Ensino e Tecnologia em Revista

ISSN: 2594-3901

http://periodicos.utfpr.edu.br/etr

Casos de semelhança de triângulos através da Resolução de Problemas: um estudo do pensamento geométrico

Graziella Fatima Amorin Natali Machado
graziellamachado@hotmail.com
orcid.org/0009-0007-3551-5046
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina, Paraná, Brasil.

Andresa Maria Justulin
http://ajustulin@utfpr.edu.br
orcid.org/0000-0003-4107-8464
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procópio, Paraná, Brasil.

RESUMO

O presente artigo tem como objetivo analisar o Pensamento Geométrico mobilizado por alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental ao resolver um problema gerador sobre casos de semelhança de triângulos. A pesquisa é do tipo qualitativa e contou com 23 alunos do 9º. ano do Ensino Fundamental de uma escola social de uma cidade do norte do Paraná como participantes. O instrumento de pesquisa foi um problema gerador envolvendo o objeto de conhecimento, casos de semelhança de triângulos. Os dados foram coletados por meio dos registros escritos pelos alunos e dos áudios gravados e transcritos, do momento da resolução do problema, das observações e registros no diário de campo da professora-pesquisadora. Estes dados foram categorizados em dois momentos (da resolução do problema e da plenária) e analisados com base no referencial teórico apresentado e no objetivo da pesquisa. O primeiro grupo analisado, o G1, ao resolver o Problema 5 evidenciou características do nível 2 (dedução informal – relação entre as propriedades das figuras); o segundo grupo, o G4, do nível 3 (dedução – dedução das propriedades). Os resultados indicaram que a Geometria, ao ser explorada através da Resolução de Problemas, possibilitou aos alunos conhecerem uma nova abordagem para aprender Matemática e oportunizou o desenvolvimento do Pensamento Geométrico: acerca dos níveis de Pensamento Geométrico observados e caracterizados, evidenciou-se que, no problema 5, G1 e G4 manifestaram o nível 2 e anteriores, sendo que alguns estudantes de G4 já davam indícios de um avanço para o nível 3.

PALAVRAS-CHAVE: Semelhança de Triângulos. Resolução de Problemas. Matemática.

INTRODUÇÃO

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é o documento norteador da Educação Básica brasileira, o conhecimento matemático é fundamental a todos os estudantes, não somente por sua aplicação em todo contexto social, mas também por “suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais” (Brasil, 2018, p. 265). Ainda de acordo com o documento, a Matemática vai além de cálculos e quantificações: envolve a análise de fenômenos aleatórios, a criação de sistemas abstratos e a relação com situações reais. Dessa maneira, o esperado é que os alunos identifiquem o uso da Matemática para resolver problemas, servindo-se de conceitos, procedimentos e resultados, que culminam em soluções contextualizadas.

Entre as dez competências gerais da Educação Básica, a BNCC (Brasil, 2018) destaca a importância da resolução de problemas. Nessa perspectiva, o estudante deve ser estimulado a formular e solucionar questões, inclusive utilizando tecnologias, com base nos conhecimentos das diversas áreas (Brasil, 2018). A resolução de problemas é destacada como um processo matemático. No entanto, o entendimento das autoras deste artigo, amparadas nas pesquisas do Grupo de Trabalho em Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), da Universidade Estadual Paulista (Unesp), *campus* Rio Claro e nos trabalhos de Onuchic e Allevato (2011) e Allevato e Onuchic (2021), é que a Resolução de Problemas seja trabalhada em sala de aula como uma Metodologia de Ensino.

Em relação à Geometria, o documento orienta para o desenvolvimento do Pensamento Geométrico, entendido como a habilidade de raciocinar sobre formas, espaços e relações espaciais, distinta do pensamento aritmético (Brasil, 2018).

A BNCC articula ainda o desenvolvimento do pensamento geométrico à resolução de problemas e ao uso de tecnologias, propondo que os alunos interpretem e representem posições e movimentos no plano cartesiano, reconheçam transformações isométricas e realizem ampliações e reduções. Tais competências visam não apenas a ampliação da compreensão conceitual, mas também a aplicação prática e significativa do conhecimento geométrico (Brasil, 2018).

Nesse contexto, a primeira autora desenvolveu uma pesquisa de mestrado profissional orientada pela segunda (Machado, 2025). Este artigo traz resultados dessa pesquisa e tem como objetivo analisar o Pensamento Geométrico mobilizado por alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental ao resolver um problema gerador sobre casos de semelhança de triângulos.

PENSAMENTO GEOMÉTRICO E A TEORIA VAN HIELE

Antes de abordar o Pensamento Geométrico, buscou-se o entendimento da definição de pensamento matemático, que não é unânime na literatura. Bianchini e Lima (2023) analisaram algumas dessas definições e assumiram que:

> O pensamento matemático é um tipo especial de pensamento, também necessário para muitas das atividades cotidianas, sociais e profissionais exercidas por um cidadão. Pode ser entendido como o resultado de processos racionais do intelecto ou de abstrações da

> imaginação realizados a partir da observação e reflexão científica de fenômenos de diferentes naturezas, por meio da sistematização e contextualização de conhecimentos matemáticos, da capacidade de perceber visual e espacialmente, de representar, memorizar, pensar de maneira criativa, objetiva, lógica, analítica e crítica (Bianchini; Lima, 2023, p.21).

Partindo disso, buscou-se compreender o que caracteriza especificamente o pensamento geométrico. Para Pais (1996), esse tipo de pensamento está relacionado à intuição e se constrói por meio de quatro elementos fundamentais: o objeto concreto, o conceito, o desenho e a imagem mental. Esses elementos refletem os aspectos intuitivo, experimental e teórico do conhecimento geométrico.

Leivas (2009) define o pensamento geométrico como a capacidade de formar estruturas mentais com base em imaginação, intuição e visualização, visando à construção de conhecimentos matemáticos.

