), Meneghetti (2010) e Mondini (2008), como um movimento de aproximação com o tema.

Na sequência, apresentamos algumas tarefas matemáticas que foram aplicadas a uma turma de pós-graduação a nível de mestrado e doutorado. Na sequência, fazemos alguns apontamentos e algumas análises dessas tarefas. Por fim, discutimos os resultados aos quais chegamos.

UMA INCURSÃO NAS ESCOLAS DO LOGICISMO, DO INTUICIONISMO E DO FORMALISMO

Enquanto que para alguns filósofos da matemática, à matemática não cabe contestamento, senão somente reflexão, para outros cabe exercer o direito da crítica, submetendo-a a instâncias superiores da razão.

Podemos entender a Filosofia da Matemática como a submissão da matemática ao crivo de uma razão filosófica que lhe transcende, balizando-a, ou como o exercício da reflexão filosófica voltada para a matemática tal como lhe é dada e a qual cabe apontar a correta compreensão. Desse modo, a Filosofia da Matemática apresenta-se como uma disciplina lata em termos de investigação da própria matemática.

Para Bicudo e Garnica (2011, p. 39) a Filosofia da Matemática “define-se por proceder conforme o pensar filosófico, ou seja, mediante a análise crítica, reflexiva, sistemática e universal, ao tratar de temas concernentes à região de inquérito da matemática”. Difere da filosofia porque as perguntas clássicas desta ciência, como por exemplo, “o que existe?” ou “o que é conhecimento?”, incidem sobre os objetos matemáticos e; difere da matemática porque não almeja produzir conhecimentos matemáticos, senão tão somente

> [...] entender o seu significado no mundo, no mundo das ciências, o sentido que faz para o homem, de uma perspectiva antropológica e psicológica, a lógica da construção do seu conhecimento, os modos de expressão pelos quais aparece ou materializa-se, cultural e historicamente, a realidade dos seus objetos, a gênese do seu conhecimento (BICUDO; GARNICA, 2011, p. 40).

Além disso, mesmo que Filosofia e Matemática sejam áreas distintas do conhecimento, a Filosofia da Matemática não se constitui como soma delas. O que há é uma interlocução em termos de tratar dos objetos matemáticos pelo viés reflexivo da filosofia.

A rigor, a matemática está em constante crise de fundamentos, uma vez que seus fundamentos ainda são incompletos (DIAS, 1999), porém dois fatos destacaram-se na história da matemática, os quais ficaram conhecidos pela crise dos fundamentos, são eles: a teoria dos conjuntos de Cantor e os paradoxos envolvendo as noções mais fundamentais da matemática, as noções de verdade e de definição. A crise dos fundamentos fez com que emergissem as escolas filosóficas da matemática clássica, a saber, o Logicismo, o Intuicionismo e o Formalismo, cada uma com uma visão própria acerca da matemática.

O Logicismo, de Gottlob Frege (1848-1925) e Bertrand Russell (1872-1970), mobiliza-se pela tentativa de esvaziar a matemática ou pelo menos parte dela de conteúdos próprios, reduzindo-a à lógica. Por exemplo, os termos *conjunto* e *par ordenado*, assim como as leis relativas a eles, pertencem a lógica e não a matemática. Outro exemplo é que o Logicismo parte da origem lógica da aritmética. No senso comum a ideia de número está associada a coisas e objetos, por exemplo, três homens ou cinco maçãs, quando na verdade quer se anunciar o conceito de número. A concepção logicista de número deriva da definição de equinumérico, que é a noção cardinal obtida como bijeção. Dessa concepção ocorrem outras instâncias de números (inteiros, racionais, reais, complexos) (DIAS, 1999).

Em suma, segundo Dias (1999, p. 75), a tese logicista

> [...] é de que *a Matemática é redutível à Lógica*, logo, nada mais é do que uma parte dela. Esta tese pode ser dividida em duas partes: 1) Os *conceitos da Matemática* podem ser derivados dos conceitos lógicos através de definições explícitas e 2) Os *Teoremas da Matemática* podem ser derivados de axiomas lógicos através de pura dedução lógica.

Isso significa que a matemática é vista como um conjunto de conhecimentos metodologicamente organizados de forma lógico-dedutiva, ou seja, as premissas são seguidas de conclusões através da aplicação de silogismos, regras de inferência e outros argumentos lógicos.

