Ensino e Tecnologia em Revista

ISSN: 2594-3901

http://periodicos.utfpr.edu.br/etr

Propor e resolver problemas para aprender trigonometria: possibilidades a partir do relógio de sol

Maria Beatriz Back
mariaback@alunos.utfpr.edu.br
https://orcid.org/0009-0005-0486-7490
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) Londrina, Paraná, Brasil.

Andresa Maria Justulin
http://ajustulin@utfpr.edu.br
http://orcid.org/0000-0003-4107-8464
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) Cornélio Procópio, Paraná, Brasil.

Norma Suely Gomes Allevato
normallev@gmail.com
http://orcid.org/0000-0001-6892-606X
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) Londrina, Paraná, Brasil.

RESUMO

O presente artigo tem como objetivo analisar como a proposição de problemas pelos estudantes pode constituir problemas geradores relacionados a razões trigonométricas, em uma aula de Matemática através da Resolução de Problemas. A pesquisa é de cunho qualitativo e contou com a participação de 30 alunos da 2ª série do Ensino Médio. A coleta de dados foi realizada a partir de um elemento disparador envolvendo um vídeo e a construção de um relógio de sol e de um *prompt* que teve o intuito de promover a criação, pelos alunos, de problemas relacionados às razões trigonométricas. Tal objeto de conhecimento ainda não havia sido apresentado aos alunos. Os problemas propostos foram resolvidos pelos próprios estudantes da turma, constituindo-se em problemas geradores na implementação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nessa metodologia, o problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos matemáticos. Durante a criação dos problemas, os alunos utilizaram os dados coletados com o relógio de sol de forma criativa. Alguns focaram apenas nos horários e nos ângulos determinados no relógio, mas a maioria conseguiu avançar, envolvendo medidas de comprimento e proporções nos problemas criados.

PALAVRAS-CHAVE: Proposição de problemas. Resolução de problemas. Razões trigonométricas.

INTRODUÇÃO

A Matemática vai além da simples quantificação ou das técnicas de cálculo, abrangendo também a análise de fenômenos aleatórios, a criação de sistemas abstratos e a inter-relação com fenômenos do mundo real (Brasil, 2018). É crucial que os estudantes sejam capazes de conectar observações empíricas oriundas do cotidiano a representações matemáticas. E, embora a Matemática não se restrinja a isso, é importante que utilizem essas representações para criar e resolver problemas, empregando conceitos, procedimentos e resultados de forma contextualizada, por vezes, até relacionados a situações do dia a dia.

De acordo com Zhang e Cai (2021, p.2), propor problemas matemáticos significa elaborar e apresentar questões dentro do campo da Matemática. Esse processo tem como foco a criação de problemas a partir de situações específicas, tratando-os como os principais objetos de investigação. E conforme Silver e Cai (1996) têm apontado, a partir de estudos empíricos, é importante compreender a relação entre a proposição de problemas e a resolução de problemas. Segundo esses autores, quando os alunos se envolvem na criação de seus próprios problemas, isso se torna um ciclo contínuo: eles tendem a criar mais desafios por conta própria. Além do mais, a habilidade de criar problemas não é separada da habilidade de resolver problemas; na verdade, ela a fortalece. O envolvimento na resolução dos problemas propostos permite aos estudantes avaliar e aperfeiçoar a qualidade dos enunciados (Koichu; Kontorovich, 2013), resultando no aprimoramento dos seus processos de escrita matemática, leitura e interpretação de problemas matemáticos (Cai et al., 2013).

Os dados analisados neste artigo mostram que a proposição de problemas pelos estudantes, embora aqui apresentada com mais destaque na etapa final da Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, conforme Allevato e Onuchic (2021), também pode ser adotada como ponto de partida no processo de aprendizagem pretendida. Nessa abordagem, os próprios estudantes propõem/formulam os problemas que servirão como geradores de conhecimento novo, a partir da reflexão e de sua exploração e resolução. Ao invés de limitarem-se à aplicação de fórmulas prontas, os alunos são convidados a enfrentar situações novas e resolver os problemas (geradores) a partir de seus conhecimentos prévios; esses geradores são, segundo Allevato e Onuchic (2021, p.47), “[...] o ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos”.

É ressaltado por Cai (2022) que cabe aos professores gerarem situações para que os estudantes proponham problemas matemáticos. E para implementar a proposição de problemas em sala de aula, é essencial definir elementos disparadores e prompts. Elementos disparadores são estímulos que incentivam os alunos e oferecem um contexto no qual os estudantes irão criar problemas matemáticos, podendo ser imagens, conjuntos de dados ou problemas pré-existentes que podem ter suas condições alteradas (Possamai; Allevato, 2022). Os prompts, por sua vez, são os comandos dados pelo professor, que orientam a criação dos problemas, como "crie e resolva o problema", "crie um problema difícil" ou "crie quantos problemas você conseguir" (Cai, 2022). A escolha dos elementos disparadores e dos prompts influencia tanto o foco matemático dos alunos quanto o nível de desafio e engajamento na atividade de proposição de

Ens. Tecnol. R., Londrina, v. 9, n. 3, p. 629-645, set./dez. 2025.

problemas; e essa escolha vai depender do objetivo de ensino delineado pelo professor para aquela atividade.