Van de Walle (2009), por sua vez, propõe dois referenciais para o ensino da Geometria: o raciocínio espacial (ou senso espacial) e o conteúdo específico. O raciocínio espacial refere-se à habilidade de perceber e manipular mentalmente formas e relações espaciais, sendo fundamental para interpretar o ambiente à nossa volta. Já o conteúdo específico engloba quatro objetivos principais, conforme o *National Council of Teachers of Mathematics* - NCTM (2000): formas e propriedades (estudo das características das figuras), transformações (como isometrias e semelhanças), localização (uso de coordenadas), visualização (interpretação de formas e perspectivas no espaço). Ainda segundo Van de Walle (2009), o desenvolvimento do pensamento geométrico varia entre os indivíduos, mas todos têm potencial para desenvolvê-lo.

A pesquisa do casal holandês Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof (Van Hiele, 1999) trata das diferenças no Pensamento Geométrico e as classifica em níveis, que constituem o chamado modelo de Van Hiele do Pensamento Geométrico. Os cinco níveis são: visualização, análise, dedução informal, dedução formal, rigor. Eles são sequenciais e dependem da experiência, não da idade.

- Nível 0 – Visualização: Os alunos reconhecem formas geométricas com base em suas características visuais globais. A classificação e identificação das figuras se dá pela aparência, sem consideração pelas propriedades formais.
- Nível 1 – Análise: Há um avanço na compreensão das propriedades das formas. Os alunos começam a identificar características invariantes dentro de classes de figuras (ex.: todos os quadrados possuem lados iguais e ângulos retos), embora ainda sem relacioná-las logicamente.
- Nível 2 – Dedução informal: Os estudantes desenvolvem a capacidade de realizar inferências do tipo "se–então", estruturando argumentos dedutivos informais. Compreendem a necessidade de definições precisas, a suficiência de propriedades e a importância dos contraexemplos.
- Nível 3 – Dedução formal: O foco recai sobre a construção de sistemas dedutivos completos. Os alunos formulam e validam conjecturas, reconhecendo a importância de axiomas, definições e teoremas na organização lógica da Geometria.

- Nível 4 – Rigor: Neste nível, há análise crítica de diferentes sistemas axiomáticos (ex.: Geometria Euclidiana vs. Esférica). Os estudantes comparam estruturas geométricas distintas, compreendendo suas bases formais.

Esse modelo oferece uma estrutura para compreender como os estudantes evoluem na compreensão dos conceitos geométricos (conforme Figura 1), auxiliando no planejamento de atividades pedagógicas adequadas a cada estágio de aprendizagem.

Figura 1 – Teoria do desenvolvimento do Pensamento Geométrico dos Van Hiele

Fonte: Adaptado de Van de Walle (2009).

Van Hiele (1999) destaca que as ideias desenvolvidas em um nível se tornam o fundamento do nível seguinte. A progressão entre os níveis exige vivência geométrica adequada; do contrário, pode haver ruptura na comunicação pedagógica.

Van Hiele (1999) propõe, além dos níveis de pensamento geométrico, um modelo composto por fases que descrevem o processo de aprendizagem em geometria. A primeira fase, denominada fase de instrução, envolve a mediação do professor por meio de diálogos e questionamentos que estimulam a atenção dos alunos para determinados conceitos. A segunda, chamada orientação guiada, é caracterizada por atividades exploratórias, cuidadosamente elaboradas para revelar gradualmente determinadas estruturas geométricas — como acontece, por exemplo, durante a manipulação de sólidos. Na fase de explicação, os estudantes passam a verbalizar suas observações e compreensões. A quarta etapa, orientação livre, propõe desafios mais complexos e abertos, permitindo múltiplas estratégias de resolução. Por fim, a fase de integração consiste na sistematização dos conhecimentos, em que os alunos organizam e sintetizam o que foi aprendido.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Resolução de Problemas tem se consolidado como uma abordagem pedagógica relevante no ensino de Matemática. Embora não exista uma definição única para "problema", nesta pesquisa será adotada a de Onuchic e Allevato (2011, p.81): “problema é tudo o que não se sabe fazer, mas há o interesse em fazer”. Diferente de um exercício, cuja solução é imediata e automatizada, o problema exige reflexão, e o que é desafiador para um estudante pode não ser para outro (Echeverría; Pozo, 1998).

O uso da resolução de problemas no ensino matemático tornou-se mais sistemático a partir do século XX, com destaque para Polya (1944), que propôs um método estruturado em quatro etapas: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano e avaliação da solução. Suas contribuições influenciaram tanto o ensino quanto a pesquisa em Matemática.

A valorização dessa abordagem ganhou força com o documento norte-americano *An Agenda for Action: Recomendations for School Mathematics of the 1980's* (Uma agenda para ação: Recomendações para a Matemática Escolar da década de 1980) (NCTM, 1980), o que impulsionou seu uso em diversos países, incluindo o Brasil. Schroeder e Lester (1989) identificam três formas de inserção da resolução de problemas no ensino: ensinar sobre a resolução, ensinar para a resolução e ensinar através da resolução de problemas, sendo esta última a abordagem adotada nesta pesquisa. Nesta perspectiva, o problema atua como gerador de novos conhecimentos matemáticos (Allevato; Onuchic, 2021).

Para Allevato e Onuchic (2021), a expressão ensinar através implica um processo contínuo e simultâneo entre a construção do conhecimento matemático e a resolução de problemas. Além disso, Onuchic e Allevato (2011) destacam que ensino, aprendizagem e avaliação não devem ser concebidos como processos isolados. A avaliação, nesse contexto, deve acompanhar o desenvolvimento da aprendizagem, assumindo um caráter formativo e processual, mais voltado ao acompanhamento dos caminhos percorridos do que ao julgamento de resultados.

Onuchic e Allevato (2011, p.81) adotaram, então, dentro do contexto de sala de aula, a palavra ensino-aprendizagem-avaliação e explicam que:

> [...] ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário.

Allevato e Onuchic (2021) apresentam uma sugestão de roteiro para colocar em prática essa abordagem conhecida por Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), composta por 10 (dez) etapas.