Os axiomas e os postulados são, portanto, hipóteses básicas subjacentes a um corpo de conhecimento dedutivo que, associados à lógica, originam as regras pelas quais este corpo pode se expandir. São resultados matemáticos aceitos sem demonstração, enquanto que todas as outras asserções matemáticas devem ser demonstradas. A visão lógico-dedutiva da matemática pode ser ilustrada pelos axiomas de Euclides e, de modo mais contemporâneo, pelos axiomas de corpo matemático.

Do ponto de vista clássico, a lógica é constituída de todos os teoremas que podem ser demonstrados em linguagens de primeira ordem, sem o uso de axiomas não-lógicos. Entretanto, a concepção de lógica assumida pelos adeptos do movimento logicista vai além dessas ideias.

Segundo Snapper (1984), os logicistas tinham um conceito mais geral e consideravam que uma proposição pertence a lógica quando ela "tem generalidade completa e é verdadeira em virtude da sua forma, e não do seu conteúdo" (p. 86). Além disso, "não há razões *a priori* para acreditar que não poderia haver proposições lógicas que se situem fora da lógica clássica (SNAPPER, 1984, p. 86). Nesse sentido, a lei do terceiro excluído é considerada uma proposição lógica, ou seja, ela se verifica para proposições matemáticas, físicas ou outras quaisquer.

De acordo com Mondini (2008), o Logicismo fracassou porque nem todos os axiomas puderam ser escritos na forma de proposições lógicas, livrando a matemática de contradições, a exemplo dos problemas (paradoxos) encontradas por Russell na Teoria dos Conjuntos. Apesar disso, o movimento logicista teve considerável importância para o desenvolvimento da matemática, uma vez que foi o ponto de partida para o desenvolvimento da Lógica Matemática Moderna.

Na escola intuicionista a matemática nasce das experiências mentais incomunicáveis de uma consciência inserida no tempo e da lógica como um conjunto de princípios próprios *a priori* que se impõem ao pensamento. Para a corrente intuicionista a matemática apenas descreve certos aspectos da nossa vida mental. Essa corrente admite que a matemática não é uma teoria, mas uma parte fundamental da atividade humana. Para Fossa (2014, p. 84), Brouwer rejeita "a qualidade apriorística que Kant atribui à geometria baseada na pura intuição do espaço [...]", mas "reafirma resolutamente a intuição pura de tempo como a base para a qualidade apriorística da aritmética", ou seja,

> [...] o intuicionismo de Brouwer – enraizado como foi no idealismo de Kant e baseado na construção de conceitos matemáticos pelo indivíduo -, considerado como uma epistemologia da matemática, deve ser visto como uma forma primária do construtivismo (FOSSA, 2014, p. 85).

Na concepção intuicionista uma afirmação pode ter somente uma das três possibilidades: verdadeiro, falso ou indecidível. A título de exemplo, considere as afirmações a seguir: "1) $2^n +1$ é um número primo. 2) Existe um terno x, y, z de números naturais tais que $x^{n+2} + y^{n+2} = z^{n+2}$ e 3) Se p é primo, existe um primo q maior que p" (DIAS, 1999, p. 76). A primeira afirmação é verificável e será falsa ou verdadeira. A segunda, segundo o Intuicionismo, consiste num problema indecidível, pois dado um *n*, a verificação deveria ser feita para infinitos ternos *x, y, z*. E a terceira afirmação é decidível, pois mesmo que haja infinitos números primos, há uma forma de construir o próximo número primo.

Na perspectiva formalista a matemática é considerada como o estudo dos sistemas de axiomas acrescidos de leis lógicas. Para Silva (2007, p. 183)

> [...] o método axiomático-dedutivo consiste em fundar toda uma ciência em uma base de verdades não demonstradas – os axiomas da teoria – a partir das quais se podem derivar todas as verdades dessa ciência por meios exclusivamente lógicos.

