Ensino e Tecnologia em Revista

ISSN: 2594-3901

http://periodicos.utfpr.edu.br/etr

Perspectivas de pensamento matemático e de raciocínio matemático em dissertações do Grupo MEPPE

Henrique Rizek Elias
henriqueelias@utfpr.edu.br
orcid.org/0000-0002-9660-7303
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Londrina, Paraná, Brasil.

Daniele Peres da Silva Martelozo
daniele.martelozo@escola.pr.gov.br
orcid.org/0000-0002-9881-5907
Secretaria de Estado da Educação do Paraná (Seed). Primeiro de Maio, Paraná, Brasil.

Laís Cristina Viel Gereti
lais.gereti@ufu.br
orcid.org/0000-0002-5258-2757
Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal da Universidade Federal de Uberlândia (ICENP/UFU). Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

Laís Maria Costa Pires de Oliveira
laismariaa@gmail.com
orcid.org/0000-0002-8259-1048
Universidade Estadual do Paraná (Unespar). Paranavaí, Paraná, Brasil.

RESUMO

Desenvolver o pensamento ou o raciocínio matemático dos estudantes vai além de manipular fórmulas e algoritmos matemáticos. Da mesma maneira, raciocinar proporcionalmente requer capacidades que transcendem apenas o emprego da regra de três, por exemplo. Para tanto, é necessário um ensino que não seja focado exclusivamente em regras, conteúdos e fórmulas, mas que priorize as diferentes formas de pensar. Neste artigo teórico, temos como objetivo argumentar sobre a importância de se buscar o desenvolvimento do pensamento ou raciocínio matemático dos estudantes ao invés de colocar os conteúdos matemáticos como a finalidade do ensino. Nesse contexto, apresentamos e discutimos quatro dissertações de mestrado profissional produzidas por estudantes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, multicampi Cornélio Procópio e Londrina, e realizadas no âmbito de um grupo de pesquisa. Tais pesquisas, em que o foco da aula não era o conteúdo, planejaram cuidadosamente tarefas com dinâmicas que favorecem e estimulam a participação dos estudantes, cujos resultados revelam que os processos de pensamento ou de raciocínio matemático tendem a se manifestar enquanto os estudantes produzem seus modos de fazer matemática. Dentre os diferentes modos de pensar, temos nos debruçado em compreender o raciocínio proporcional, dada a sua relevância para a aprendizagem da Matemática, assim como para outras áreas, e considerando a complexidade e dificuldade de seu desenvolvimento, pretendemos investigar acerca de aspectos do desenvolvimento do raciocínio proporcional de estudantes e professores, por meio de trabalhos que promovam processos formativos para professores que ensinam Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Pensamento Matemático. Raciocínio Matemático. Raciocínio Proporcional.

INTRODUÇÃO

Não é incomum escutarmos ou lermos, tanto de estudantes da Educação Básica como de adultos já formados, questionamentos a respeito das razões pelas quais devemos estudar Matemática. Nas redes sociais, por exemplo, eles são, geralmente, em tom de humor e se referem a tópicos como a fórmula de Bhaskara e o Teorema de Pitágoras[1] revelando que essas fórmulas (ou, pelo menos, esses nomes), constantemente trabalhadas nas aulas de Matemática, parecem ficar na memória das pessoas como um resquício daquilo que estudam ou estudaram na escola.

Parte desses questionamentos pode ser atribuída ao ensino excessivamente focado em regras, conteúdos e fórmulas, fato que não é recente. D'Ambrosio (1989, p. 15) já mencionava que se o ensino for dessa maneira, "os alunos passam a acreditar que a aprendizagem de matemática se dá através do acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras". Além disso, se, no cotidiano das pessoas, tais regras e fórmulas não são necessárias, tornam-se compreensíveis os questionamentos sobre a necessidade da Matemática, pois, se ensinar Matemática é ensinar conteúdos e se esses conteúdos não têm utilidade no cotidiano das pessoas, então sua necessidade se torna questionável. Comentários como "mais um dia sem utilizar a fórmula de Bhaskara" tornam-se comuns.

Qual seria, então, uma alternativa a esse foco em fórmulas e com a finalidade de abordar determinados conteúdos? Concordamos com Bianchini e Lima (2023) quando consideram que os conteúdos matemáticos devem estar a serviço do desenvolvimento de diferentes formas de pensar. Segundo os autores, "[...] a razão pela qual todos os cidadãos devem estudar Matemática na Educação Básica é que seu aprendizado favorece o desenvolvimento de uma estrutura mental analítica, isto é, de *como pensar de forma estruturada*" (Bianchini; Lima, 2023, p. 4, grifo do autor).

Um exemplo evidente desse contraponto entre o ensino com foco em fórmulas, regras ou conteúdos e o ensino com vistas ao desenvolvimento de diferentes formas de pensar pode ser visto em Lamon (2020). Autora de um dos trabalhos mais citados no Brasil sobre raciocínio proporcional, Lamon (2020) estima que mais de 90% dos adultos não raciocinam proporcionalmente e explica que há uma diferença entre raciocinar proporcionalmente e apenas usar regras (por exemplo, a regra de três) para resolver problemas que envolvam proporcionalidade. Segundo Lamon (2020), muitas pessoas que não desenvolveram seu raciocínio proporcional compensam isso utilizando regras, de maneira mecânica, para lidar com a Matemática, mas, no fim, as regras são um substituto pobre para a construção de sentido sobre ideias matemáticas.