A primeira etapa consiste na proposição do problema, elaborado ou selecionado pelo professor — ou ainda sugerido pelos alunos. Em seguida, realiza-se a leitura individual, em que cada aluno faz uma primeira leitura do problema. A terceira etapa envolve a leitura coletiva em grupo, promovendo a compreensão compartilhada, com mediação docente.

Na resolução do problema (4ª etapa), os estudantes exploram diferentes estratégias (esquemas, desenhos, tabelas etc.), enquanto o professor observa, incentiva e auxilia (5ª etapa). Após isso, os alunos realizam o registro das resoluções na lousa (6ª etapa), independentemente da correção, compondo um painel de soluções. A plenária (7ª etapa) permite que os grupos justifiquem suas soluções, promovendo a argumentação e o confronto de ideias. Em seguida, ocorre a busca de consenso (8ª etapa) sobre a resposta mais adequada, conduzindo à formalização matemática dos conceitos (9ª etapa), com sistematização pelo professor. Por fim, a décima etapa propõe novos problemas relacionados, a fim de consolidar e ampliar os conhecimentos desenvolvidos.

De modo geral, “[...] quando o professor adota essa metodologia, os alunos podem aprender tanto sobre resolução de problemas quanto aprender Matemática para resolver novos problemas, enquanto aprendem Matemática através da resolução de problemas” (Allevato, 2005, p.61).

Além disso, “[...] novas posturas e atitudes relacionadas ao trabalho em sala de aula são exigidas, tanto dos alunos, ao assumirem a responsabilidade pela aprendizagem, como do professor em relação ao trabalho em sala de aula” (Santos; Justulin, 2024, p.5). A MEAAMaRP, assim, contribui para a autonomia do aluno ao transformar o trabalho em sala de aula.

PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Essa pesquisa é do tipo qualitativa e compreendida como aquela cujos “[...] dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico” (Bogdan; Biklen, 1994, p.16).

A pesquisa qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1994), refere-se a um tipo de investigação que busca compreender a complexidade do comportamento humano e a interpretação que os sujeitos dão a determinados fenômenos. É uma abordagem que procura explorar o contexto em que os eventos ocorrem, em oposição à abordagem quantitativa, que se concentra em medir e quantificar fenômenos. A pesquisa qualitativa emprega uma grande variedade de métodos e técnicas, e é especialmente útil para investigar questões complexas que não podem ser adequadamente respondidas por meio de métodos quantitativos.

Esta pesquisa foi realizada em ambiente natural e contou com a observação e interação com os participantes e com gravações de áudio e registros fotográficos. Além disso, teve seu foco no processo, no uso da MEAAMaRP e na interação das pessoas. Suas interpretações foram desenvolvidas a partir dos dados coletados e, também, buscou-se compreender as perspectivas dos participantes, bem como seus sentimentos e interpretações.

Apoiado em tal abordagem, o estudo tem como objetivo analisar o Pensamento Geométrico mobilizado por alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental ao resolver um problema gerador sobre casos de semelhança de triângulos.

A pesquisa teve seu cadastro realizado na Plataforma Brasil, na Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), sob o número de protocolo 76006223.8.0000.5547 e sob parecer favorável de número 6.691.111, emitido em 07 de março de 2024.

Este estudo foi conduzido em uma escola social[1] no Norte do estado do Paraná durante o primeiro semestre de 2024, envolvendo aulas de Matemática ministradas pela professora-pesquisadora. Os participantes foram 23 alunos de um 9º ano do Ensino Fundamental.

A pesquisa de campo foi desenvolvida ao longo de 10 aulas da disciplina de Matemática por meio de cinco problemas geradores e a turma não teve contato com a MEAAMaRP previamente. Os estudantes têm entre 14 e 16 anos, sendo 13 deles do sexo masculino e 10 do sexo feminino, e foram reunidos em 4 grupos de 5 alunos e um grupo de 3 alunos. A fim de preservar a identidade e a privacidade dos participantes no decorrer da pesquisa, os alunos serão identificados como A1 a A23, de acordo com a ordem de construção de seus grupos, denominados G1, G2, G3, G4 e G5.

Na pesquisa de Machado (2025) foram trabalhados 5 (cinco) problemas geradores, que contemplaram as habilidades da BNCC (EF06MA21) "Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais" e (EF09MA12) "Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes". Neste artigo vamos analisar o problema 5 que trata especificamente dos casos de semelhança de triângulos.

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Figura 2 – Problema gerador 5: Construindo semelhanças

1. Vocês vão desenhar uma ampliação do seu molde usando apenas os ângulos verde e laranja. Na sua ampliação esses ângulos devem ser iguais aos do molde.

O que você pode dizer sobre esses dois triângulos? Explique como pensou. Diga tudo o que puder sobre esses triângulos.

2. Agora vamos fazer outra ampliação do molde usando varetas de madeira. Essas varetas serão as medidas dos lados de sua ampliação. As medidas de cada uma devem ser proporcionais a um dos lados do triângulo molde.

O que você pode dizer sobre esses dois triângulos? Explique como pensou. Diga tudo o que puder sobre esses triângulos.

3. Você vai usar as varetas para as medidas de dois lados e vai usar um dos ângulos do molde para fazer a abertura entre as duas varetas. O ângulo deve ser o que está entre os dois lados proporcionais às suas duas varetas.

O que você pode dizer sobre esses dois triângulos? Explique como pensou. Diga tudo o que puder sobre esses triângulos.

Fonte: Soares (2018).

Para a análise dos dados do Problema 5, a análise foi feita com dois grupos, selecionados a partir do envolvimento de seus participantes na aula e de suas interações, além do engajamento na resolução dos problemas.

A análise se fez dividida em dois momentos. No primeiro momento, o foco são as etapas 1, 2, 3, 4 e 5 da MEAAMaRP, enfatizando o que foi desenvolvido pelos alunos, no decorrer das resoluções dos problemas. O segundo momento é voltado para a plenária e formalização de conteúdo. Essa divisão propiciou uma melhor compreensão daquilo que foi o trabalho desenvolvido pelos alunos e da Resolução de Problemas aplicada no ensino de Geometria, durante a plenária e formalização de conteúdo.