Euclides tentou realizar uma axiomatização da geometria, contudo algumas de suas "verdades" utilizavam intuições, além de que os métodos de demonstração eram antes de tudo, métodos de construção e não métodos puros de lógica. Assim, numa teoria axiomática formal "as deduções são cadeias de transformação de expressões simbólicas segundo regras explícitas de manipulação de símbolos" (SILVA, 2007, p. 184). A ideia seria de uma *characteristica universalis*, ou seja, um processo algorítmico de pensar. Nesse contexto, o algoritmo fica responsável por "calcular/resolver" por nós.

A matemática, nessa escola, repousa na consistência, isto é, para uma mesma sentença matemática não se pode provar sua veracidade e sua falsidade. A matemática formalista é arbitrária, pois a existência e a verdade física não a envolvem. A exemplo, o surgimento das geometrias não euclidianas, por sua vez, não eliminou a geometria Euclidiana. A formalidade dessas teorias está em abstrair o sentido das expressões. Silva (2007) distinguiu dois tipos de teorias axiomáticas: as teorias interpretadas – que é o caso de Os Elementos de Euclides – e as teorias puramente formais ou teorias simbólico-formais – que é o caso dos conhecidos Axiomas de Dedekind-Peano.

Nesse último caso, Husserl chamou essa abstração total dos sentidos de *abstração formalizante*, ou seja, ao "processo de desvestimento de significados que gera uma teoria formal a partir de uma teoria interpretada" (SILVA, 2007, p. 186). Outro exemplo desse tipo de axiomatização é o livro *Os fundamentos da Geometria* de David Hilbert (1862-1943), cuja teoria pode ser considerada não interpretada e formal.

Podemos compreender esta escola filosófica como um jogo no qual as asserções matemáticas são válidas apenas enquanto os lances do jogo são válidos pelas regras pré-definidas. Uma vez que a regra muda, não dá para legitimar um lance (asserção matemática) já feito.

Ao longo do tempo questões sobre o conhecimento matemático, o objeto matemático, a verdade matemática e sua utilidade foram discutidas e aclaradas numa combinação mais ou menos matizada dessas correntes filosóficas que embora distintas, possuem algumas crenças em comum como, por exemplo, a de reservar à matemática um posto único de ciência não aberta a falsificações empíricas.

Isso porque, como lógica pura ela é constitutiva da própria razão e, portanto, anterior a qualquer experiência. Enquanto intuição, a matemática não está submetida a evidências humanas. Outro aspecto comum é a crença de que a matemática é incontestável, não aberta a revisões. Isto porque no Logicismo, renunciar uma asserção matemática equivaleria a renunciar um princípio absoluto da razão. No Intuicionismo a renúncia de um fato matemático só seria possível em virtude da desqualificação de uma evidência a qual, por sua vez, estaria ligada a instauração de fatos inquestionáveis. E no Formalismo, enquanto um jogo formal, no qual as asserções são válidas somente enquanto lances, não há porque ilegitimar um lance já feito.

As escolas filosóficas da matemática aparecem no contexto da crise dos fundamentos, as quais preocupam-se em colocar a matemática em fundamentos seguros para observá-la de fora. Nesta tarefa de reconstrução e reinterpretação, as filosofias tradicionais da matemática foram criadas mais como ideologias de justificação para os esforços de fundamentação a que estavam acopladas do que como produto de uma reflexão sobre a natureza da matemática e como ela historicamente se apresenta a nós.

Como produto de uma síntese compreensiva acerca da literatura estudada e tendo em vista o objetivo cunhado para este trabalho, a saber, identificar algumas implicações do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo em diferentes tipos de tarefas matemáticas, trazemos no Quadro 1 as principais características de cada uma das escolas filosóficas.

Quadro 1: Algumas características do pensamento Logicista, Intuicionista e Formalista

Logicismo
Escrever toda a matemática em proposições lógicas; Atender ao princípio do terceiro excluído; Reduzir os conceitos matemáticos a conceitos da lógica; Provar a verdade matemática a partir de axiomas e de regras lógicas; Enunciar os resultados matemáticos por meio de uma linguagem simbólica; Excluir da Análise as intuições geométricas, substituindo-as por noções da Aritmética; Os objetos matemáticos são imateriais, obtidos por abstração, a partir de objetos acessíveis aos sentidos, mas de que deles são apenas "imagens"; A matemática é vista como um conjunto de conhecimentos metodologicamente organizados de forma lógico-dedutiva.
Intuicionismo
A matemática é falível; Existência de uma intuição primeira sobre os números naturais; As entidades abstratas existem somente quando são construídas pela mente humana (MONDINI, 2008);