Este artigo tem como objetivo analisar como a proposição de problemas pelos estudantes pode constituir problemas geradores relacionados a razões trigonométricas, em uma aula de Matemática através da Resolução de Problemas. Seu foco está na proposição de problemas, no contexto do ensino desse objeto de conhecimento para alunos de uma turma do 2º ano do Ensino Médio. Foram utilizados como elemento disparador um vídeo e a construção de um relógio de sol, instrumento histórico usado para medir o tempo por meio da posição do Sol, antes da invenção dos relógios mecânicos. O prompt teve o intuito de promover a criação, pelos alunos, de problemas relacionados às razões trigonométricas. A atividade envolveu diversos conceitos e processos matemáticos, como o uso de ângulos de elevação e declinação solar e a aplicação das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para calcular o comprimento da sombra projetada pelo gnômon (haste vertical do relógio) ao longo do dia. Os estudantes foram desafiados a elaborar problemas a partir dessas situações.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A PROPOSIÇÃO COMO ETAPA INICIAL

Investigações sobre Resolução de Problemas no ensino de Matemática ganharam destaque no século XX, a partir dos estudos de Polya (1944), frequentemente referido como o "pai da Resolução de Problemas". Em suas pesquisas, Polya dedicou-se a entender como resolver problemas e desenvolver heurísticas e estratégias pedagógicas que pudessem guiar os alunos a encontrar soluções para esses problemas. Vale destacar que este trabalho foi realizado em um período em que, conforme Lambdin e Walcott (2007), o foco do ensino de Matemática estava na aritmética significativa.

George Polya, em seu livro *How to Solve It: a new aspect of mathematical method*, propôs quatro passos para a resolução de qualquer problema: (1) Compreender o problema, (2) Elaborar um plano, (3) Executar o plano e (4) Verificação da resposta. Polya se preocupou em fornecer orientações sobre como resolver problemas e em indicar heurísticas que levassem a enxergar caminhos para resolver problemas.

Anos mais tarde, agora com o foco na forma como a Resolução de Problemas estaria sendo abordada no e para o ensino da Matemática escolar, Schroeder e Lester (1989) apresentam três abordagens presentes, à época, na sala de aula e nos estudos envolvendo a Resolução de Problemas: (1) ensinar *sobre* Resolução de Problemas, (2) ensinar *para* a Resolução de Problemas, (3) ensinar *através* da Resolução de Problemas. Ensinar *sobre* Resolução de Problemas implicava em trabalhar a Resolução de Problemas como um novo campo teórico, um novo conteúdo a ser estudado e se apoiava nas ideias de Polya ou em variações delas. Ensinar para a Resolução de Problemas considera a Matemática como utilitária, a ser aplicada à resolução de problemas diversos após a apresentação, pelo professor, do conteúdo matemático. Assim, a Matemática é ensinada separada de suas aplicações e anteriormente à atividade de resolução de problemas, em sala de aula. E, por fim, ensinar Matemática *através* da Resolução de Problemas, uma abordagem ainda incipiente ao final da década de 1980 e que consiste, segundo Schroeder e Lester (1989), em considerar o problema como ponto de partida para a aprendizagem matemática. Porém, foi apenas com os *Standards 2000*[1] que a

Resolução de Problemas como um padrão de processo para o ensino e a aprendizagem de Matemática foi fortalecida pela abordagem de *teaching through problem solving* que, no Brasil, passou a ser considerada como uma metodologia de ensino, a partir dos estudos da pesquisadora Lourdes de la Rosa Onuchic.

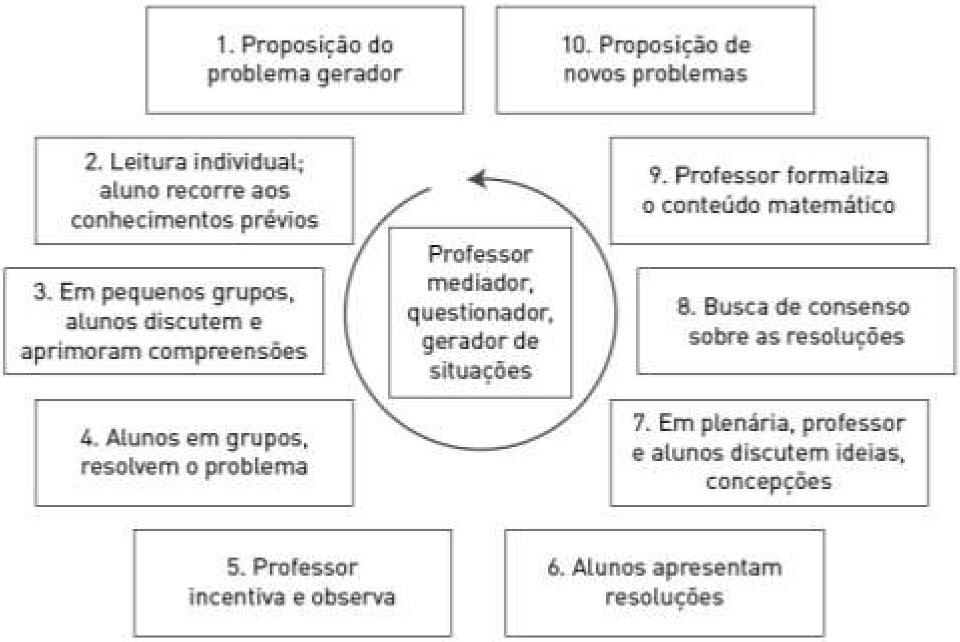
E visando apoiar os professores nessa abordagem, o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), da Unesp, *campus* Rio Claro, com os estudos e trabalhos de Onuchic e Allevato (2011) e Allevato e Onuchic (2021), criou um roteiro como sugestão de etapas a serem seguidas durante uma aula de Matemática utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), conforme a seguir:

- Proposição do problema gerador: momento em que o professor seleciona ou elabora um problema e propõe aos alunos ou aceita um problema proposto pelos próprios alunos.
- Leitura individual do problema: é neste momento que os alunos têm o primeiro contato com o problema. Durante essa fase, cada aluno tem a oportunidade de ler o material atentamente e refletir sobre o conteúdo e uma possível forma de resolução, por conta própria, antes de passar à próxima etapa, de diálogo com os colegas.
- Formação dos grupos e leitura em conjunto: nesse momento, os alunos devem formar pequenos grupos para ler o problema e compartilhar ideias. As dúvidas que surgirem quanto a palavras ou termos desconhecidos podem ser esclarecidas pelo professor ou pelo grupo.
- Resolução do problema nos grupos: os alunos, em um trabalho colaborativo, irão em busca da solução, lançando mão de estratégias de resolução sugeridas pelo grupo.
- Observar e incentivar: o professor deve observar as estratégias de resolução que os alunos estão utilizando, quais conteúdos estão mobilizando, além de incentivar os alunos frente ao problema, sem interferir diretamente e sem fornecer prontamente a resposta.
- Registro das resoluções na lousa: após os grupos avançarem na resolução, um aluno de cada grupo é convidado a representar o grupo, registrando no quadro quais foram as estratégias adotadas pelo seu grupo para resolver o problema gerador proposto;
- Plenária: então, todos os alunos são convidados a analisar e discutir as resoluções apresentadas, além de defenderem seus pontos de vista e escutarem as argumentações feitas pelos outros grupos;
- Busca do consenso: a partir das possibilidades de resolução apresentadas e das discussões desenvolvidas, o professor pode dialogar com a turma e buscar um consenso sobre a (re)solução correta ou mais adequada;
- Formalização do conteúdo: nesta etapa, o professor apresenta uma formalização dos conceitos e procedimentos matemáticos, ou seja, sistematiza os conteúdos envolvidos no problema, planejados por ele para serem abordados naquela aula;

- Proposição e resolução de novos problemas: novos problemas podem ser utilizados para que o professor analise se o que foi trabalhado foi compreendido pelos estudantes, para consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores e/ou aprofundar e ampliar as compreensões em relação ao conteúdo matemático. Configura-se em um momento em que os estudantes também têm a oportunidade de propor problemas criados por eles mesmos, a partir do que vivenciaram nas etapas anteriores. Tais problemas podem, ainda, ser propostos pelos alunos que os criaram aos demais colegas da turma.

Este conjunto de etapas sugeridas, é sintetizado no roteiro apresentado por Allevato e Onuchic (2021), conforme Figura 1:

Figura 1: Etapas da MEAAMaRP



Fonte: Allevato e Onuchic (2021, p. 51).

Conforme poderá ser visto na atividade que gerou os dados analisados no presente artigo, a proposição de problemas na MEAAMaRP pode ser implementada tanto na primeira quanto na décima etapa do roteiro (ou em ambas), assumindo diferentes funções ao longo do processo. Inicialmente, ela pode servir como ponto de partida, quando os alunos são convidados a criar problemas para serem resolvidos por outros. Essa atividade permite ao professor selecionar situações que favoreçam a construção e formalização dos conhecimentos desejados. Por outro lado, a proposição de problemas também pode ser explorada como etapa final da metodologia. Nesse momento, os estudantes, já familiarizados com o problema gerador e com os conceitos trabalhados, são incentivados a modificar suas condições ou a propor novos problemas. Essa prática amplia as aprendizagens e oferece ao professor uma oportunidade de avaliação, ao observar como os alunos mobilizam os conhecimentos adquiridos para criar novas situações matemáticas. (Allevato; Possamai, 2022, p. 168).

Cai e Hwang (2020) consideram a proposição de problemas como uma área emergente de pesquisa em Educação Matemática. Além disso, há uma crescente demanda por sua inclusão nos currículos e práticas escolares como uma forma privilegiada de atividade matemática para a sala de aula (Brasil, 2018; NCTM, 2020). Assim como a resolução de problemas, ela ajuda os estudantes a entenderem conceitos, a desenvolverem raciocínio e a comunicação matemática. (Cai e*t. al.,* 2013; Bonotto, 2013; English, 2020; Koichu e Kontorovich, 2013; Zang e Cai, 2021).

Para implementar a proposição de problemas em sala de aula, é essencial que os professores entendam como é constituída essa atividade e que elementos devem ser considerados. Com relação a isso, ressaltamos que é necessário que sejam cuidadosamente definidos os *elementos disparadores* e os *prompts*. *Elementos disparadores* são estímulos que incentivam e indicam um contexto para os alunos criarem problemas matemáticos, como imagens, conjuntos de dados ou problemas pré-existentes que podem ter suas condições alteradas (Possamai; Allevato, 2022). Os *prompts*, por sua vez, são os comandos dados pelo professor que orientam a criação dos problemas, como "crie e resolva o problema", "crie um problema difícil" ou "crie quantos problemas você conseguir" (Cai, 2022). A escolha dos elementos disparadores e dos *prompts* influencia o foco matemático dos alunos, a natureza e a complexidade dos problemas criados, assim como o nível de desafio e engajamento na atividade de proposição de problemas, entre outros aspectos.

É importante destacar o potencial da proposição de problemas para, também, avaliar o aprendizado dos alunos, pois permite revelar seus pensamentos sobre um determinado conteúdo, procedimento ou conceito matemático, bem como a profundidade de sua compreensão. Assim, dependendo dos objetivos estabelecidos pelo professor para a aula, a proposição de problemas pode ter diferentes finalidades educacionais (English, 2020).

PERCURSO METODOLÓGICO

A presente investigação caracteriza-se como qualitativa, uma vez que visa compreender os processos envolvidos por meio da análise de ações individuais e coletivas. Adota uma perspectiva interpretativa da realidade, em que o pesquisador observa os fenômenos em seu contexto natural (Denzin; Lincoln, 2006). Dessa forma, identificamos nossa pesquisa como qualitativa por buscar compreender as contribuições da Proposição de Problemas, em uma escola pública, com estudantes da 2ª série do Ensino Médio, enquanto desenvolviam atividades de resolução e proposição de problemas em aula de Matemática.