O Problema 5 teve como objetivo explorar os casos de semelhança de triângulos por meio de ampliações e reduções geométricas. A proposta consistiu na construção livre de triângulos pelos estudantes, seguida da ampliação ou redução das figuras, permitindo a identificação empírica da semelhança entre elas. Utilizou-se como recurso pedagógico a manipulação de palitos de churrasco, o que favoreceu a aprendizagem prática e colaborativa.

Após a exploração, promoveu-se a formalização dos conceitos, com ênfase nos três casos clássicos de semelhança: ângulo-ângulo (AA), lado-lado-lado (LLL) e lado-ângulo-lado (LAL). O problema foi selecionado com base na habilidade EF09MA12 da BNCC, que trata do reconhecimento das condições necessárias e suficientes para a semelhança de triângulos.

A aula transcorreu de forma tranquila, favorecida pelo fato de os alunos já estarem familiarizados com a MEAAMaRP, mostrando maior autonomia e engajamento. São analisadas, na sequência, as interações e registros escritos do G1 e, em seguida, de G4:

> **A3:** (Lê) **"**Com sua régua, construa um triângulo e recorte com cuidado. Este será o seu molde".
> **A1:** Qualquer triângulo, Grazi?
> **Professora:** Sim, do tamanho que você quiser.
> **A2:** Não faz muito grande, senão cê vai ter mais trabalho...
> **A3:** (Lê) "Pinte os ângulos de seu molde com diferentes cores: verde, laranja e azul..." Pode ser rosa?
> **Professora:** Verde, laranja e azul... tem canetinha na caixa pedagógica[2].

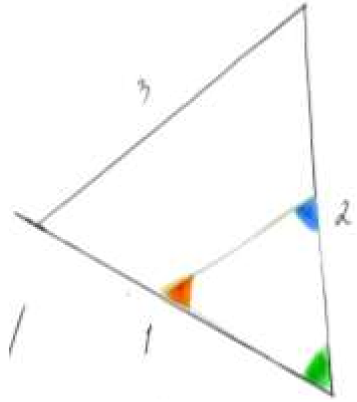
Nesse trecho do diálogo, A3 deseja trocar as cores que indicariam os ângulos do triângulo, o que não seria um problema se as instruções do problema não tratassem desses ângulos pela cor e, caso fossem trocadas, poderiam ocasionar algum equívoco. Quanto às fases de aprendizagem da Geometria de Van Hiele (1999), observam-se a instrução (interação professor-aluno), a orientação guiada (aprendizagem por meio da exploração em atividades guiadas) e a explicação (quando os alunos expressam suas observações).

> **A1:** Tá, e agora?
> **A3:** Agora é pra desenhar uma ampliação do molde usando apenas os ângulos verde e laranja e os ângulos devem ser iguais ao do molde... como assim?
> **A5:** Ela pediu pra usar dois ângulos, mas o triângulo tem três ângulos.
> **A4:** Desenhar no papel?
> **A1:** No papel.
> **A2:** Desenha um ângulo aqui, desenha o outro ali e junta.
> **A1:** Vai ficar torto.
> **A3:** O que a gente faz?
> **A1:** Vamos ampliar no dobro... Desenha um ângulo, faz o dobro do tamanho [do lado] e depois coloca o outro, o laranja, põe a régua, faz o dobro e junta!
> **A5:** Ok, agora tem que escrever... se o triângulo do molde é a metade do desenhado e os ângulos são iguais, o verde e o laranja, o azul também é?
> **A1:** Tem que ser, pra dar 180^{o}. Como que escreve isso?
> **A3:** Escreve que colocou o dobro do tamanho.
> **A1:** Então é isso.

Neste trecho do diálogo, verifica-se que os estudantes têm a percepção da utilização das duas medidas: lado e ângulo. No entanto, caso optassem por replicar apenas os ângulos aleatoriamente, os segmentos que os uniriam poderiam ocasionar ângulos diferentes daqueles construídos no molde, e essa observação foi feita antes da construção da ampliação. O trecho do diálogo mostra, também, que os alunos já entenderam, de certa forma, o caso de semelhança ângulo-

ângulo: "Se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes respectivamente congruentes, esses triângulos são semelhantes" (Bianchini, 2015, p.67).

Figura 4 – Resolução do item 1 do problema 5 feita por G1



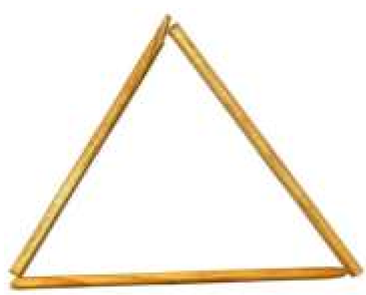
Fonte: Machado (2025, p.79).

Os alunos do G1, na Figura 4, mostram a ampliação do triângulo feita a partir dos ângulos verde e laranja (caso ângulo-ângulo). Conforme o diálogo, eles pensaram nessa ampliação a partir dos ângulos e, também, na medida do lado.

> **A1:** Agora o 2. Outra ampliação do molde usando varetas de madeira. Essas varetas serão as medidas dos lados de sua ampliação. As medidas de cada uma devem ser proporcionais a um dos lados do triângulo molde. Pega os palitos, A5! Dobra todos os lados e junta!
> **Professora:** Dobra os lados?
> **A1:** As medidas dos lados.
> **Professora:** Bem melhor!
> **A3:** Igual ao outro?
> **A1:** Com os palitos.
> **A3:** E os ângulos?
> **A1:** Vão ficar do mesmo tamanho, porque vamos multiplicar todos os lados por 2.
> **A2:** Vamos terminar primeiro.
> **Professora:** Vocês estão indo muito bem!

Neste trecho, os alunos revelaram o entendimento de que se um segundo triângulo tem os lados correspondentes proporcionais ao primeiro, então seus ângulos também serão iguais, contemplando o nível 1 de Van Hiele – análise – em que já são capazes de identificar e de descrever propriedades que definem classes de formas, neste caso, o triângulo.

Figura 5 – Resolução do item 2 do problema 5 feita por G1



Fonte: Machado (2025, p.80).

