Ensino e Tecnologia em Revista

ISSN: 2594-3901 http://periodicos.utfpr.edu.br/etr

Metodologia para a diversificação de representações de um fenômeno modelado com Equações Diferenciais Ordinárias

João Bosco Laudares
jblaudares@terra.com.brl
orcid.org/0000-0003-3624-3402
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas), Belo Horizonte, Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.

Saulo Furletti
saulofurletti@gmail.com
orcid.org/0000-0003-3084-5939
Instituto Federal de Minas Gerais, (IFMG), Ribeirão das Neves, Minas Gerais, Brasil.

Júlio Paulo Cabral Reis
julio.cabral.reis@hotmail.com
orcid.org/0000-0003-0957-2710
Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG), Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil.

RESUMO

O artigo apresenta um trabalho com equações diferenciais ordinárias (EDO) em abordagens diferenciadas. Toma-se para análise um fenômeno físico da termodinâmica, o problema de resfriamento de um corpo, variando sua temperatura num ambiente mantido à temperatura constante (Lei de Resfriamento de Newton). Disso, propõe-se uma sequência didática com três diferentes abordagens para estudo do fenômeno físico: (1) construção e análise do campo de direções para representação gráfica da solução; (2) determinação dos modelos de equações – temperatura e taxa de variação da temperatura em função da variação do tempo; (3) e uso da informática para análise do fenômeno. Essa proposta tem seus pilares na resolução de problemas, nos registros semióticos, nas múltiplas representações e no uso da informática educativa, construindo-se, assim, uma Metodologia de trabalho com EDO na qual uma mesma situação-problema é estudada com diferentes abordagens. Considera-se que trabalhar EDO com essa Metodologia pode contribuir para a aprendizagem do estudante.

PALAVRAS-CHAVE: Equações Diferenciais. Fenômenos físicos. Diversificação de representações. Resolução de problemas.

INTRODUÇÃO

Percebe-se a evolução de estudos e pesquisas no interior da educação matemática, tanto na graduação quanto na pós-graduação, constituindo nesses níveis o que se denota como pensamento avançado. Dentre os resultados desses estudos e pesquisas, alguns sinalizam um aprofundamento em questões metodológicas da matemática superior, seja no que diz respeito ao conceito tratado com conjecturas, experimentações e aproximações, seja no tratamento extremamente formal da linguagem simbólica e dedutiva.

Ao voltar-se para a prática educativa, sob o olhar do professor de cálculo, suscitam-se novos desenvolvimentos de abordagens para o ensino-aprendizagem, com o uso de diversas ferramentas didáticas que se inserem em contextos das novas Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC's). Percebe-se que o objeto de estudo, em obras editoriais e pesquisas, a respeito da disciplina de Cálculo, em especial o ensino-aprendizagem de Equações Diferenciais, tem seus resultados apontando para duas linhas de exploração metodológica: (i) o trabalho com conceito, especialmente, de taxa de variação aplicada às leis de formação e estruturação do fenômeno; (ii) e os procedimentos operacionais dos cálculos envolvidos nas equações diferenciais, integrais e derivadas. Nesse cenário, o suporte tecnológico para exemplificar, abordar e/ou aprofundar os conteúdos envolvidos está presente nas propostas de Stewart (2013), Moran (2010), Duval (2009), Bassanezi (1998) e Lévy (1993). Assim, equilibrar essas três abordagens no desenvolvimento do pensamento superior tem sido um desafio para a didática.

Este artigo traz como proposta metodológica uma sequência didática composta por três representações para o tratamento de um problema de fenômeno físico – o "resfriamento de um corpo" pela Lei de Newton. O ponto de partida é a velocidade de resfriamento, enfatizando a parte: (1) geométrica, pelo campo de direções; (2) gráfica e das equações; (3) tecnológica, pelo uso de *software* gráfico para visualização/experimentação. A proposta metodológica perpassa por variadas representações, sejam semióticas, de acordo com Duval (2009), múltiplas, de acordo com Stewart (2013), e está respaldada na Resolução de Problemas de Polya (1994) e nos modelos matemáticos de Bassanezi (1998), utilizando as TDIC's para refletir, analisar e construir conhecimentos, de acordo com Moran (2010) e Lévy (1993).

Esta proposta pode ser aplicada em outros fenômenos, tais como dimensionamento de circuitos, variação de população, mistura de substâncias, massa-mola, vigas, entre outros, seja com equações diferenciais ordinárias de primeira ou de segunda ordem.

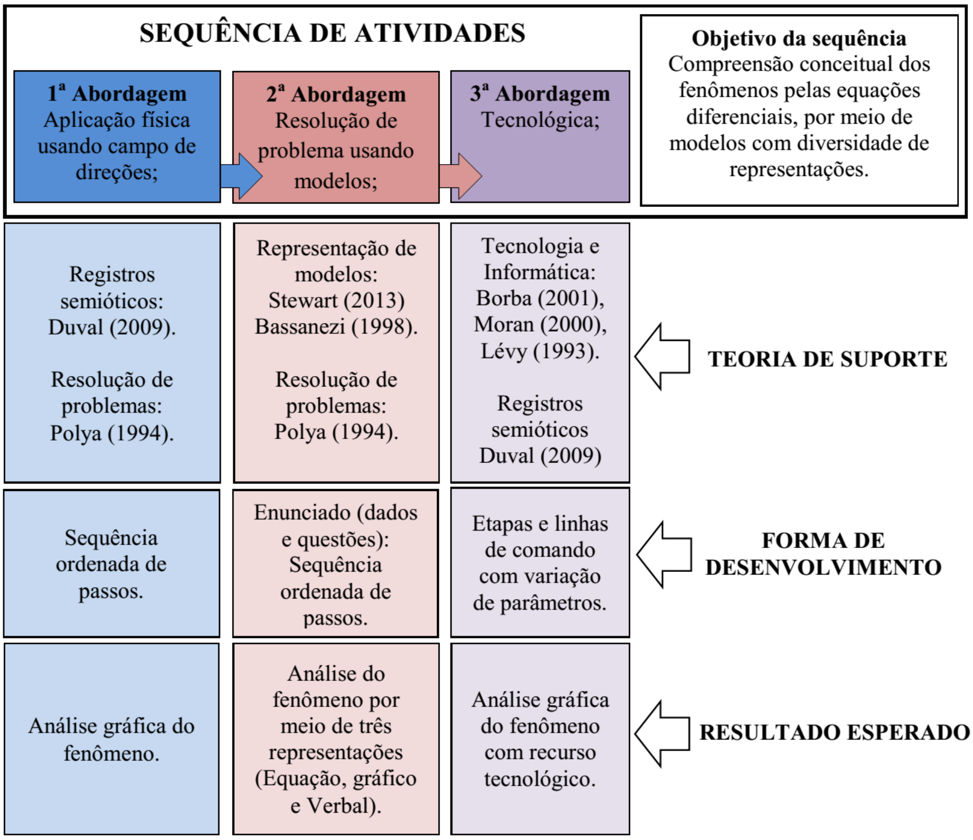
Inicialmente, apresentam-se, de modo sintetizado, os parâmetros constituintes do referencial teórico, que dão embasamento e direcionam a metodologia. Em seguida, tomando como exemplo "a lei de resfriamento de Newton", expõe-se a sequência em três diferentes abordagens.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A eficiência da prática educativa é um dos objetivos a ser alcançado pelos profissionais que se propõem a atuar no campo educacional. Zabala (1998) aponta que esse objetivo pode ser atingido pela consolidação do conhecimento por meio da investigação e de experiências diversas. Com base nisso e distanciando-se da aula tradicional, constitui-se como alternativa a proposta de uma sequência de atividades. Tal sequência é entendida como um “conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p.18). O autor a denomina como sequência didática.