Entidades abstratas são elaborações humanas e não objetos ideais platônicos (SNAPPER, 1984); Os paradoxos são erros da matemática; Construção da matemática por métodos finitos (MACHADO, 2005); Renúncia da lei do terceiro excluído (MORAIS FILHO, 2007).
Formalismo
Ser livre de contradições e paradoxos; Mostrar a consistência das estruturas; Linguagem Formal de 1ª ordem com cinco itens: uma quantidade enumerável de variáveis, símbolos para os conectivos da linguagem comum, o sinal de igualdade, os quantificadores e símbolos para os entes primitivos da teoria axiomatizada (NERY, BATISTELA, 2013); Ontologia estruturalista; Inexistência de objetos matemáticos – Nominalismo (MONDINI, 2008; MENEGHETTI, 2010); Raciocinar nada mais é que jogar um jogo de fórmulas (MENEGHETTI, 2010).

Fonte: Dos autores

De outro modo, para Silva (2007, p. 235), o Intuicionismo, "[...] nos mostra em que medida a matemática é, ou pode ser, refeita como sendo, uma atividade construtiva, e, mais interessantemente, em que medida não o pode", já o Logicismo "[...] nos mostra as profundas conexões entre a matemática e a lógica". E o Formalismo, "[...] esclarece a dimensão puramente simbólica e formal da matemática (já o teorema de Gödel mostra em que medida o formalismo é falso, uma vez que estabelece de uma vez por todas que a matemática com um todo" (SILVA, 2007, p. 235). Dessa síntese teórica, passamos a apresentar e discutir as tarefas propostas.

SOBRE AS ATIVIDADES DE MATEMÁTICA

As tarefas foram aplicadas em uma turma de pós-graduação que possuía mestrandos e doutorandos licenciados em matemática. As tarefas faziam parte de uma atividade da disciplina *Epistemologia da Educação Matemática*, em que, os autores desse artigo ficaram responsáveis por tratar das relações entre Filosofia da Matemática e Educação Matemática. O tempo de atividade era de oito horas, sendo divididas em duas partes de quatro horas.

Na primeira parte foram realizados seis momentos: M1 – Entrega das tarefas de logicismo, M2 – Reflexões da Crise, M3 – Entrega das tarefas de Intuicionismo, M4 – Reflexões da Crise, M5 – Entrega das tarefas de Formalismo e M6 – Reflexões da Crise. Vale destacar que as tarefas foram selecionadas ou produzidas pelos autores deste trabalho, buscando articular o pensamento filosófico subjacente a elas com as respectivas resoluções. Além disso, quando entregues aos estudantes, não havia, de modo explícito, qualquer menção à escola filosófica que sustentava a estrutura da tarefa. A segunda parte se desdobrou em quatro momentos: M7 – Resgate da aula anterior com dinâmica das frases (expostas no quadro), M8 – Discussão de cada escola com os problemas, M9 – Apresentação de um problema final com todas as concepções e M10 – Momento Final – Mapa Conceitual; contudo, os últimos dois momentos acabaram não acontecendo por falta de tempo.

No M1 foram entregues cinco tarefas pensadas por nós, que poderiam, de algum modo, serem resolvidas utilizando princípios de lógica. Para efeito de exemplo, apresentamos algumas delas, juntamente com possíveis resoluções, seguidas de considerações que relacionam a resolução da tarefa com as ideias filosóficas que a sustentam. Esse modo de apresentação será mantido para todas as tarefas.

Quadro 2: Tarefa 1 e respectiva possível demonstração

Tarefa 1: Mostre que $\sqrt{\mathbf{2}}$ é irracional. Demonstração: Suponhamos que $\sqrt{2}$ não é irracional, então pode-se dizer que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, onde *a* e *b* são números inteiros e primos entre si (a fração está na forma irredutível). Se isso é verdade, pode-se elevar os dois lados da igualdade ao quadrado que a relação permanece, ou seja $\sqrt{2}=\frac{a^2}{b^2}$, podendo também ser escrito na forma $2b^2=a^2$. Como o quadrado de todo número ímpar é um número ímpar, $2b^2$ será sempre par e a^2 também será par. Assim se conclui que *a* também é par. Ora, se *a* é par ele pode ser escrito como $a=2c$, assim a relação $2b^2=a^2$ pode ser escrita na forma $2b^2=4c^2$, ou seja, $b^2=2c^2$. Feito estas considerações se chega a conclusão que *b* também deve ser par, contrariando a premissa com a qual a demonstração foi iniciada, que $\sqrt{2}=\frac{a^2}{b^2}$ e *a* e *b* são números inteiros e primos entre si.