A3: Último. Você vai usar as varetas para as medidas de dois lados e vai usar um dos ângulos do molde para fazer a abertura entre as duas varetas. O ângulo deve ser o que está entre os dois lados proporcionais às suas duas varetas.
A1: Então tem que colocar os palitos no triângulo e ver o que acontece.
A3: Ficou a mesma coisa.
A1: Então escreve aí que "dois lados com ângulo igual também ficam semelhantes".
Professora: Dois lados o quê?
A1: Proporcionais!

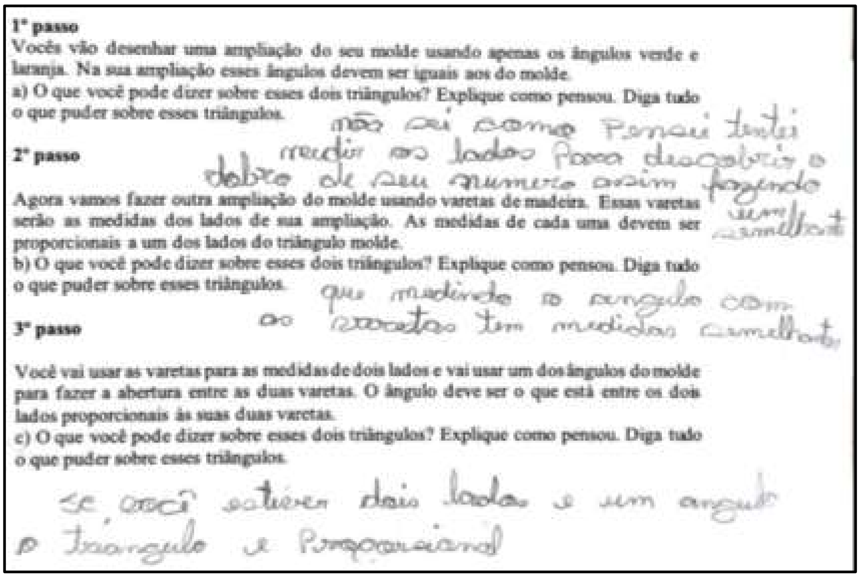
A Figura 6 mostra o resultado da resolução do item 3 do Problema 5, feita pelo grupo G1:

Figura 6 – Resolução do item 3 do problema 5 feita por G1

Fonte: Machado (2025, p.81).

Assim, o grupo G1 finalizou os registros do problema 5, optando por uma estratégia que se constituiu em sempre dobrar a medida dos lados. A Figura 7 traz o registro escrito apresentado pelo G1:

Figura 7 – Registros do problema 5 feitos por G1



1º passo
Vocês vão desenhar uma ampliação do seu molde usando apenas os ângulos verde e laranja. Na sua ampliação esses ângulos devem ser iguais aos do molde.
a) O que você pode dizer sobre esses dois triângulos? Explique como pensou. Diga tudo o que puder sobre esses triângulos.
não sei como Pensei tentei medir os lados Para descobrir o dobro de seu numero assim fazendo um semelhant

2º passo
Agora vamos fazer outra ampliação do molde usando varetas de madeira. Essas varetas serão as medidas dos lados de sua ampliação. As medidas de cada uma devem ser proporcionais a um dos lados do triângulo molde.
b) O que você pode dizer sobre esses dois triângulos? Explique como pensou. Diga tudo o que puder sobre esses triângulos.
que medindo o angulo com as varetas tem medidas semelhant

3º passo
Você vai usar as varetas para as medidas de dois lados e vai usar um dos ângulos do molde para fazer a abertura entre as duas varetas. O ângulo deve ser o que está entre os dois lados proporcionais às suas duas varetas.
c) O que você pode dizer sobre esses dois triângulos? Explique como pensou. Diga tudo o que puder sobre esses triângulos.
se você estiver dois lados e um angulo o triangulo e Proporcional

Fonte: Machado (2025, p.81).

Transcrição: 1º passo – não sei como pensei. Tentei medir os lados para descobrir o dobro de seu número e, assim, fazendo um semelhante; 2º passo – que medindo o ângulo com as varetas tem medidas semelhantes; 3º passo – se você tiver dois lados e um ângulo, o triângulo é proporcional.

Nos diálogos e registros do G1, nota-se que alguns alunos têm insegurança para escrever como pensaram matematicamente: "Não sei como pensei, tentei medir os lados para descobrir o dobro de seu número e, assim, fazendo um semelhante". Esses estudantes se apropriaram do conhecimento, perceberam o que o problema pedia, resolveram assertivamente, porém, no momento de escrever seus pensamentos, apresentaram dificuldade.

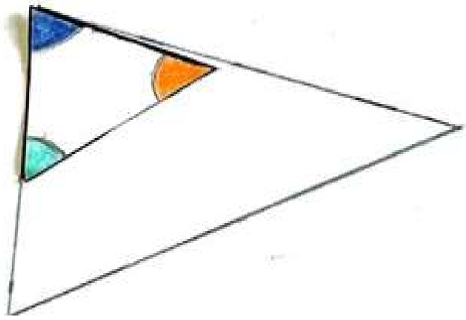
Tais dados revelam que o G1 atingiu o nível 2 de Van Hiele, visto que, neste nível, os alunos se utilizam de propriedades já conhecidas "para formular definições significativas e então empregá-las para justificar relações" (Bianchini; Lima, 2023, p.172). Nesse problema, o G1 utilizou seu repertório para justificar suas ações na resolução do problema.

Seguem a descrição e análise dos dados do G4:

A14: Tá, primeiro a gente tem que desenhar um triângulo.
A16: Um só?
A14: Isso... e recortar. Pega esse negócio aqui [transferidor] e mede 60°. Todos os lados terão o mesmo tamanho.
Professora: Por quê?
A14: É pra ficar mais fácil...
Professora: Ok, se vocês querem assim...
A14: Agora tem que pintar cada ângulo com azul, verde e laranja. Ok. (...) Pintei e recortei.
A15: Desenhar uma ampliação do seu molde usando apenas os ângulos verde e laranja.
A16: É só desenhar outro com 5, 5, 5 [centímetros].
A14: Mas aí você não está usando o molde...
A18: É, tem que usar o molde.
A14: Desenha o laranja, mede 5 cm, agora o verde... Deu certo!