Assim, propõe-se a organização de uma sequência de atividades composta por três tipos de abordagem para um mesmo fenômeno (Figura 1). Para cada tipo de abordagem, apresenta-se sinteticamente a teoria de suporte, uma forma de desenvolvimento e os resultados esperados. As três abordagens se complementam para atingir a compreensão conceitual dos fenômenos pelas equações diferenciais.

Figura 1 - **Esquema da sequência de atividades**



Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Resolver uma situação-problema demanda o desencadeamento do raciocínio, que é feito pelo desenvolvimento de etapas ou passos. As Ciências, em geral, estão envolvidas intrinsecamente nos problemas com equações diferenciais. No seu estudo, geralmente, a lei física é dada no enunciado do problema, e a sua expressão matemática é feita com os dados apresentados ou apontados na questão e os conhecimentos de ciências como a Física, a Química, entre outras. Desenvolve-se, assim, uma expressão matemática que aborda um fenômeno e envolve a resolução de uma equação diferencial, pela interpretação das condições iniciais ou de contorno para determinação dos coeficientes e constantes de integração.

O fenômeno gera uma situação na qual se configura uma problematização, isto é, a determinação de um problema, a ser delineado com seus parâmetros definidores, e que possui, muitas vezes, um modelo para mostrar a solução ou para sua manifestação. Mas uma situação somente pode ser concebida como um problema "na medida em que exista um reconhecimento dela, como tal, e na medida em que não dispomos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la". (POZO, 1998, p.16).

Com isso, para a resolução de problemas, recorre-se a Polya (1994), que determina que haja quatro fases para a resolução de problemas: i) entender o problema; (ii) fazer um plano; iii) executar o plano (iv); e fazer uma retrospectiva, relacionando o resultado com as condições dadas, para uma compatibilização. Esse mesmo autor afirma que, para o estudante garantir habilidade na resolução de problemas, é necessário que ele consiga identificar elementos padrões possíveis de serem transferidos para auxiliar na resolução de novos problemas em situações análogas. Ou seja, "não basta alcançar um resultado prático, é preciso atribuir-lhe significado teórico para que ele possa ser generalizado como um princípio aplicável a novas situações" (POLYA, 1994, p. 75). Nesse devir, é possível produzir conhecimentos sobre conceitos e/ou objetos, sejam estes de caráter matemático ou de outras ciências.

REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E DIVERSIFICAÇÃO DE REPRESENTAÇÕES

Utilizando-se a resolução de problemas, seja no interior da própria matemática, o que se denomina de intramatemática, ou em campos não especificamente matemáticos das ciências – chamados interciências –, o foco da proposta metodológica baseia-se em múltiplas representações.

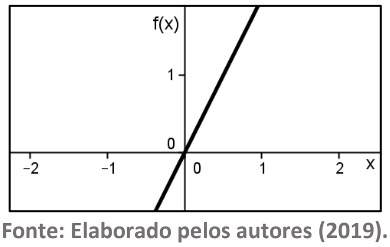
Aprender matemática, segundo Duval (2009), é desenvolver atividades cognitivas que requerem sistemas variados de expressão e de representação: (i) em linguagem natural; (ii) geométrica/figural, por meio de figuras geométricas planas ou espaciais; (iii) dos sistemas de escrita e cálculo, por meio de números, símbolos e escrita algébrica; (vi) e do registro gráfico, com o uso de sistemas coordenados. Toma-se como exemplo uma função polinomial do primeiro grau:

Registro em linguagem natural: Uma regra que relaciona dois números.

Registro em sistema de escrita e cálculo: f(x) = 2x

Registro gráfico: Com auxílio do *software* GeoGebra (Figura 2).

Figura 2 **– Esboço da função f(x) = 2x**



Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

A compreensão conceitual, a diferenciação e o domínio das distintas formas de raciocínio, as interpretações hermenêuticas e heurísticas dos enunciados são intimamente ligadas à mobilização de articulações quase imediatas de muitos registros de representação semiótica. (DUVAL, 2009, p.20).

Ao propor uma metodologia de resolução de problemas de fenômenos com equações diferenciais, integra-se a esta a diversificação de representações. Entretanto, para efetividade da compreensão do sistema de representação, é necessária a coordenação dos diversos registros utilizados para melhor interpretação gráfica, entendimento da lei de formação dos fenômenos e análise dos padrões na escrita numérica ou em modelos estatísticos.

Em Stewart (2013), tem-se que, na resolução dos problemas, são analisadas as situações ou os contextos da elaboração dos modelos matemáticos, com 4 (quatro) distintas representações desses modelos, o que o autor chama de “Regra dos quatro”: (i) visual, pelo gráfico/geométrico ou diagrama; (ii) numérico, por tabelas ou séries numéricas; (iii) algébrico, pela equação; (iv) e verbal, pelo discurso escrito ou falado.

O que se percebe são as múltiplas representações de um mesmo fenômeno. Integrando essas duas propostas, constrói-se a metodologia da resolução de problemas com equações diferenciais apresentada com diversidade de representações e tecnologia de informação e comunicação. Um dos focos, porém, está na compreensão dos conceitos que se apresentam implícitos às representações, sejam elas em linguagem natural, gráfica ou simbólica.

TECNOLOGIAS DIGITAIS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO – TDIC’S

O repensar da prática educativa direciona-se para a emergência de novas bases sobre as quais possa ser apoiada e reformulada, a partir do desempenho do professor não mais como agente ativo e exclusivo da transmissão de conteúdo. Na mediação do saber e dos métodos de estudo, estabelecem-se os campos para a atuação no processo ensino-aprendizagem. Dessa forma, os instrumentos tecnológicos tornam-se meios para obtenção de resultados e avanços para a abordagem de conteúdos e estudo.