Fonte: Dos autores

A demonstração apresentada no Quadro 2 é conhecida como redução ao absurdo e consiste em mostrar que dada uma proposição *p*, assumir a sua negação, leva a uma contradição (ou trivialidade), logo se ~p é falso, então *p* é verdade. Foi exatamente o que a demonstração da tarefa 1 respeitou; atendendo ao princípio do terceiro excluído – $\sqrt{2}$ é irracional ou $\sqrt{2}$ não é irracional – se mostrou que não é o caso que $\sqrt{2}$ não é irracional, logo se concluiu que $\sqrt{2}$ é irracional. Em linguagem simbólica, a ideia da demonstração pode ser formalizada de acordo com o Quadro 3:

Quadro 3: Esquema simbólico da Demonstração

p∨~p	Assume-se válido a proposição *p* ou a sua negação (não *p*)
~(~p)	Chega-se a negação da negação da proposição *p* (não não *p*)
p	Conclui-se pela validade da proposição *p*

Fonte: Dos autores

Há neste tipo de demonstração fortes traços da corrente logicista como, por exemplo, o princípio do terceiro excluído e a prova da verdade matemática a partir de axiomas e de regras lógicas. Ao assumir a premissa de que $\sqrt{2}$ não é irracional, as conclusões procedentes são oriundas da aplicação de outros axiomas, teoremas, proposições, de modo que a demonstração se arquiteta a partir de resultados logicamente organizados. Outro exemplo de tarefa pode ser visto no Quadro 4.

Quadro 4: Tarefa 2 e respectiva resolução

Tarefa 2: Os valores lógicos de proposições ***p*** e ***q*** conjuntivas e disjuntivas seguem na tabela abaixo.

p	q	p^q	pvq
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Por exemplo, se ***p*** é verdadeira (V) e ***q*** é falsa (F) então ***p*** e ***q*** (P^Q) é falsa (F) e ***p*** ou ***q*** (PvQ) é verdadeira (V). Desse modo, qual o valor lógico das proposições abaixo:
Se 2 é um número par e 2 é um número primo, então 2 é um número par e primo.
Se 2 é um número par e 2 é um número primo então 2 é um número par ou primo.
Se João é alto e Maria é baixa, então João é alto e Maria é baixa.
Se João é alto e Maria não é baixa, então João é alto e Maria é baixa.
Se João não é alto e Maria é baixa, então João é alto e Maria é baixa.
Se João não é alto e Maria não é baixa, então João é alto ou Maria é baixa.
Se 6 é um número ímpar e 12 é múltiplo de 6, então 6 é ímpar e 12 é múltiplo de 6.

Fonte: Dos autores

Características como redução dos conceitos matemáticos a conceitos da lógica e organização do conhecimento matemático de forma lógico-dedutiva estão presentes nessa tarefa. Está assentada nas leis conjuntivas e disjuntivas da lógica, de modo que a veracidade das afirmações se dá “em virtude da sua forma, e não do seu conteúdo” (SNAPPER, 1984, p. 86), ou seja, as leis da lógica dão conta de tornar as afirmações verdadeiras ou falsas, independente de elas tratarem do objeto matemático “número 2” ou das características físicas de João e Maria. A tabela verdade é que determina se uma proposição é verdadeira ou falsa.

É possível obter variações desta tarefa, considerando outras operações lógicas – condicionais, negações, silogismos – na tabela verdade. Por exemplo, pode-se considerar afirmações do tipo “todo número inteiro é racional. 2 é um número interior, então 2 é racional”. Genericamente tem-se uma premissa maior “todo M é P”; uma premissa menor “S é M” e a conclusão “S é P”. Notemos que a conclusão é obtida em face da premissa maior. Tal raciocínio é conhecido como silogismo e extrai uma conclusão de duas ou mais proposições, que se supõe serem verdadeiras.