G4 apresenta a Figura 8 como registro do item 1 do Problema 5:

Figura 8 – Item 1 do problema 5 feita por G4



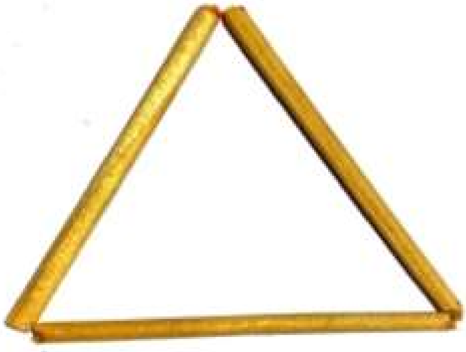
Fonte: Machado (2025, p.82).

No trecho, percebe-se que G4 fez um triângulo equilátero, pois, segundo eles, seria mais fácil. Mesmo sem saber o que estaria por vir, o grupo utilizou o transferidor para construir um triângulo equilátero como molde. Em relação às fases de aprendizagem da Geometria de Van Hiele (1999) evidenciam-se a instrução (interação professor-aluno), a orientação guiada (aprendizagem por meio da exploração em atividades guiadas) e a explicação (quando os alunos expressam suas observações).

A16: Agora é pra fazer outra ampliação com os palitos. Esse você pode fazer com 5, 5 e 5 [centímetros].

A14: Ok, pega ali uma tesoura pra gente cortar os palitos. Mede 5cm de cada e risca de caneta,
A17: Se os lados são proporcionais, o triângulo tem semelhança com o outro.
A16: Isso, essa tá fácil.

Figura 9 – Registros do item 2 do problema 5 feita por G4



Fonte: Machado (2025, p.83).

Neste trecho, observa-se que os alunos estão seguros com a resolução do problema, mesmo sem a percepção do propósito dele, uma vez que, na MEAAMaRP, a formalização do conteúdo ocorre após a resolução do problema pelos grupos.

A14: Ótimo, só falta a última. "Você vai usar as varetas para as medidas de dois lados e vai usar um dos ângulos do molde para fazer a abertura entre as duas varetas". É mais fácil ainda. Prof, é só isso? Posso pegar os mesmos palitos, mas ao invés de usar os três, eu uso dois e o molde?
Professora: Sim, é só isso!
A14: Então acabamos, eba! Esse foi o mais legal, porque tivemos que construir.

Figura 10 – Registros do item 3 do problema 5 feita por G4

Fonte: Machado (2025, p.84).

A16: E agora, ele continua sendo semelhante?
A14: Sim.
A16: E os ângulos?
A14: Pega o outro pedaço ali e vamos medir. Olha, laranja, verde e azul! Está certo!!!

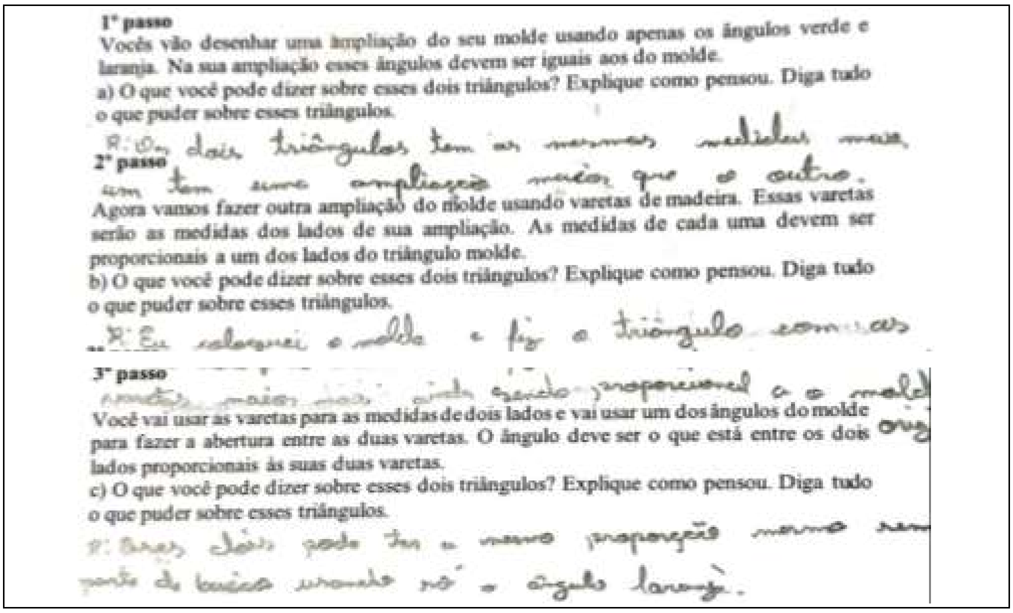
Figura 11 – Registro da conferência do item 3 do problema 5 feita por G4

Fonte: Machado (2025, p.84).

No trecho, os alunos perceberam que, independentemente de usarem os três palitos ou um ângulo do molde para posicioná-los, o triângulo seria semelhante ao molde. No caso do G4, notou-se a necessidade de verificar se os triângulos seriam realmente semelhantes, o que é uma característica do nível 2 de Van Hiele, em que "as 'provas' podem ser mais intuitivas do que rigorosamente dedutivas. Entretanto, há uma apreciação de que um argumento lógico é necessário" (Van de Walle, 2009, p.442).

Ao passar pelo grupo, a professora questiona: "E os registros, vocês já fizeram? Diga tudo o que puder sobre esses triângulos". O grupo percebe que ainda não havia respondido às perguntas e se coloca a fazer o que foi solicitado.

Figura 12 – Registros do problema 5 feitos por G4



1º passo

Vocês vão desenhar uma ampliação do seu molde usando apenas os ângulos verde e laranja. Na sua ampliação esses ângulos devem ser iguais aos do molde.

a) O que você pode dizer sobre esses dois triângulos? Explique como pensou. Diga tudo o que puder sobre esses triângulos.