A mediação para tratamento da informação é realizada com as tecnologias a partir de um modelo digital, o qual é explorado com interação. Em Moran (2010, p.44), tem-se que “o computador se converte em um meio de comunicação, a última grande mídia, ainda em estágio inicial, mas extremamente poderosa para o ensino-aprendizagem”. A partir dessa informação, entende-se que os recursos tecnológicos em que o uso é orientado ao objeto podem favorecer os instrumentos de simulação.

A manipulação dos parâmetros e a simulação de todas as circunstâncias possíveis dão ao usuário do programa uma espécie de intuição sobre as relações de causa e efeito presentes no modelo. Ele adquire um conhecimento, por manipulação do sistema modelado, que não se assemelha nem a um conhecimento teórico, nem a uma experiência prática (LÉVY, 1993, p.122).

Em relação ao trabalho com as equações diferenciais, a informática vem trazendo suporte fundamental com *softwares* e aplicativos para a representação de gráficos, executando cálculos numéricos e resolvendo equações. Ela facilita a construção de redes com o desenvolvimento da habilidade de visualização tão necessária para analogias dos modelos.

MODELOS E MODELAGEM

Considera-se como modelo “um conjunto de símbolos e relações que representam de alguma forma o objeto estudado" (BASSANEZZI, 2014, p.20). O modelo matemático, que pode ser expresso por símbolos aritméticos, geométricos e/ou algébricos, representa o fenômeno estudado em uma situação-problema, e a partir dele pode-se chegar a conclusões e/ou análises quantitativas e/ou qualitativas. Em Laudares et al. (2017), um modelo matemático pode ser representado de quatro formas diferentes: numérica, algébrica, verbal ou geométrica. Nesses aspectos, uma equação diferencial, em casos específicos, pode ser compreendida como um modelo matemático para certas situações-problema.

SÍNTESE DA METODOLOGIA PROPOSTA

A proposta metodológica neste trabalho busca diversificar a criação de habilidades do estudante, fugindo de procedimentos operacionais do cálculo na resolução de equações diferenciais em problemas aplicados, que exigem não só a determinação da solução, mas a capacidade de análise da sua variação pelos parâmetros e as condições estruturantes da situação. As três abordagens da sequência didática que definem a proposta metodológica são apresentadas a seguir:

1ª ABORDAGEM - APLICAÇÃO FÍSICA USANDO CAMPO DE DIREÇÕES

Essa abordagem tem como base teórica a diversidade de representações pelos registros semióticos de Duval (2009), as múltiplas representações de Stewart (2013) e a resolução de problemas segundo as fases de Polya (1994). Tem-se a construção do campo de direções e a análise gráfica do fenômeno, como exemplo o resfriamento de um corpo, segundo a Lei de Newton (aplicação física usando campo de direções).

Muitos fenômenos são analisados pelos seus modelos de equações diferenciais. No que se refere aos problemas de fenômenos físicos, os autores Anton, Bivens e Davis (2007) sustentam a ideia de que as grandezas presentes variam com relação a outras, do modo como a "[...] velocidade de um foguete, a inflação de uma moeda, o número de bactérias de uma cultura, a intensidade de um tremor de um terremoto, a voltagem de um sinal elétrico [...]" (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p.165). Esses são exemplos de variáveis presentes em problemas de fenômenos físicos. Para compreensão do desenvolvimento/comportamento do fenômeno, a análise gráfica de suas equações contribui significativamente. Como primeira abordagem, faz-se uma análise gráfica pelo campo de direções.

1º passo: Traçar o campo de direções (construindo tabelas)

2º passo: Identificar as prováveis curvas que poderão representar o fenômeno

3º passo: Identificar a curva pelas condições dadas no problema

Problema de resfriamento de um corpo no ar – Lei de Newton: "A velocidade de resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e do ambiente", dada, por exemplo, pelas equações diferenciais:

$$\frac{dT}{dt} = -0{,}0347(T - 20) \qquad ou \qquad \frac{dT}{dt} = -0{,}0347T + 0{,}694$$

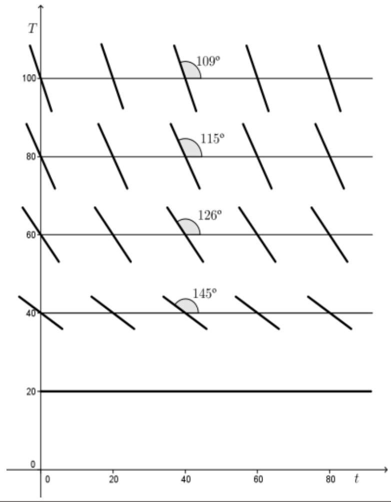
A temperatura (T) do ambiente é de 20 °C, e a temperatura inicial do corpo é de 100 °C e resfria (t), em 20 minutos, para 60 °C, e em 60 minutos, para 30 °C.

Estude a variação da temperatura em função de um tempo crescente.

1º passo: Construção das tabelas para $\frac{dT}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 20$

Figura 3 **– Construção do campo de direções**

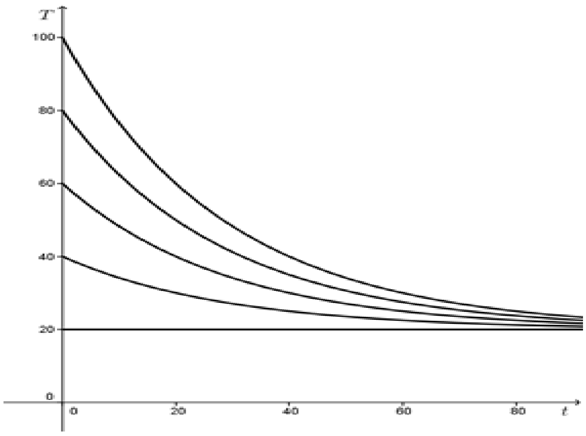
t	20	40	60	80
T	100	100	100	100
$tg\alpha = \frac{dT}{dt}$	$-2{,}776$	$-2{,}776$	$-2{,}776$	$-2{,}776$
α	109°	109°	109°	109°
T	80	80	80	80
$tg\alpha = \frac{dT}{dt}$	$-2{,}082$	$-2{,}082$	$-2{,}082$	$-2{,}082$
α	115°	115°	115°	115°
T	60	60	60	60
$tg\alpha = \frac{dT}{dt}$	$-1{,}388$	$-1{,}388$	$-1{,}388$	$-1{,}388$
α	126°	126°	126°	126°
T	40	40	40	40
$tg\alpha = \frac{dT}{dt}$	$-0{,}694$	$-0{,}694$	$-0{,}694$	$-0{,}694$
α	145°	145°	145°	145°



Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

2º passo: A partir do campo de direções esboçado, as prováveis curvas do fenômeno (Figura 4) são:

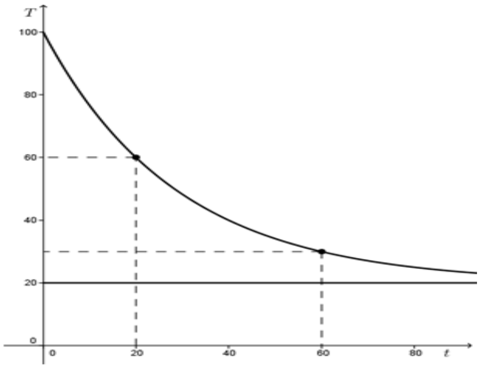
Figura 4 **– Prováveis curvas do fenômeno**



Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

3º passo: Para a condição $t = 0$ minutos e $T = 100$ °C, a curva representativa (Figura5) é:

Figura 5 **– Curva para t = 0 min e T = 100 °C**



Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

Análise: A temperatura varia de modo decrescente, tendendo a 20 °C, partindo da temperatura inicial do corpo, de 100 °C. A derivada é negativa e o ângulo das inclinações das retas tangentes tende a zero radianos, isto é, a inclinação tende, cada vez mais, a ser paralela ao eixo das abscissas (com o tempo crescente).

A análise da variação/comportamento da temperatura em função do tempo foi realizada a partir do campo de direções, com a derivada, sem se conhecer a equação analítica (algébrica) da temperatura em função do tempo. Utilizando uma das representações de solução para EDO, por uma análise gráfica, obtém-se o comportamento da solução da situação-problema.

2ª ABORDAGEM - RESOLUÇÃO DE PROBLEMA USANDO MODELO DAS EQUAÇÕES E DE GRÁFICOS

Essa abordagem parte da resolução de problemas com a introdução e a interpretação de modelos na sua forma de equações e de gráficos, buscando as múltiplas representações de Stewart (2013) e as definições de modelos apontadas por Bassanezi (2014). Também se observa a perspectiva da análise de passos, mas com a procura da síntese no reexame da solução completa, segundo Polya (1994).

Com esse referencial, a resolução de problemas proposta nesta abordagem tem uma análise do modelo do fenômeno em estudo nas suas várias representações: equações, gráfico e linguagem natural descritiva.

A metodologia proposta se faz a partir de uma sequência com esquema próprio e num quadro para a análise do problema. O enunciado contém os dados e as questões, sendo interpretado por passos, como:

1º Passo: Matematização da lei física;

2º Passo: Constantes dadas – Substituição na equação do fenômeno;

3º Passo: Condições iniciais ou de contorno;

4º Passo: Resolução da equação diferencial do modelo;

5º Passo: Cálculos solicitados nos problemas: explicitar o que se pede;

6º Passo: Modelo das equações do fenômeno;

7º Passo: Modelo dos gráficos do fenômeno;

Ens. Tecnol. R., Londrina, v. 3, n. 2, p. 247-267, jul./dez. 2019.

8º Passo: Descrição sintética do fenômeno num pequeno texto.

Essa estrutura pode ser considerada um padrão a ser seguido, porém modificado/adaptado de acordo com a natureza do fenômeno estudado. Nessa abordagem, o enunciado é apresentado analiticamente, sendo separados os dados e as questões em itens, que são convertidos em PASSOS para resolução: cada item corresponde a um PASSO.

O problema – Termodinâmica: Lei de Resfriamento de Newton (já apresentado na primeira abordagem) – foi analisado por três representações de modelos: das equações, dos gráficos e de descrição verbal do procedimento do fenômeno.

Problema de Valor Inicial – PVI e Problema de Valor de Contorno – PVC

Dados:

(I) A velocidade de resfriamento/aquecimento de um corpo num ambiente é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e do ambiente;

(II) A temperatura do ar é constante e igual a 20 °C;

(III) O corpo se resfria, em 20 minutos, de 100 °C a 60 °C;

Questões:

(IV) Determine a variação da temperatura em relação ao tempo;

(V) Determine o tempo para a temperatura atingir o valor de 30°C;

(VI) Determine os modelos de equações do fenômeno:

Podemos ter: $\frac{dT}{dt} = g(T)\ ou\ ainda\ \frac{dT}{dt} = f(t);\ T = f(T);$

(VII) Esboce o gráfico dos modelos;

(VIII) Descreva num pequeno texto o fenômeno, comparando os gráficos e as equações.

Interpretação do enunciado: Os passos da resolução do problema estão de acordo com os itens do enunciado.

1º Passo: Matematização da lei física – Identificação das variáveis

T: variação da temperatura do corpo – Variável dependente

t: variação do tempo – Variável independente

Velocidade de resfriamento: $\frac{dT}{dt}$ (velocidade instantânea = derivada)

T_a: temperatura do ambiente considerada constante durante o desenvolvimento do fenômeno

K: constante de proporcionalidade.

Interpretando o item 1 do enunciado, a lei física pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)}$$

Ens. Tecnol. R., Londrina, v. 3, n. 2, p. 247-267, jul./dez. 2019.

1ª ETAPA: Modelo das equações: Constituído a partir de:

(1) Velocidade de resfriamento: $\frac{dT}{dt}$ em função da temperatura T; g = $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{T})$;

(2) Velocidade de resfriamento: $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}}$ em função do tempo de t; f = $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{t})$;

(3) A temperatura do corpo em função do tempo: $T = T(t)$. Solução da Equação Diferencial que representa a lei de resfriamento/aquecimento.

2º Passo: Substituição de T_a por 20 °C

Como T_a (temperatura ambiente) é constante durante todo o tempo da variação da temperatura, podemos substituir seu valor dado no enunciado, ficando a lei de resfriamento:

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = k(T - 20)}$$

3º Passo: Expressão do tempo e da temperatura com as variáveis

Condição inicial (para o tempo zero, isto é, zerar o cronômetro):

$t = 0$ minuto $\Rightarrow \quad T = 100\,^oC$

Condição de contorno (para o tempo após o instante inicial):

$t = 20$ minutos $\Rightarrow \quad T = 60\,^oC$

4º Passo: Determinação da variação da temperatura em relação ao tempo

Processo: Resolver a equação diferencial que define a lei física. (Método utilizado: separação de variáveis). Substituindo na lei física apresentada, chega-se que: $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{K}(\mathrm{t} - 20) \Rightarrow \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{T}-20} = \mathrm{Kdt}$.