O instrumento para a coleta de dados foi uma atividade de Proposição de Problemas, com várias etapas constituintes, e cujos dados possibilitaram análises, neste artigo, com foco no elemento disparador e no *prompt* da atividade envolvendo a temática das razões trigonométricas. A partir desses elementos, os alunos propuseram problemas que, em seguida, foram resolvidos pelos colegas. A professora escolheu um desses problemas criados pelos alunos para reformular e apresentar à turma como problema gerador do conteúdo de razões trigonométricas. Ou seja, propôs que eles resolvessem seguindo as etapas da MEAAMaRP, conforme proposto por Allevato e Onuchic (2021).

Na primeira aula, os estudantes assistiram a um vídeo sobre relógio de sol; o vídeo contava um pouco da história do relógio de sol e, também, mostrou alguns lugares do mundo em que existem relógios de sol. Em seguida, em grupos, foram orientados a construir seu próprio relógio usando papelão, papel e um palito. Essas duas ações se constituíram no elemento disparador da atividade, ou seja, foram as informações fornecidas como forma de estímulo aos estudantes, fornecendo o contexto para que os estudantes criassem os problemas (Teixeira; Moreira, 2020). Esses elementos disparadores devem estar vinculados a um comando instrucional proposto pelo professor, chamado *prompt* (Cai, 2022); trata-se de uma orientação que direciona a ação a ser realizada pelos alunos para a criação do(s) problema(s).

Figura 2: Construção do relógio de sol

Fonte: Dados de pesquisa.

No caso desta pesquisa, o primeiro *prompt* foi apresentado impresso aos alunos para que primeiro coletassem alguns dados utilizando os relógios de sol que haviam construídos, conforme é mostrado na Figura 3:

Figura 3 :Folha com as orientações entregue aos grupos

Integrantes do grupo: ____

Data: ____/____/____

Como foi produzir o relógio de sol? Vocês sabiam que ele existia? Conheciam essa história?

Após a experiência de observar o relógio projetando sombra para indicar a hora, registre suas percepções:

- Qual foi o horário anotado?
- Qual a dimensão do ponteiro?
- Qual o comprimento da sombra?
- É possível identificar alguma variação angular na sombra projetada?
- Você consegue observar algum formato nessa sombra?

Fonte: Dados de pesquisa.

Além de utilizarem os relógios de sol, os estudantes utilizaram régua, bússola e compasso para se localizar e medir o ângulo e as dimensões do ponteiro e de sua sombra. Isso tudo aconteceu no pátio da escola, para que pudessem ter a incidência solar. Depois que os grupos já estavam com as informações coletadas, receberam o seguinte *prompt*: *Crie um problema fácil e um problema difícil com as informações que vocês obtiveram.*

O objetivo inicial com este *prompt* foi incentivar os estudantes a formularem problemas que envolvessem medidas de ângulos, triângulos retângulos e razão. A partir dessa proposta, escolheu-se um dos problemas criados pelos alunos como ponto de partida para introduzir os conceitos de razão trigonométrica, seno, cosseno e tangente.

Na próxima seção, serão apresentados detalhadamente como aconteceram a proposição e a resolução desses problemas.

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

A pesquisa aconteceu durante 5 aulas em uma turma de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública, com 30 estudantes que foram dispostos em 5 grupos com 6 integrantes cada. Os estudantes foram nomeados por A1, A2, A3, ..., A30, dispostos nos seus respectivos grupos conforme indica o Quadro 1 a seguir:

Quadro 1: Relação dos estudantes e seus grupos

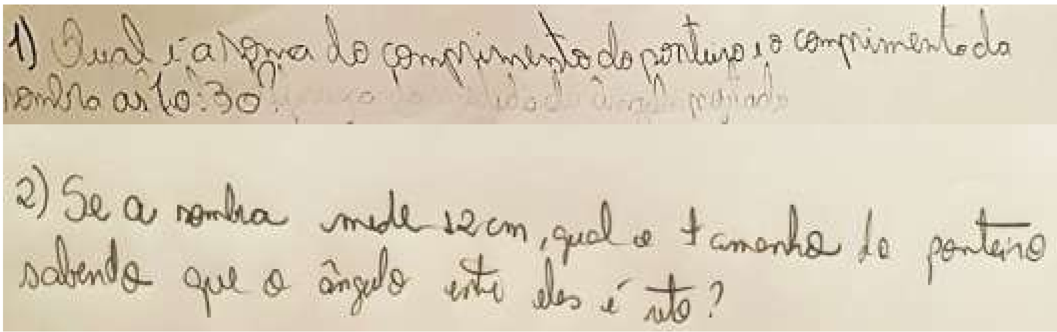
Grupos	Participantes
Grupo 1	A1, A2, A3, A4, A5, A6
Grupo 2	A7, A8, A9, A10, A11, A12
Grupo 3	A13, A14, A15, A16, A17, A18
Grupo 4	A19, A20, A21, A22, A23, A24
Grupo 5	A25, A26, A27, A28, A29, 30

Fonte: Dados da pesquisa.

Após o momento inicial de construção do relógio de sol e a coleta dos dados, cada grupo, a partir do *prompt* apresentado pela professora, criou dois problemas, um fácil e um difícil, conforme suas percepções, mas não resolveu nenhum deles nesse primeiro momento.