No M3, do Intuicionismo, foram entregues quatro tarefas. A seguir, no Quadro 5, apresentamos as atividades propostas.

Quadro 5: Tarefas propostas do Intuicionismo

Tarefa 1: O que você entende como: sequência?
Tarefa 2: O que você entende por: a soma dos números reais?
Tarefa 3: Qual sua concepção sobre o “infinito”?
Tarefa 4: Qual resultado você esperaria obter quando somamos infinitos números reais? Justifique.

Fonte: Dos autores

Essas atividades foram pensadas e elaboradas na perspectiva desta escola filosófica que defendia a construção da matemática por meio da intuição, daí a justificativa de haver questões com diversas possibilidades de resoluções, já que os intuicionistas acreditavam que todo ser humano possui uma intuição primitiva quanto aos números naturais. Como na escola intuicionista se acreditava que cada aluno deveria construir a sua própria matemática, as atividades foram respondidas individualmente pelos participantes. Nelas, a busca pela criatividade e a não formalização se fez presente em grande parte das resoluções.

Os objetivos dessas questões eram considerar o pré-conceito que cada um teria a respeito de sequência de adição de números reais e de infinito, para que no final fosse discutida a diversidade de pensamentos em cima de um mesmo tema. Vale ressaltar que a escola intuicionista descarta qualquer conhecimento matemático que não seja construído e, por isso, todas as respostas foram consideradas como conhecimento matemático válido. Por fim, após a resolução das atividades, um momento em grupo foi realizado no quadro. Nesse tempo, foram consideradas tanto as respostas que convergiam quanto as que divergiam em vários tópicos. Para cada resposta, ainda foi possível expandir a criação do conceito de infinito e de série infinita.

No M5, do Formalismo, foram entregues cinco atividades para que os participantes as resolvessem. Dentre elas, temos a tarefa um, apresentada no Quadro 6, a seguir.

Quadro 6: Tarefa 1 do Formalismo

Tarefa 1: Dada a série$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$, encontre sua soma, se houver.

Fonte: Dos autores

Essa tarefa pode ser resolvida utilizando a fórmula para soma de uma progressão geométrica infinita cuja razão está entre zero e um, o que significa a convergência para um determinado valor (Quadro 7).

Quadro 7: Fórmulas da Soma de uma Progressão Geométrica

$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$	$\lim\limits_{x\to\infty} S_n=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$	$\lvert q\rvert<1\to\lim\limits_{x\to\infty} S_n=\dfrac{a_1}{1-q}$

Fonte: Dos autores

É possível resolver de forma direta utilizando a fórmula. O estatuto epistemológico presente nesse tipo de resolução permite compreender que a resolução é livre de contradições ou paradoxos, pois a linguagem utilizada é clara, mostra a consistência das estruturas; no caso, a soma de uma sequência geométrica com infinitos termos, onde a razão está entre zero e um, garante a convergência da soma e a possibilidade de utilização de uma determinada estrutura, aqui chamada de fórmula.

Verifica-se uma linguagem formal de 1ª ordem, com uma quantidade enumerável de variáveis (a_n, q, S_n), símbolos para os conectivos da linguagem comum *(a, S, n, q)*, o sinal de igualdade, os quantificadores e símbolos para os entes primitivos da teoria axiomatizada. Podemos considerá-la uma teoria estrutural, pois ela necessita de estruturas/conceitos para ser desenvolvida, tais como noções de limite, convergência, conjuntos, elementos, razão e infinito. Outro ponto importante é compreender a inexistência de objetos matemáticos, pois a fórmula/estrutura independe de qualquer objeto matemático, ela é "aplicável" a qualquer estrutura matemática que atenda as regras, ou melhor, ao jogo de fórmulas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo da história, a Filosofia da Matemática tem procurado compreender o que é matemática e o que são seus objetos. Contudo, está longe de ser chegar a um consenso sobre isso. Das várias posições filosóficas presentes sobre o estatuto da matemática e de seus objetos, há de se considerar três importantes escolas filosóficas: a Logicista, a Intuicionista e a Formalista. Essas três escolas influenciaram e ainda influenciam o modo de pensar a matemática e implicitamente, orientam a forma como os professores pensam as tarefas de matemática.