Integrando ambos os lados: $\int \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{T}-20} = \mathrm{k} \int \mathrm{dt} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \log_{\mathrm{e}}|\mathrm{T} - 20| = \mathrm{kt} + \log_{\mathrm{e}}|\mathrm{c}_1| \Longrightarrow$

Tomamos $\log_e|c_1|$ao invés de c_1 para trabalhar com o logaritmo. Fazendo c_1 como uma constante, logo $\log_e|c_1|$é também uma constante.

$\Longrightarrow \ln|\mathrm{T} - 20| - \ln|\mathrm{c}_1| = \mathrm{kt} \quad (*) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \ln\left|\frac{\mathrm{T}-20}{\mathrm{c}_1}\right| = \mathrm{kt} \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{T}-20}{\mathrm{c}_1} = \mathrm{e}^{\mathrm{kt}} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{T} = \mathrm{c}_1\mathrm{e}^{\mathrm{kt}} + 20} \quad (**)$

Aplicando as condições dadas (inicial e de contorno), determinaremos c_1 e k. O número de condições dadas é o mesmo número de constantes de integração mais o número de parâmetros a serem determinados após a integração. Neste problema tem-se uma constante de integração c_1 e mais um parâmetro k.

Então, dois valores devem ser determinados, e por isso tem-se: condição inicial e de contorno. Substituindo em (**) temos:

$$\text{Para } \begin{cases} \mathrm{t} = 0 \\ \mathrm{T} = 100 \end{cases}, \text{temos: } \; 100 = \mathrm{c}_1\mathrm{e}^{0.\mathrm{t}} + 20 \Longrightarrow \quad \mathrm{c}_1 = 80$$

A equação (**) ficará: $T = 80e^{kt} + 20$

$$Para \begin{cases} t = 20 \\ T = 60 \end{cases}, temos \quad 60 = 80e^{20.k} + 20 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 40 = 80e^{20.k} \Longrightarrow \frac{40}{80} = e^{20k} \Longrightarrow \frac{1}{2} = e^{20k}$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados, temos:

$\log_e \frac{1}{2} = 20k \log_e e$, logo $k = \frac{\log_e 0{,}5}{20}$

Usando a calculadora encontraremos: $k \cong -0{,}0347$ (aproximação).

Determinados a constante c_1 e o parâmetro k, a solução para a lei física apresentada, onde a função solução é T = T(t), por aproximação, é:

$$\boxed{T = 80e^{-0{,}0347t} + 20}$$

5º Passo: Cálculo do tempo para temperatura $T = 30\ ^oC$

Substituir $T = 30$ na função solução encontrada $T(t) = 80e^{-0{,}0347t} + 20$ e calcular o valor de t. Temos, então, que:

$$30 = 80e^{-0{,}0347t} + 20 \quad \Rightarrow \quad t = 59{,}93 \text{ minutos} \cong \ 60 \text{ minutos.}$$

6º Passo: Modelos de Equações do fenômeno

Velocidade de resfriamento em função da temperatura, isto é, escrevendo $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}}$ como uma função que depende da temperatura, isto é, g = $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{T})$;

Substituir $\mathrm{k} = -0{,}0347$ na equação da lei física ou, neste caso, a lei de resfriamento (note que é uma Equação Diferencial Linear):

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = -0{,}0437(T - 20)} \Rightarrow \boxed{\frac{dT}{dt} = -0{,}0437T + 0{,}697} \quad (1)$$

Observação: Essa Equação Diferencial é denominada autônoma, porque está em função da variável dependente.

Velocidade de resfriamento em função do tempo (t), isto é, escrevendo $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}}$ como uma função que depende do tempo, isto é, f = $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{t})$;

Derivar a equação da temperatura em função do tempo:

$$\boxed{T = 80e^{-0{,}0347t} + 20} \Rightarrow \boxed{\frac{dT}{dt} = -2{,}776e^{-0{,}0347\,t}} \quad (2)$$

Temperatura em função do tempo, isto é, uma função T = T(t):

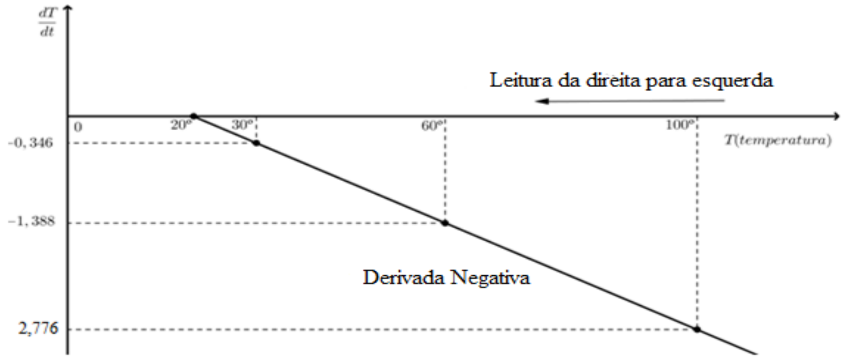
$$\boxed{T = 80e^{-0{,}0347t} + 20} \quad (3)$$

2ª ETAPA: Modelo dos gráficos

São traçados três gráficos correspondentes aos modelos das equações da etapa anterior. Considera-se interessante que os gráficos sejam esboçados numa mesma página para facilitar a análise do fenômeno em estudo.

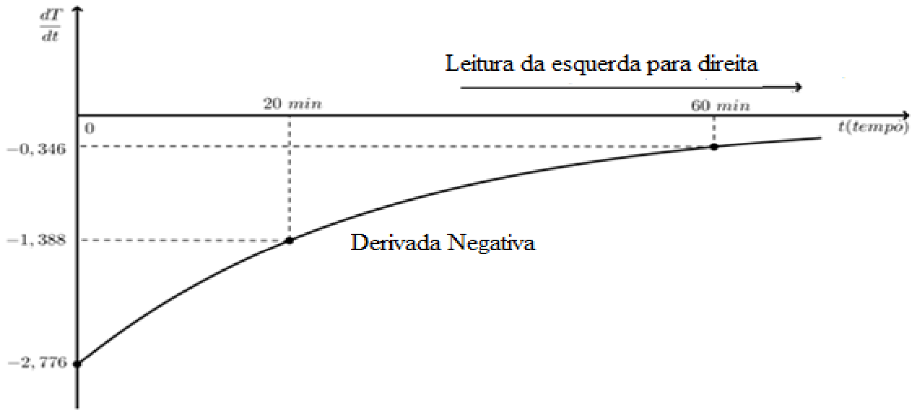
7º Passo: Esboço dos gráficos do fenômeno (Figura 6)