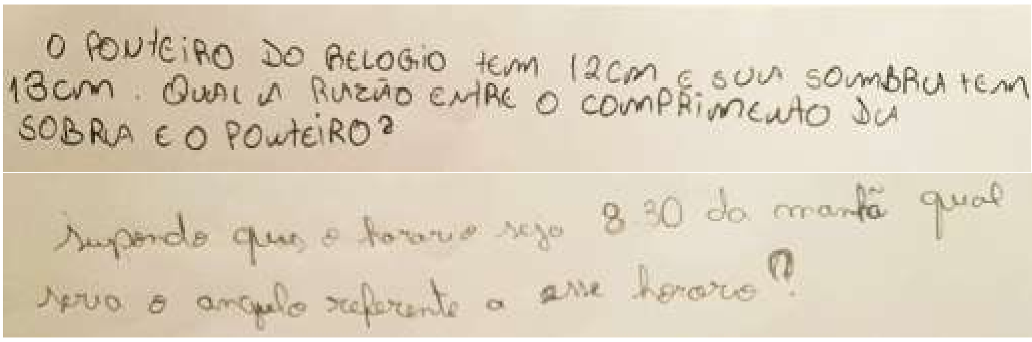
Nas Figuras 4 e 5 serão apresentados os protocolos com alguns problemas criados pelos estudantes, especificamente, por dois grupos:

Figura 4: Problemas criados pelo Grupo 1



Fonte: Dados de pesquisa.

Figura 5: Problemas criados pelo Grupo 2


O PONTEIRO DO RELOGIO tem 12cm e sua sombra tem 13cm. QUAL A RAZÃO ENTRE O COMPRIMENTO DA SOBRA E O PONTEIRO?

Supondo que o horario seja 8 30 da manhã qual serio o angulo referente a esse horario?

Fonte: Dados de pesquisa.

O primeiro problema do Grupo 2 foi escolhido por nós para ser problema gerador. Ele foi reformulado, pois julgamos que possuía potencial para que mais aspectos das razões trigonométricas pudessem ser explorados.

No Quadro 2 estão listados todos os problemas criados pelos grupos e em destaque o problema que escolhemos para reformular:

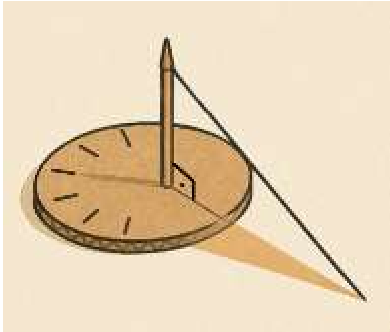
Quadro 2: Problemas propostos pelos grupos

Grupo 1	Qual é a soma do comprimento do ponteiro e o comprimento da sombra às 10h30 da manhã? Se a sombra mede 12 cm, qual o tamanho do ponteiro sabendo que o ângulo entre eles é reto?
Grupo 2	**O ponteiro do relógio tem 12 cm e sua sombra tem 13 cm. Qual a razão entre o comprimento da sombra e o ponteiro?** Supondo que o horário seja 8h30 da manhã qual seria o ângulo referente a esse horário?
Grupo 3	Pensando que o horário seja 15h00 da tarde qual seria o ângulo referente à sombra do ponteiro, que mede 15cm, 3cm a mais que a medida da sombra? Se ao meio-dia a sombra projetada mede 5 cm, às 15h00 mede 12 cm, qual será a medida às 18h00?
Grupo 4	Se a sombra mede meio palmo, qual o tamanho da sombra se o palito fosse duas vezes maior? Qual medida da sombra de um palito em pé e reto às 10h30 cujo a medida do palito é o triplo de 1 e o ângulo é 120°?
Grupo 5	Em uma bela manhã Maria estava fazendo um projeto sobre um relógio onde ela deve de criar um relógio que mostra o horário de acordo com o sol. A professora pediu para ela descobrir o tamanho da sombra com as seguintes informações: No momento do experimento era 10h36 e o ângulo referente à sombra era 120°. Qual o comprimento da sombra projetada sabendo que o palito mede 19,6 cm? Um palito projeta uma sombra de 20 cm se o palito fosse três vezes menor qual seria o tamanho da sombra, considerando que a luz permanece na mesma posição e o ângulo não muda?

Fonte: Dados de pesquisa

Os problemas apresentados nas Figuras 4 e 5 mostram que os grupos focaram nas informações coletadas, como horário, tamanho do ponteiro, ângulo e razão, e citaram o ângulo reto porque perceberam que entre o ponteiro e plano do relógio formava-se um ângulo de 90 graus, conforme a Figura 6:

Figura 6: Representação de um relógio de sol



Fonte: OPENAI (2025)

A reformulação do problema consistiu, especialmente, em acrescentarmos perguntas que levassem os alunos a pensar sobre isso, ou seja, a perceber que os comprimentos do ponteiro (da origem à ponta do palito) e de sua sombra projetada poderiam ser utilizados, via Teorema de Pitágoras, para calcular o comprimento do segmento que unia as extremidades do ponteiro e da sombra. A Figura 7 mostra o problema reformulado:

Figura 7: Problema reformulado

Problema

O ponteiro de um relógio mede 12 cm e projeta uma sombra de 13 cm sobre uma superfície plana. Considerando que o ponteiro e a sombra formam um triângulo retângulo, responda:

a) Qual é a medida do comprimento do lado que conecta a extremidade do ponteiro à extremidade da sombra? Como você descobriu esse comprimento?

b) Encontre a razão entre a medida da sombra do ponteiro e a medida do lado maior desse triângulo.

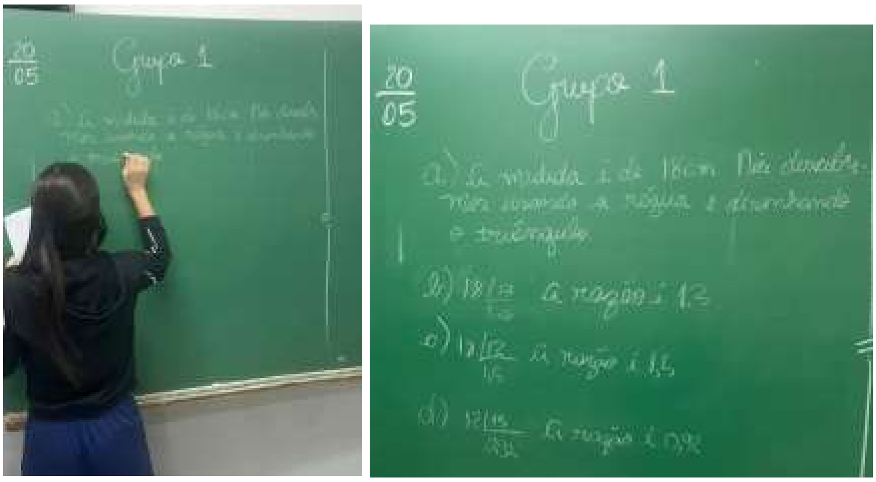
c) Encontre a razão entre a medida do ponteiro e a medida do lado maior desse triângulo.

d) Encontre a razão entre a medida do ponteiro e a medida da sombra do ponteiro.