R: Os dois triângulos tem as mesmas medidas mas um tem uma ampliação maior que o outro.

2º passo

Agora vamos fazer outra ampliação do molde usando varetas de madeira. Essas varetas serão as medidas dos lados de sua ampliação. As medidas de cada uma devem ser proporcionais a um dos lados do triângulo molde.

b) O que você pode dizer sobre esses dois triângulos? Explique como pensou. Diga tudo o que puder sobre esses triângulos.

R: Eu coloquei o molde e fiz o triângulo com as varetas maior mas ainda sendo proporcional a o molde

3º passo

Você vai usar as varetas para as medidas de dois lados e vai usar um dos ângulos do molde para fazer a abertura entre as duas varetas. O ângulo deve ser o que está entre os dois lados proporcionais às suas duas varetas.

c) O que você pode dizer sobre esses dois triângulos? Explique como pensou. Diga tudo o que puder sobre esses triângulos.

R: Esses dois pode ter a mesma proporção mesmo sem parte de baixo usando só o ângulo laranja.

Fonte: Machado (2025, p.85).

Transcrição: 1º passo – os dois triângulos têm as mesmas medidas, mas um tem uma ampliação maior que o outro; 2º passo – eu coloquei o modelo e fiz o triângulo com as varetas maiores, mas ainda sendo proporcional ao molde; 3º passo – esses dois podem ter a mesma proporção mesmo sem a parte de baixo usando só o ângulo laranja.

Neste trecho, pode-se observar que o G4 apresentou certa dificuldade em expressar suas ideias. No 1º passo, os alunos deveriam ter identificado que os dois triângulos têm as mesmas medidas dos ângulos correspondentes e um é a ampliação do outro. Os estudantes souberam resolver o problema, foram assertivos nas definições, conforme a transcrição dos áudios, mas, no momento de registrar suas ideias, tiveram um pouco de dificuldade.

Analisando G1 e G4, percebeu-se o nível 2 do Pensamento Geométrico, sendo que alguns estudantes de G4 estão caminhando para o nível 3. No nível 2, Dedução Informal, os alunos passam a analisar as propriedades geométricas de maneira mais abstrata, relacionando-as entre si e fazendo deduções lógicas, indo além da simples identificação de atributos. Já no nível 3, a dedução, os estudantes começam a formular e testar conjecturas sobre as relações entre essas propriedades e desenvolvem uma estrutura lógica que inclui, também, axiomas e definições.

Após a resolução do problema, a professora optou pela etapa da plenária.

No caso do problema 5, por se tratar de um problema de construção, os alunos não foram convidados a registrarem suas respostas na lousa, permanecendo em grupos e debatendo as respostas oralmente. As discussões foram abertas pelo G1, com a aluna A1 e, brevemente, chegaram a um consenso:

G1 – A1: Olha, professora, eu não sei como pensei... fui medindo os lados junto com o triângulo do molde.
Professora: Então, como você não sabe como pensou? Foi assim que você pensou, e está correto!
G1 – A1: Ah, então tá bom...
G4 – A14: ô Prof, se um triângulo tem dois ângulos iguais ao outro, necessariamente o terceiro também é igual, senão não soma 180º.
Professora: Boa, garoto!! Esse é o nosso primeiro caso de semelhança, vamos ver já, já!
G4 – A14: O segundo é mais fácil, porque se todos os lados do primeiro [triângulo] são proporcionais aos do segundo, os triângulos são semelhantes!
G1 – A1: Mas não era pra eu falar?
Professora: Mas tudo bem, eu fico feliz que vocês conseguiram pensar e entenderam o que era essa construção!
G1 – A1: E o terceiro é que dois lados proporcionais fazendo um ângulo igual ao outro triângulo, também é semelhante!
Professora: Quem é semelhante?
G1 – A1: Os triângulos: o de palito e o de papel.
Professora: Muito bem! Só tem fera nessa turma!
G1 – A3: Virou competição A1 e A14!
Professora: E então, todo mundo concorda com isso?
Todos: Siiiiim.
Professora: Então tá, né? Vamos para o quadro, formalizar esses casos de semelhança!

Na etapa de formalização da MEAAMaRP (etapa 9), a professora optou por projetar as definições e as suas respectivas figuras no quadro, seguindo a mesma ordem em que apareceram os casos nos itens do problema gerador 5:

> “Você já viu que dois triângulos semelhantes têm ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes

proporcionais. No entanto, podemos reconhecer dois triângulos semelhantes pelos casos a seguir:

- Caso ângulo-ângulo (AA): Se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes respectivamente congruentes, esses triângulos são semelhantes.

- Caso lado-lado-lado (LLL): Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

- Caso lado-ângulo-lado (LAL): Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais, e os ângulos compreendidos por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes" (Adaptado de Bianchini, 2015).

Na etapa 10, a professora trouxe um novo problema para que os alunos identificassem quais eram os pares de triângulos semelhantes e justificassem suas escolhas a partir dos casos conhecidos na etapa anterior e já formalizados pela professora.

No problema 5, o Pensamento Geométrico desenvolvido nos grupos, levando em consideração os níveis de Van Hiele (1999), evidenciados conforme o Quadro 1:

Quadro 4 – Níveis de Van Hiele observados no Problema 5

NÍVEIS	PROBLEMA 5		
	G1	G4	G5
0 – visualização	X	X	-
1 – análise	X	X	-
2 – dedução informal	X	X	-
3 – dedução	-	X	-
4 – rigor	-	-	-

Fonte: Machado (2025, p.89).

O G1 apresentou características dos níveis 0, 1 e 2, e os alunos foram capazes, além de identificar e nomear figuras com base em características visuais, de reconhecer e descrever as propriedades que caracterizam uma classe de formas geométricas e de pensar sobre essas propriedades, fazendo relações e inferências lógicas (se – então). O G4, além das características mencionadas, manifestou, também, características do nível 3, de dedução – dedução das propriedades. O G5 não foi analisado em relação ao problema 5.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo teve como objetivo analisar o Pensamento Geométrico mobilizado por alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental ao resolver um problema gerador sobre casos de semelhança de triângulos. A análise baseou-se nos níveis de pensamento geométrico de Van Hiele, considerando a heterogeneidade da turma e respeitando o estágio de desenvolvimento cognitivo de cada aluno. Os dados evidenciaram que os estudantes manifestaram avanços nos níveis de Van Hiele, variando entre os níveis 0 (visualização) e 2 (dedução informal), com indícios de transição para o nível 3 em alguns casos.