Figura 6 – Equação (1): $\frac{dT}{dt}(T) = -0,0437T + 0,697$



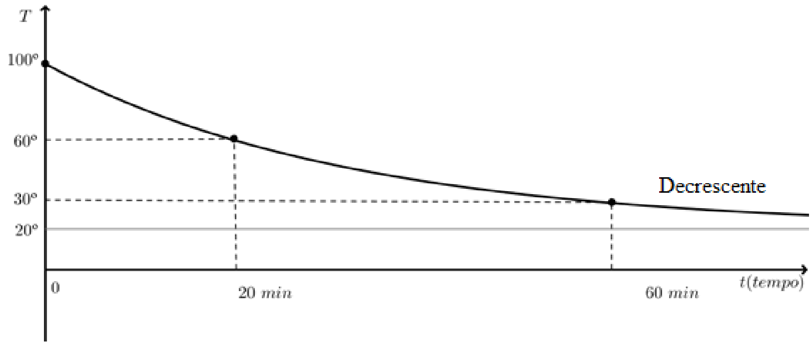
Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

Figura 7 – Equação (2): $\frac{dT}{dt}(t) = -2,776e^{-0,0347\,t}$



Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

Figura 8 – Equação (3) Solução da EDO, isto é, T = T(t)



Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

3ª ETAPA: Descrição do modelo

Para facilitar a descrição do comportamento do fenômeno, são propostas questões a serem respondidas, com o apoio das equações e dos gráficos.

8º Passo: (a) As respostas das seguintes questões dão suporte à compreensão do comportamento do fenômeno estudado:

1) Porque o gráfico $\frac{dT}{dt}$ (Equação 1) é uma reta?

2) Quando o tempo cresce no gráfico $\frac{dT}{dt}$ (Equação 2), o que ocorre com a velocidade de resfriamento?

3) Analise os gráficos de $\frac{dT}{dt}$ (Equação 1) e $\frac{dT}{dt}$ (Equação 2) quanto à variação de sinal (positivo/negativo) e de valores. Obs: O sentido de leitura do gráfico $\frac{dT}{dt}$ (1) é da direita para a esquerda, pois a temperatura inicial de 100 °C diminui.

4) Qual o valor da velocidade de resfriamento no tempo inicial nos gráficos da Equação 1 e da Equação 2.

5) Qual o comportamento da temperatura em relação ao tempo, no gráfico da Equação 3, para um tempo crescente? Obs: crescimento/decrescimento e derivada positiva/negativa.

6) Nos gráficos, qual a temperatura e a velocidade de resfriamento para um tempo de 20 minutos?

7) Determine uma tendência para o valor mínimo da temperatura para um tempo crescente.

8) Verifique a temperatura no tempo inicial, dada no enunciado, com respectivos valores no gráfico de temperatura e tempo da Equação 3. O que se pode dizer sobre a compatibilidade dos dados do enunciado com os dos resultados encontrados?

(b) A partir do seu entendimento sobre o comportamento do fenômeno estudado, escreva um texto comparando os gráficos e as equações.

Esse conjunto busca subsidiar o estudante na produção de um texto, que pode ser em língua natural, sem utilização de simbologia, para construir uma síntese sobre a compreensão do problema, o que comprova o entendimento do fenômeno em estudo.

Nesta abordagem, utilizou-se a análise dos modelos, numa variação da metodologia de Resolução de Problemas sugerida por Polya (1994). Porém, esbarra-se nas variadas representações gráficas para um mesmo fenômeno e em representações algébricas, aproximando-se de Stewart (2013) e Duval (2009). A redação do texto traz concepções de Stewart (2013), pois o aluno exprime, na linguagem verbal e/ou natural, as compreensões e os elos estabelecidos durante a abordagem do modelo e as suas várias representações. Segundo Bazanessi (1998), um modelo matemático traz as informações, as quais devem ser refletidas e analisadas para serem transformadas em conhecimento.

3ª ABORDAGEM

USO DA TECNOLOGIA DE INFORMAÇÃO – *SOFTWARE*

Nesta abordagem são introduzidos elementos da informática educativa. Nesse contexto, Borba (2001), traz reflexões para questionar os diferentes tipos de

Ens. Tecnol. R., Londrina, v. 3, n. 2, p. 247-267, jul./dez. 2019.

tecnologia a partir de lápis e papel na definição de múltiplas mídias. Entende-se que as tecnologias podem proporcionar mediações pedagógicas, segundo Moran (2000), para dar suporte ao estudante em experimentações e simulações. Liberados dos cálculos operacionais e dos traçados dos gráficos, a cargo dos *softwares*, o estudante pode desenvolver suas habilidades de análise e tentar fazer simulações, pela facilidade de diversificação de informações pela mídia computacional.

O desenvolvimento desta abordagem parte do mesmo problema das duas primeiras abordagens – resfriamento de um corpo –, mas com o uso do *software* MAXIMA como recurso para analisar e resolver as equações e plotar os gráficos. Nesta abordagem faz-se uma análise dos modelos das equações e dos gráficos. Segundo Duval (2009), o trabalho com variadas representações melhora a exploração do fenômeno em estudo.

Para facilitar o uso do *software*, as atividades são acompanhadas da sintaxe necessária para a realização dos comandos.

Enunciado: Termodinâmica – Lei de Resfriamento/Aquecimento de Newton.

A velocidade de resfriamento de um corpo no ar é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e o ar. A constante de proporcionalidade é igual a -0,0347. Se a temperatura do corpo no instante inicial é de 100 °C, analise graficamente o fenômeno, a partir da equação diferencial definidora do modelo e de suas derivadas. $\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$, sendo k = constante de proporcionalidade; Ta = temperatura ambiente; T = temperatura do corpo.