Fonte: Dados de pesquisa.

Os alunos resolveram o problema em grupos e, como sugerido para a MEAAMaRP, apresentaram suas resoluções e houve uma discussão e formalização do conteúdo a partir dos registros postos no quadro (Figura 8):

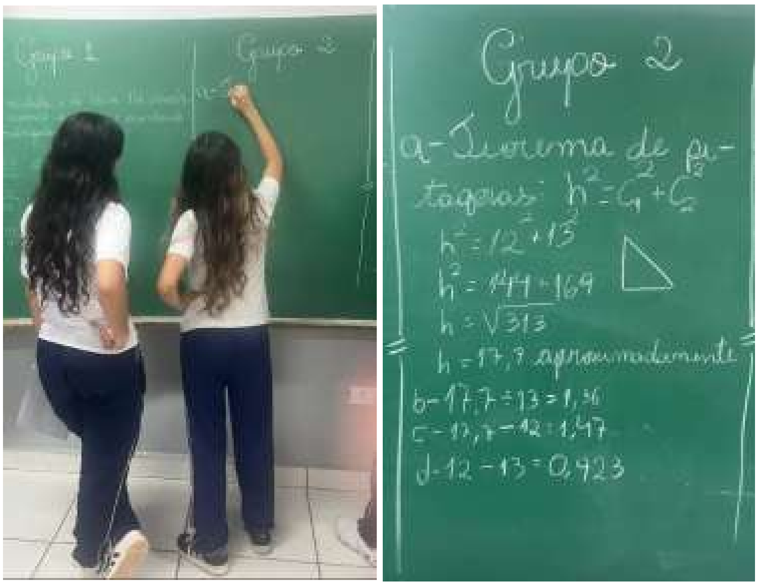
Figura 8: Resolução do grupo 1



Fonte: Dados de pesquisa.

A resolução desse grupo foi interessante porque os alunos utilizaram o desenho no item a para descobrir a medida do terceiro lado, e a resposta foi bem próxima do que seria a resposta correta. No caso, a resposta deles foi uma aproximação do resultado. No item c eles calcularam a razão inversa, então calcularam a razão entre o comprimento do lado maior e o tamanho do ponteiro, ao invés do contrário. Quando foram explicar à turma a resolução, esse erro já foi percebido por eles mesmos e discutimos isso em sala, ou seja, a ordem na escrita dos números importa no caso do cálculo das razões ($\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$).

Figura 9: Resolução do grupo 2

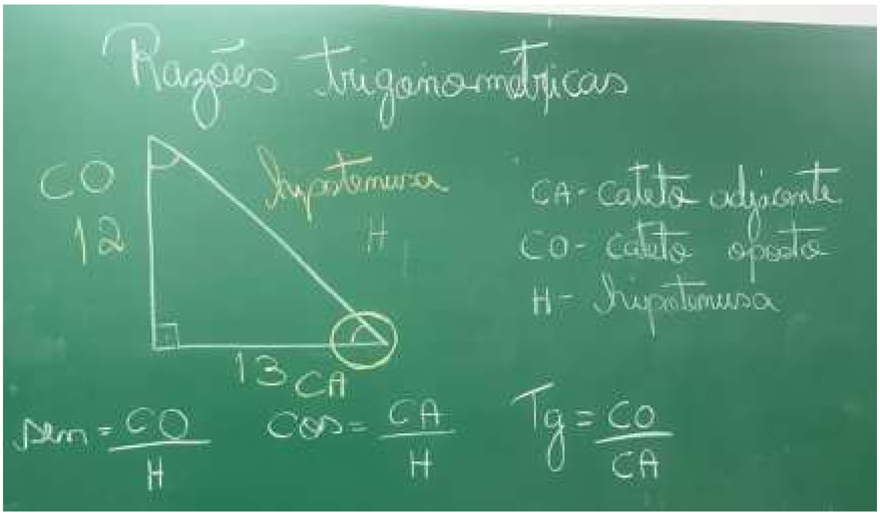


Fonte: Relatório de pesquisa.

O Grupo 2 utilizou o Teorema de Pitágoras para resolver o item a, e a resposta foi bem próxima da resposta à qual o Grupo 1 chegou usando o desenho. Isso mostra que existem várias formas de resolver; esse grupo lembrou da fórmula e preferiu utilizá-la. Tiveram o mesmo erro no item c em relação à ordem das razões, mas como já tínhamos comentado anteriormente na resolução do Grupo 1, eles também corrigiram o erro depois. Os outros três grupos também solucionaram o problema e apresentaram respostas semelhantes. No entanto, aqui optamos por destacar apenas os Grupos 1 e 2, considerando que todos os integrantes desses grupos estiveram presentes em todas as aulas durante a pesquisa, além de terem demonstrado diferenças mais significativas nas respostas, pela forma de resolver, mostrando-se empenhados e apresentando diferentes estratégias de resolução

Após as discussões e obtenção de consenso quanto à correção (ou não) das resoluções, formalizamos o conteúdo de razões trigonométricas na lousa, e inclusive utilizamos as medidas indicadas no problema resolvido por eles para que fosse mais fácil compreender o que cada medida representava. A Figura 10 mostra a formalização que foi construída e registrada na lousa a partir do consenso quanto às respostas elaboradas pelos alunos, mostrando as razões, seno, cosseno e tangente:

Figura 10: Formalização do conteúdo



Fonte: Dados da pesquisa.