Nesse contexto, utilizando nossos estudos, a experiência que tivemos e assumindo o caráter qualitativo de investigação (BOGDAN; BIKLEN, 1994) como condição de análise, identificamos por meio das tarefas realizadas e das discussões feitas acerca delas, as crises enfrentadas por cada escola filosófica, bem como as suas principais concepções epistemológicas relacionadas a aspectos como: conhecimento, verdade e linguagem. A maneira como concebemos esses aspectos justificam a forma como as tarefas podem ser pensadas e utilizadas em sala de aula.

De nossa experiência na seleção e elaboração das tarefas, as quais foram pensadas a partir dos pressupostos filosóficos de cada escola, verificamos que as formas de condução das tarefas e sua elaboração, exercem uma forte influência no modo de resolução, pois há explícito para o professor (a partir de suas crenças de verdade e conhecimento) e implícito para o aluno, o *modus operandi*.

No discurso dos participantes e na resolução das tarefas, emergiram formas diferentes de compreender a matemática. Para alguns, a matemática não pode ser distanciada da lógica, pois essa última é considerada ferramenta essencial na verificação das "verdades" exigidas. Para outros, a matemática é falível e o status de verdade é deixado de lado para dar lugar a condição de ser construtível. Existem outros ainda, que consideraram a matemática um tipo de linguagem, na qual o objetivo é mostrar a consistência de estruturas por ela criada.

Essas compreensões, presentes nos discursos dos participantes, também se fizeram correntes nas resoluções das questões. Dependendo da tarefa designada (ou melhor, da escola filosófica a qual ela estava enraizada), o processo de resolução era diferente. O que nos fez perceber a importância na escolha do tipo de tarefa a ser elaborada. Além disso, o tipo de mediação dessas tarefas influenciou na escolha do processo de resolução, pois nos casos em que fizemos algum tipo de intervenção, o participante optou por mudar sua forma de resolver, buscando se adequar ao que o "professor" compreende como forma "correta" de resolver. Em outras palavras, significa dizer que o professor "dita" o que é conhecimento, o que é verdade e qual linguagem deve ser utilizada.

Assim, diante do constatado, verificamos que compreender os estatutos filosóficos presentes nas escolas filosóficas permite ao professor entender suas concepções sobre a matemática e sobre suas práticas, em especial, na forma como ele pode elaborar as tarefas matemáticas e mediar a sala de aula.

Implications of the Philosophy of Mathematics in the elaboration and mediation of mathematical tasks

ABSTRACT

The philosophy of mathematics is a researching line which deals with the understandings in mathematics. These understandings affect the way teaching mathematics is thought, because implicitly subsidize the teacher's reflections when planning the tasks and the teaching practice conception. In this context, this article aims to discuss how the philosophical conception about mathematics implies in the creation and mediation of mathematical tasks. Therefore, first of all it was realized a bibliographical study about the philosophical schools of Logicism, Formalism and Intuitionism, and then, through discussions from previous researches, we elaborated some mathematical tasks guided by the philosophical schools above-mentioned. After the discussions and with the answers of the presented tasks it was made a qualitative analysis, intending to verify if the questions led the participants thought according to the philosophical schools' presupposes and how the teacher's philosophical conception influences in the mediation adopted and, as a consequence, in the resolution of the tasks shown by the students. The conclusions suggest that it is possible to think about tasks which may develop different ways of thinking mathematics, considering, too, the ways of mediating them.

KEYWORDS: Education. Formalisms. Intuitionism. Logicism.

NOTAS

1 Para Silva (2007), alguns dos paradoxos envolvidos eram os de Russel, Cantor e Burali-Forti que envolvem noções centrais da teoria dos conjuntos, como a própria noção de conjunto, número cardinal e número ordinal.

2 Os cinco axiomas de Euclides, em notação moderna, são: 1) Se A=B e B=C, então A=C. 2) Se A=B e C=D, então A+C = B+C. 3) Se A=B e C=D, então A–C = B–C. 4) Figuras coincidentes são iguais em todos os seus aspectos. 5) O todo é maior do que qualquer de suas partes.