Acerca dos níveis de Pensamento Geométrico observados e caracterizados, evidenciou-se que, no Problema 5, G1 e G4 manifestaram o nível 2 e anteriores, sendo que alguns estudantes de G4 já davam indícios de um avanço para o nível 3. Foi relevante e satisfatório perceber o desenvolvimento do Pensamento Geométrico dos alunos: observar o progresso, a compreensão das propriedades e as conjecturas elaboradas por eles. Mesmo em um ambiente heterogêneo, todos foram (e são) capazes de progredir, e propiciar tal avanço foi possível ao ensinar com intencionalidade.

A implementação exigiu materiais manipulativos e recursos pedagógicos adequados, o que favoreceu a participação ativa dos estudantes, mesmo sendo seu primeiro contato com a metodologia. A retomada prévia de conteúdos como proporção foi fundamental para a compreensão dos conceitos de semelhança de figuras e triângulos. Os resultados apontam que a MEAAMaRP favorece a construção gradual e significativa do conhecimento geométrico, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades cognitivas superiores, mesmo em contextos com limitações socioeconômicas. Ao final, levantaram-se questionamentos para futuras investigações, como o papel da tecnologia nesse processo, a continuidade curricular para o desenvolvimento do pensamento geométrico e o impacto dessa abordagem em gerações futuras.

Cases of triangle similarity through Problem Solving: a study of geometric thinking

ABSTRACT

This article aims to analyze the Geometric Thinking mobilized by students in the Middle School when solving a generating problem about the cases of similarity of triangles. The research was qualitative and included 23 9th-grade students from a social school in a city in the north of Paraná. The research instrument was a generating problem involving the knowledge object cases of similarity of triangles. The data were collected through written records by the students and audio recordings transcribed from the moment of solving the problem, from observations and records in the field diary of the teacher-researcher. These data were categorized into two moments (problem solving and plenary) and analyzed based on the theoretical framework presented and the research objective. The first group, G1, when solving Problem 5, showed characteristics of level 2 (informal deduction - relationship between the properties of the figures); the second group, G4, level 3 (deduction - deduction of properties). The results indicate that when Geometry is explored through Problem Solving, it enables students to learn about a new approach to learning Mathematics and provides opportunities for the development of Geometric Thinking: about the levels of Geometric Thinking observed and characterized, it was evident that in problem 5, G1 and G4 showed level 2 and earlier, with some students from G4 already showing signs of progressing to level 3.

KEYWORDS: Similarity of Triangles. Problem solving. Mathematics.

NOTAS

1 A escola social oferece o ensino regular e tem como público crianças e adolescentes em situação de vulnerabilidade social, sendo mantida por um grupo privado de educação e seus investidores.

2 A "caixa pedagógica", mencionada no diálogo, é uma caixa organizadora que a escola monta para o professor com os materiais que ele mais usa em sala. No caso da professora pesquisadora, sua caixa contém réguas, tesouras, transferidores, colas, canetinhas, lápis de cor, palitos de sorvete e palitos de madeira de 25 cm.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à resolução de problemas fechados:** análise de uma experiência. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que através da Resolução de Problemas? *In*: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (org). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2021.

BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. (Ed.). **O pensamento Matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem**. [S. l.]: LF Editorial, 2023.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini (9º ano)**. 8. ed. São Paulo, SP: Moderna, 2015.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. [S. l.]: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 14 nov. 2024.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. *In:* POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre, RS: ArtMed, 1998. p. 13-42.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização:** a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

MACHADO, G. F. A. N. **Semelhança de triângulos através da resolução de problemas:** uma análise do pensamento geométrico. 2025. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2025.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **An Agenda for Action:** Recommendations for School Mathematics of the 1980's. Reston: NCTM, 1980.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Principles and standards for school mathematics.** Reston: NCTM, 2000.

SOARES, Paula Vieira. Plano de aula: Semelhança de Triângulos. **Nova Escola**, 2018. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/6ano/matematica/semelhanca-de-triangulos/432. Acesso em: 5 jun. 2024

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, p.73-98, 2011.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, v.4, n.2, p.65-74, 1996.

POLYA, G. **How to Solve It:** A New Aspect of Mathematical Method. Princeton: Princeton University Press, 1944.

SANTOS, N. P.; JUSTULIN, A. M. O conceito de Função trabalhado através da Resolução de Problemas. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v.15, n.4, p.1–23, 2024. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/4573. Acesso em: 5 maio 2025.

SCHROEDER, T. L., LESTER, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. *In*: TRAFTON, P. R., SHULTE, A. P. (Orgs.). **New directions for elementary school mathematics.** Reston: NCTM, 1989. p.31-42.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. [S. l.]: Penso Editora, 2009.

VAN HIELE, P. M. Developing geometric thinking through activities that begin with play. **Teaching Children Mathematics***,* v.5, n. 6, p.310–316, 1999.

Recebido: 08 agosto 2025.
Aprovado: 04 novembro 2025.
DOI: http://dx.doi.org/10.3895/etr.v9n3.20696.
Como citar:
MACHADO, Graziella Fátima Amorin Natali; JUSTULIN, Andresa Maria. Casos de semelhança de triângulos através da Resolução de Problemas: um estudo do pensamento geométrico. **Ens. Tecnol. R.,** Londrina, v. 9, n. 3, p. 610-628, set./dez. 2025. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/etr/article/view/20696. Acesso em: XXX.
Correspondência:
Graziella Fátima Amorin Natali Machado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática. Avenida João Miguel Caram, 3131, bloco A, sala 101, Jd. Morumbi. Londrina, Paraná, Brasil.