Na décima etapa da MEAAMaRP, proposição e resolução de novos problemas, os alunos foram desafiados a criar e resolver novos problemas, com foco específico nas razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente). Ressaltamos que, para esta atividade de Proposição de Problemas, as etapas 1 a 9 da MEAAMaRP constituíram-se, portanto, em elemento disparador, e para orientar essa atividade, apresentamos dois prompts direcionados:

- **Prompt A:** Crie um problema fornecendo duas medidas de um triângulo retângulo e utilizando uma das razões trigonométricas.
- **Prompt B:** Crie um problema fornecendo uma medida de um lado do triângulo e a medida de um ângulo agudo (além do ângulo reto).

O objetivo foi aprofundar o uso das razões trigonométricas em situações mais estruturadas, incentivando os alunos a aplicarem seus conhecimentos prévios.

DIALOGANDO COM A LITERATURA

A pesquisa revelou o potencial da proposição de problemas pelos estudantes em diferentes momentos da MEAAMaRP, confirmando a flexibilidade e a relevância dessa prática, conforme indicado por Allevato e Possamai (2022).

A atividade iniciou com a mobilização dos estudantes em torno de um elemento disparador – o vídeo e a construção e o uso de um relógio de sol. O prompt inicial solicitava a criação de um problema "fácil" e um "difícil"; isso incentivou os alunos a formularem questões a partir da situação vivenciada e dos dados que eles próprios coletaram. Como destacam Zhang e Cai (2021), a proposição de problemas foca na criação de problemas como objeto de investigação.

Nesse momento inicial, os estudantes elaboraram problemas (Quadro 2) que, embora simples, revelaram seu foco nas informações coletadas (horário, medidas e ângulos) e sua percepção do ângulo reto formado pelo ponteiro e pelo plano do relógio (Figura 6). A partir dos problemas criados, a professora pôde selecionar o problema do Grupo 2 e reformulá-lo (Figura 7) para que se adequasse ao papel de problema gerador da aula. Segundo Allevato (2014), o problema gerador é selecionado ou elaborado pelo professor, ou aceito quando proposto pelos próprios alunos.

Neste caso, a escolha de um problema formulado pelos estudantes garantiu que o tema fosse pertinente à vivência da turma, pois eles participaram de todas as etapas, desde a criação do relógio de sol até a coleta das informações e a criação dos problemas. A reformulação, ao acrescentar perguntas direcionadas, assegurou que o problema mobilizasse os conceitos do Teorema de Pitágoras e, principalmente, abrisse caminho para a discussão das razões trigonométricas.

A resolução do problema gerador em grupos seguiu as etapas centrais da MEAAMaRP (Allevato e Onuchic, 2021), incluindo a resolução em grupos, o registro das soluções (Figuras 8 e 9) e a plenária. Durante a Plenária e a busca do consenso, os erros cometidos pelos grupos em relação à ordem do cálculo das razões permitiram uma discussão imediata sobre a importância da razão $\frac{a}{b}$ ser diferente da razão de $\frac{b}{a}$.

A formalização do conteúdo (Figura 10) foi realizada, sistematizando os conceitos de seno, cosseno e tangente diretamente sobre as medidas e o triângulo retângulo estabelecido no problema. Na décima etapa da MEAAMaRP, a atividade de Proposição e Resolução de Novos Problemas teve o objetivo de consolidar o aprendizado das razões trigonométricas, conforme sugerido por Cai e Hwang (2020) e o NCTM (2020). Neste momento, as etapas anteriores se constituíram no elemento disparador, e os prompts direcionados (Prompt A e Prompt B) fizeram os alunos estruturarem problemas que exigiram o uso específico e correto das razões trigonométricas. A proposição de problemas, assim, atuou como um eixo que iniciou, motivou, orientou e, por fim, possibilitou avaliar o ciclo de aprendizagem acerca das razões trigonométricas, revelando sua potencialidade de desenvolver o pensamento lógico e crítico e a criatividade nas aulas de Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve como objetivo analisar como a proposição de problemas pelos estudantes pode constituir problemas geradores relacionados a razões trigonométricas em uma aula de Matemática através da RP, considerando como elementos disparadores um vídeo e a construção de um relógio de sol por estudantes do 2º ano do ensino médio.

A partir da análise dos dados obtidos, observamos que os estudantes revelaram entusiasmo e interesse pela aula, especialmente quando tiveram a oportunidade de trabalhar em grupos, construir o relógio de sol e conhecer um pouco da história desse instrumento. Durante a proposição dos problemas, os alunos utilizaram os dados, por eles mesmos coletados, de forma criativa: embora alguns tenham se limitado a pensar apenas nos horários e nos ângulos correspondentes, a maioria conseguiu relacionar essas informações com medidas de comprimento e proporções, o que possibilitou a proposição de um problema gerador. Consideramos que se o *prompt* tivesse sido mais específico e detalhado, em relação ao tipo de problema que se queria criar, poderiam ter surgido outras propostas que não precisariam de reformulações posteriormente.

Durante as resoluções, os estudantes revelaram grande empenho e engajamento. Utilizaram diversas estratégias, apresentaram suas (re)soluções na lousa e participaram de uma produtiva discussão coletiva com toda a turma até que se chegasse a um consenso sobre a resolução do problema gerador. A partir daí, foi possível formalizar e concluir a atividade. O percurso seguido foi bastante completo: partimos do vídeo e da construção do relógio de sol, exploramos conceitos históricos e geométricos, e avançamos até chegar às razões trigonométricas, consolidando de forma prática e contextualizada o conteúdo abordado.