3 1) Associatividade: i) a + (b + c)= (a + b)+ c e ii) a.(b.c)= (a.b).c, ∀ a,b,c ϵ F.

2) Comutatividade: i) a + b = b + a e ii) a.b = b.a, ∀ a,b ϵ F.

3) Elemento Neutro: i) ∃ 0 ϵ F; a + 0 = 0 + a = a e ii) ∃ 1 ϵ F; a.1 = 1.a = a, ∀ a ϵ F.

4) Inverso: i) ∀ a ϵ F,∃ b ϵ F; a + b = 0 e ii) ∀ a ϵ F,a ≠ 0,∃ b ϵ F; a.b = 1.

5) Distributividade: i) a.(b + c)= a.b + a.c, ∀ a,b,c ϵ F. (SAPUNARU; SANTIAGO; VIEIRA, 2014, p. 91).

4 Se p é uma proposição, então ou p ou sua negação ~p é verdadeiro; em outras palavras, a proposição p˅ ~p é sempre verdadeira, onde ˅ é o símbolo usual para o "ou" inclusivo" (SNAPPER, 1984, p. 86).

REFERÊNCIAS

BARKER, S. F. **Filosofia da Matemática.** Tradução de Leônidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969.

BICUDO, M. A. V. (org.). **Filosofia da Educação Matemática:** Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. São Paulo: Editora UNESP, 2010.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação** – uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

DIAS, J, R. Breves Noções de Filosofia da Matemática. **Caderno Dá Licença**, n. 2, v. 2, dez. 1999. Disponível em: http://www.dalicenca.uff.br/images/stories/caderno/volume2/breves_nocoes_de_filosofia_da_matematica.pdf. Acesso em: 20 ago. 2018.

FOSSA, J. A. **Teoria Intuicionista da Educação Matemática**. 2. ed. Tradução de Alberta M. R. B. Ladchumananandasivam. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

MACHADO, N. J. **Matemática e realidade:** análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

MENEGHETTI, R. C. G. **Constituição do saber matemático:** reflexões filosóficas e históricas. Londrina: EDUEL, 2010.

MONDINI, F. O logicismo, o Formalismo e o Intuicionismo e seus diferentes Modos de Pensar a Matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008. **Anais...** Rio Claro: UNESP. Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/287-1-B-gt2_mondini_res.pdf. Acesso em: 04 jun. 2018.

MORAIS FILHO, D. C. **Um convite à matemática:** fundamentos lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades. 2. ed. Campina Grande: EDUFCG, 2007.

NERY, W. F.; BATISTELA, R. F. Matemática: a busca por seus fundamentos e o surgimento da teoria dos conjuntos. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 6., 2013. **Anais...** Canoas: ULBRA. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1271/91. Acesso em: 20 ago. 2018.

SAPUNARU, R. A.; SANTIAGO, D. F. G.; VIEIRA, M. M. Uma breve introdução às filosofias da lógica e da matemática de Bertrand Russell: conceitos e inferências a partir do número. **Abakós,** Belo Horizonte, v. 3, n. 1, p. 87-101, nov. 2014. Disponível em: http://periodicos.pucminas.br/index.php/abakos/article/view/6863/8129. Acesso em: 20 ago. 2018.

SILVA, J. J. **Filosofias da matemática.** São Paulo: Editora UNESP, 2007.

SNAPPER, E. As três crises da Matemática: o logicismo, o Intuicionismo e o formalismo. **Revista Humanidades,** v. 2, n. 8, p. 85-93, jul./set. 1984.

Recebido: 08 abril 2019.
Aprovado: 11 junho 2019.
DOI: http://dx.doi.org/10.3895/etr.v3n2.10065.
Como citar:
BERNS, M.; MERLI, R. F.; WICHNOSKI, P. Implicações da Filosofia da Matemática na elaboração e mediação de tarefas matemáticas. **Ens. Tecnol. R.**, Londrina, v. 3, n. 2, p. 198-213, jul./dez. 2019. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/etr/article/view/10065. Acesso em: XXX.
Correspondência:
Mauricio Berns
Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), Campus Chapecó-SC, Rodovia SC 484 - Km 02, Fronteira Sul, Chapecó, Santa Catarina, Brasil.