1ª etapa: Resolução da Equação Diferencial com PVI

Seja a equação da velocidade de resfriamento sendo: T = temperatura; t = tempo: $\frac{dT}{dt} = -0{,}0347(T - 20)$, alimente o *software* com a seguinte equação:

ED:‘diff(T,t)=-0.0347*(T–20);

Para resolver a equação diferencial com PVI, digite o seguinte comando:

resoleq: ode2(ED,T,t);

Seja a condição inicial: $t = 0\ \text{min} \rightarrow T = 100\ °C$. Para utilizá-la, digite:

ic1(resoleq, t = 0, T = 100)

A solução é dada:

$$T = 20 + 80e^{-\frac{347}{10000}t} \quad \text{ou} \quad T = e^{-0{,}0347t}(20e^{0{,}0347t} + 80)$$

Para derivar a função temperatura em relação ao tempo, utiliza-se o seguinte comando

define(df1(t),diff((20+80*%e^(–0.0347*t)),t,1));

Para o cálculo de derivada, utilize o commandodiff sem apostrófo (‘)

A derivada da temperatura em relação ao tempo $\frac{dT}{dt}$ é dada, então, por:

$$df1(t) := -2.776 * \%e\hat{}(-0.0347 * t)$$

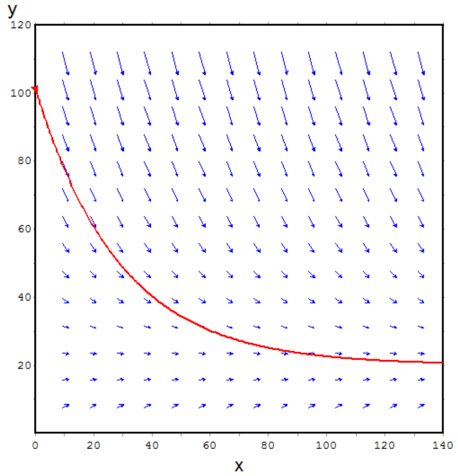
2ª etapa: Análise gráfica do modelo

Primeiro gráfico: solução particular para a condição t = 0 min e T = 100 °C é dada por:

```
Load[plotdf(-0.0347*(y–20)],[x,0,140],[y,0,120];
```

Clique no ponto (0, 100) para plotar a curva da solução particular para T = 100 °C e t = 0

Figura 9 – Solução para condição t = 0 min e T = 100 °C

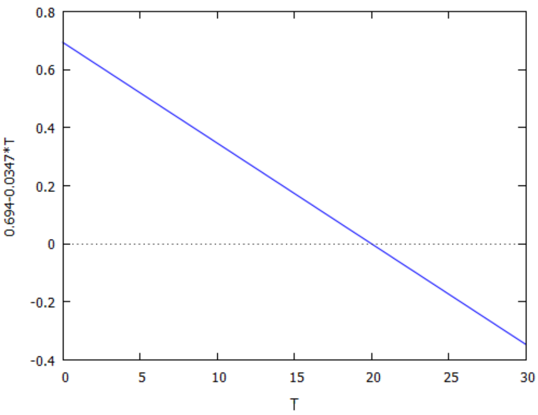


Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

Segundo gráfico: $\frac{dT}{dt}$ em função de T: $\frac{dT}{dt} = -0{,}0347T + 0{,}6940$. (observe que o gráfico é uma reta, pois $\frac{dT}{dt}$ varia linearmente com T).

```
plot2d([–0.0347*T+0.694],[T,0,30]);
```

Figura 10 – Plotagem $\frac{dT}{dt} = -0{,}0347T + 0{,}6940$



Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

Observação: Verifique que a temperatura varia de 100 °C a 20 °C. Analise no primeiro gráfico, no eixo vertical, que: 20 °C $<$ T $\leq$ 100 °C.

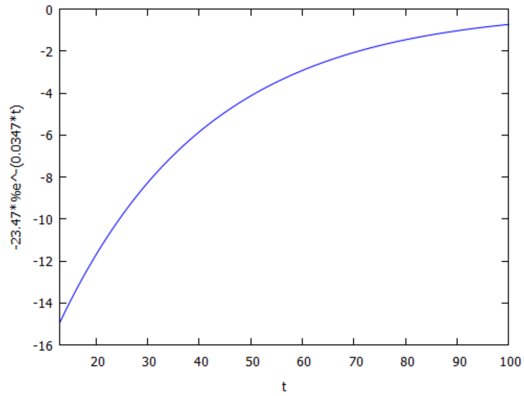
Ens. Tecnol. R., Londrina, v. 3, n. 2, p. 247-267, jul./dez. 2019.

Terceiro gráfico: $\frac{dT}{dt}$ em função de t, isto é: $\frac{dT}{dt} = -\frac{2347}{100}e^{-\frac{347}{10000}t}$

Observação: Atenção com a variação do tempo: apesar de ser sempre positiva, para que o eixo negativo fique posicionado abaixo é necessário adequar a variação de t. Dependendo do valor de t, o eixo negativo fica posicionado acima.

plot2d([–23.47*%e^(–0.0347*t)],[t,13,100]);

Figura 11 – Plotagem $\frac{dT}{dt} = -\frac{2347}{100}e^{-\frac{347}{10000}t}$

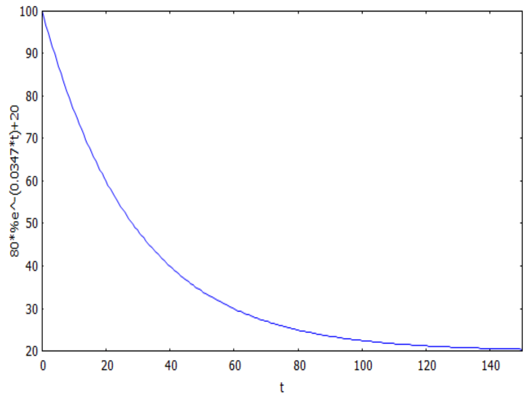


Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

Quarto gráfico: T em função de t, isto é: $T = 20 + 80e^{-0.0347t}$

plot2d([20+80*%e^(–0.0347*t)],[t,0,150]);

Figura 12 – Plotagem $T = 20 + 80e^{-0.0347t}$



Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

3ª etapa: Variação de parâmetros

Nesta etapa, o estudante tem a possibilidade de variar os valores do parâmetro correspondente à temperatura do ambiente e/ou das condições iniciais e de contorno. Com isso, atende ao que preconiza Lévy (1993), que é a realização, a partir de recursos tecnológicos, de simulações e análises do comportamento de fenômeno para os diferentes valores. Frente a isso, indica-se refazer o problema dado com os novos valores:

I) Considere as novas condições iniciais apresentadas nos itens a seguir e plote no gráfico de campo de direções as curvas correspondentes às mesmas:

a) t = 0 min ; T = 80 °C ; b) t = 0 min ; T =60 °C ; c) t = 0 min ; T = 40 °C

II) Considerando as condições trabalhadas no item anterior, calcule a tendência da temperatura quando o tempo cresce indefinidamente, isto é, $\lim_{t \to \infty} T$.

III) Verifique que a derivada $\frac{dT}{dt}$ é sempre negativa, porque a função T = T(t) é decrescente.

IV) Analise a variação da temperatura T em função da derivada $\frac{dT}{dt}$. Se T decresce, o que se pode afirmar sobre o valor de $\frac{dT}{dt}$?