A proposição de problemas, nesse contexto, foi iniciada pelos próprios alunos, com base em *elementos disparadores e prompts* cuidadosamente elaborados pela professora. Essa preparação faz toda a diferença, especialmente quando o objetivo é que os estudantes formulem problemas relacionados a um conteúdo matemático específico, que ainda não dominam. A criação de um problema gerador, derivado dos problemas dos próprios alunos, foi essencial; essa estratégia permitiu que eles, motivados para resolver um problema criado por eles mesmos, mobilizassem conhecimentos prévios e desenvolvessem o processo de resolução até a formalização das razões trigonométricas. Isso simplificou o aprendizado e confirmou que a proposição e resolução fazem o aluno ser o protagonista do seu processo de aprendizagem.

Proposing and solving problems to learn trigonometry: possibilities from the sundial

ABSTRACT

This article aims to analyze how students' problem-posing can lead to generative problems related to trigonometric ratios in a mathematics class through Problem Solving. The research is qualitative and involved 30 students in the 11th grade. Data collection was carried out using a trigger element that involved a video and the construction of a sundial, along with a prompt designed to encourage students to create problems related to trigonometric ratios. This subject had not yet been presented to the students. The proposed problems were solved by the students themselves, constituting generative problems in the implementation of the Methodology of Mathematics Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving. In this methodology, the problem is the starting point and guide for learning new mathematical concepts and content. During the creation of the problems, students used the data collected with the sundial creatively. Some focused only on the times and angles determined on the clock, but most were able to advance, involving measurements of length and proportions in the problems they created.

KEYWORDS: Problem posing. Problem solving. Trigonometric ratios.

NOTAS

1 Os Standards (NCTM, 2000) é um documento publicado pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que serve de referência e fornece orientações para a Educação Matemática dos Estados Unidos.

USO DE INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL (IA)

A ferramenta OPENAI 2025 foi utilizada para a criação de imagens no texto.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v.25, n.41, p.73-98, dez. 2011.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que através da Resolução de Problemas? *In:* ONUCHIC, L. R. et. al. (Org.). **Resolução de Problemas:** teoria e prática. 2. ed. Jundiaí, SP: Paco, 2021. p. 40- 62.

ALLEVATO, N. S. G.; POSSAMAI, J. P. Proposição de Problemas: possibilidades e relações com o trabalho através da Resolução de Problemas. **Com a Palavra - O Professor**, n.7, v.18, p.153-172, 2022.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.

BONOTTO, C. Engaging students in mathematical modelling and problem posing activities. *In:* LESHOF, H.; SCHWAB, E.; STEIN, M. (Ed.). **Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching** (ICTMT 13). Cottbus: Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg, 2013. p. 343-348.

CAI, J; MOYER, J. C.; WANG, N.; HWANG, S.; NIE, B.; GARBER, T. Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 83, p. 57-69, 2013.

CAI J., HWANG, S. Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. **International Journal of Educational Research**, v.102, p.101391, 2020.

CAI, J. Problem posing as a research paradigm. *In:* FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. (Ed.). **Researching in mathematics education:** Perspectives and trends from a global view. Cham: Springer, 2022. p. 1-15.

DENZIN, N. K; LINCOLN, I. **O planejamento da pesquisa qualitativa:** teorias e abordagens. Porto Alegre, RS: Artmed, 2006.

ENGLISH, L. D. Problem posing in mathematics: Theoretical, empirical, and pedagogical considerations. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v.23, n.3, p.195-207, 2020.

KOICHU, B.; KONTOROVICH, I. Problem posing in a dynamic geometry environment. **Educational Studies in Mathematics**, v.83, n.1, p.129-144, 2013.

LAMBDIN, D. V.; WALCOTT, C. Y. Connections between psychological learning theories and the elementary school curriculum. *In:* MARTIN, W. G.; STRUTCHENS,

M. E. (Ed.). **The Sixty-Ninth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics**. Reston, VA: NCTM, 2007.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: NCTM, 2000.

OPENAI. ChatGPT (versão 3.5). Disponível em: https://chat.openai.com/. Acesso em: 09 ago. 2025.

POLYA, G. **How to Solve It:** A New Aspect of Mathematical Method. Princeton: Princeton University Press, 1944.

POSSAMAI, E.; ALLEVATO, N. S. G. Elementos disparadores para a proposição de problemas matemáticos: uma revisão sistemática. *In:* ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2022, Curitiba. **Anais [...].** Curitiba: SBEM-PR, 2022. p. 1-12.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. *In:* TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

SILVER, E. A.; CAI, J. Na analysis of arithmetic problem posing by middle school students. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.27, n.5, p.521-539, 1996.

TEIXEIRA, C. J.; MOREIRA, G. E. **A proposição de problemas como estratégia de aprendizagem da Matemática:** Uma ênfase sobre efetividade, colaboração e criatividade. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2020.

ZHANG, X.; CAI, J. Mathematics problem posing: An overview of the field and areas for future research. **Journal of Mathematics Education**, v.14, n.1, p.1-17. 2021.

Recebido: 10 agosto 2025.
Aprovado: 21 novembro 2025.
DOI: http://dx.doi.org/10.3895/etr.v9n3.20706.
Como citar:
BACK, Maria Beatriz; JUSTULIN, Andresa Maria; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Propor e resolver problemas para aprender trigonometria: possibilidades a partir do relógio de sol. **Ens. Tecnol. R.,** Londrina, v. 9, n. 3, p. 629-645, set./dez. 2025. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/etr/article/view/20706. Acesso em: XXX.

Correspondência:
Maria Beatriz Back
Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática. Avenida João Miguel Caram, 3131, bloco A, sala 101, Jd. Morumbi. Londrina, Paraná, Brasil.