Variando a temperatura ambiente

V) Supondo que a temperatura ambiente seja T = 30 °C, determine a equação $\frac{dT}{dt}$ e plote o gráfico do campo de direções para esse novo valor de T.

VI) Plote as curvas da temperatura com T = 30 °C (ambiente) para as condições iniciais:

a) t = 0 min ; T = 80 °C ; b) t = 0 min ; T = 60 °C ; c) t = 0 min ; T = 40 °C

4ª etapa: Aquecimento do corpo

Nova possibilidade de variação dos dados e realização de simulações pode acontecer se, ao invés de resfriar o corpo, ele for aquecido.

VII) Considere que há aquecimento ao invés de resfriamento:

a) A equação será mudada? (verifique o sinal da constante k). Escreva-a.

b) Plote os gráficos para as condições iniciais, no mesmo gráfico do campo de direções já traçado:

t = 0 min ; T = -10° C ; t = 0 min ; T =-5° C ; t = 0 min ; T = 10°C

Nesta abordagem a tecnologia foi utilizada como recurso para auxiliar o estudante a refletir, analisar, conjecturar, observar, sintetizar e construir conhecimentos, e não apenas traçar e/ou seguir procedimentos mecanizados. De acordo com Lévy (1993) e Moran (2010), a tecnologia contribui de forma significativa como suporte ao processo de ensino-aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As três abordagens que constituíram a sequência metodológica da proposta têm em comum a construção da compreensão conceitual dos fenômenos pelas equações diferenciais, por meio de modelos com diversidade de representações.

Trata-se de uma proposta que traz inovação e que é resultado de pesquisas da matemática superior, especificamente do cálculo diferencial e integral, com resolução de problemas pela aplicação de equações diferenciais. Parte-se da premissa não só da operacionalização da resolução das equações diferenciais, com seus processos de cálculo e uso de algoritmos, e da construção da habilidade de procedimentos pelo estudante, mas da busca de desenvolvimento de habilidades de análise dos conceitos e propriedades de um fenômeno.

A experimentação das fases desta metodologia tem sido realizada, pelos mestrandos e pesquisadores do GRUPIMEM, com sucesso didático. Os objetos das pesquisas que exploram essa proposta se diversificam, por exemplo, com construção e análise de "campo de direções" ou "campo de inclinações", utilizando recurso gráfico e computacional para traçado de curvas e imagens geométricas das equações dos modelos e constituindo recursos para interpretação visual do comportamento dos fenômenos.

Agrega-se também a esta metodologia que os recursos para a plotagem de gráficos, a execução de cálculos numéricos e a resolução de equações simplificam o trabalho operacional e permitem ao estudante e ao professor maior disponibilidade para análise crítica e reflexão para compreensão analítica e sintética de uma situação-problema.

Considera-se que a metodologia pode trazer contribuições significativas em relação ao entendimento dos fenômenos modelados por equações diferenciais e ao desempenho quanto à aprendizagem.

Methodology for diversification of representations of modelled phenomena with Ordinary Differential Equations

ABSTRACT

The article presents a work with ordinary differential equations (ODE) in differentiated approaches. Take it to a physical phenomenon analysis of thermodynamics, works with the problem of cooling of a body, varying your environment temperature maintained at constant temperature (cooling Law of Newton). This proposed a didactic sequence with three different approaches to study the physical phenomena: (1) construction and analysis of the field of directions for graphical representation of solution. (2) Determination of equations models: temperature and rate of temperature variation as a function of time variation. (3) The use of information technology for analysis of the phenomenon. These three approaches have their pillars in problem-solving, semiotic registers, records in multiple representations and the use of information technology in education, building a working methodology with ODE. Where is studied the same situation-problem with different approaches. Work the ODE with this methodology can contribute to student learning.

KEYWORDS: Differential equations. Physical Phenomena. Diversification of presentations. Problem-solving.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. Cálculo. 8 ed. Porto Alegre: Artmed, 2007. v. 1.

BARROS FILHO, Aníbal Ataídes. A resolução de problemas físicos com equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª e 2ª ordem: Análise gráfica como o software Maple. 2012. 228f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2012.

BASSANEZI, Rodney Carlos. Equações diferenciais com aplicações. São Paulo: Harbra, 1988.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Editora Contexto, 2014.

BEHRENS, Maria Aparecida. Projetos de aprendizagem colaborativa num paradigma emergente. In: MORAN, José Manuel; MASSETO, Marcos T.; BEHRENS, Marilda Aparecida (Org.). **Novas tecnologias e mediação pedagógica.** 17. ed. Campinas: Papirus, 2010. p. 67-132.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOYCE, Wiliam; DIPRIMA, Richard**. Equações diferenciais e valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

JAVARONI, Sueli Liberatt. **Abordagem geométrica:** possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais. 2007. 231 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências Exatas, Rio Claro, 2007.

LÉVY, Pierre. **As tecnologias da Inteligência:** O futuro do pensamento na era da informática. São Paulo: Editora 34, 1993.

MIRANDA, Dimas Felipe; LAUDARES, João Bosco; REIS, Júlio Paulo Cabral; FURLLETTI, Saulo. **Equações diferenciais ordinárias e transformadas de Laplace**. Belo Horizonte: Artesã, 2017.

MORAN, José Manuel. Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas. In: MORAN, José Manuel; MASSETO, Marcos T.; BEHRENS, Marilda Aparecida. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. Campinas: Papirus. 2000. p. 11-65.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciências, 1994.

POZO, Jun Ignáco. **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ARTMED, 1998.

STEWART, James. **Cálculo.** São Paulo: Cengage Learning, 2013.

ZIL, Dennis; CULLEN, Michael. **Matemática avançada para engenharia:** equações diferenciais e transformadas de Laplace. Porto Alegre: Bookman, 2009.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul Ltda, 1998.

Recebido: 10 abril 2018.
Aprovado: 11 novembro 2019.
DOI: http://dx.doi.org/10.3895/etr.v3n2.8143.
Como citar:
LAUDARES, J. B.; FURLETTI, S.; REIS, J. P. C. Metodologia para diversificação de representações de um fenômeno modelado com equações diferenciais ordinárias. **Ens. Tecnol. R.**, Londrina, v. 3, n. 2, p. 247-267, jul./dez. 2019. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbqv/article/view/8143>. Acesso em: XXX.
Correspondência:
Saulo Furletti
Instituto Federal de Minas Gerais - Campus Ribeirão das Neves
Rua Taiobeiras, 169, Sevilha (2ª Seção), Ribeirão das Neves, Minas Gerais, Brasil.