O Grupo MEPPE[2] - *Matemática Escolar: práticas, pesquisas e estudos*, do qual todos os autores deste artigo fazem parte, têm se dedicado a desenvolver pesquisas voltadas a investigar o pensamento ou o raciocínio matemático dos estudantes, buscando superar e propor alternativas a esse modelo (ainda) vigente de um ensino de Matemática com foco em conteúdos, fórmulas, técnicas e regras. Dessa maneira, neste artigo teórico, temos como objetivo argumentar sobre a importância de se buscar o desenvolvimento do pensamento ou raciocínio matemático dos estudantes ao invés de colocar os conteúdos matemáticos como a finalidade do ensino. Faremos isso por meio da apresentação e da discussão de quatro dissertações de mestrado profissional produzidas por estudantes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT), *multicampi* Cornélio Procópio e Londrina, e realizadas no âmbito no Grupo MEPPE. A escolha por essas quatro pesquisas se deu pelo fato de que são todas as dissertações defendidas até o momento no âmbito do Grupo MEPPE que investigam o pensamento ou raciocínio matemático de estudantes de diferentes níveis (anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e Universidade), com dados produzidos em sala de aula.

A primeira dissertação, Silva (2024), abordou o pensamento algébrico (Blanton; Kaput, 2005; Canavarro, 2007); a segunda, Toginho (2024), abordou o pensamento geométrico na perspectiva de van Hiele (Kaleff *et al*. 1994); a terceira, Santos (2025), e a quarta, Shiinoki (2025), abordaram o raciocínio matemático (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020; Jeannotte; Kieran, 2017). Após apresentarmos e discutirmos essas quatro pesquisas, dando um panorama do que realizamos no passado, abordaremos as intenções futuras de pesquisa do Grupo MEPPE, que abordará o raciocínio proporcional de estudantes e professores. Antes de entrarmos nas discussões acerca das quatro dissertações, apresentamos uma breve discussão teórica sobre pensamento matemático e raciocínio matemático.

PENSAMENTO MATEMÁTICO E RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Do que falamos quando abordamos as expressões Pensamento Matemático (PM) e Raciocínio Matemático (RM)? Qual o entendimento para estes conceitos? Em qual contexto e para qual finalidade estamos falando? Estas são algumas indagações que podem surgir quando se discute PM ou RM. Tais indagações norteiam esta seção a fim de sistematizar aspectos essenciais que permitem caracterizar o PM e o RM a partir de perspectivas teóricas de pesquisadores que se dedicam a investigar e problematizar esses conceitos (Tall, 2013; Dreyfus, 2002; Gomes; Bianchini; Lima, 2023; Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020; Araman; Serrazina; Ponte; 2020).

Antes de discorrermos sobre entendimentos para o PM e o RM, por vezes, no senso comum, os termos pensamento e raciocínio são tidos como sinônimos. No entanto, no âmbito acadêmico, a depender do referencial teórico adotado, pensamento e raciocínio podem não ter o mesmo significado. Por exemplo, Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020, p. 156) consideram que "raciocinar é realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado" e que, "Descrever um objeto, relatar um acontecimento, exprimir um sentimento ou formular um desejo, sem mais, envolvem pensamento, mas podem não envolver raciocínio". Nessa diferenciação, o raciocínio pode ser entendido como um processo mental que requer inferências, logo, raciocinar indica tratar-se de uma forma de pensar com características específicas e mais elaboradas.

Neste artigo, não assumimos um ou outro termo, pois, nas pesquisas realizadas pelo Grupo MEPPE, adotamos os termos e as concepções a partir de referenciais teóricos diversos, tal como apresentamos nos próximos parágrafos.

Não há um consenso entre pesquisadores quanto a uma caracterização para o PM, da mesma maneira decorre para o RM. No entanto, trata-se de conceitos importantes, sendo mobilizados e desenvolvidos em situações educacionais, no domínio da Matemática e em outras áreas da ciência, assim como também estão presentes e se desenvolvem em diferentes contextos que extrapolam as esferas educacionais (Tall, 2013; Dreyfus, 2002; Gomes; Bianchini; Lima, 2023; Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020).

A partir de um vasto estudo em busca de compreensões e concepções para o PM, apoiados em diferentes pesquisadores, de nacionalidades e quadros teóricos distintos, Gomes, Bianchini e Lima (2023, p.21), enfatizam convergências identificadas sobre o PM, que definem como:

> [...] um tipo especial de pensamento, também necessário para muitas das atividades cotidianas, sociais e profissionais exercidas por um cidadão. Pode ser estendido como o resultado de processos racionais do intelecto ou de abstrações da imaginação realizados a partir da observação e reflexão científica de fenômenos de diferentes naturezas, por meio da sistematização e contextualização de conhecimentos matemáticos, da capacidade de perceber visual e espacialmente, de representar, memorizar, pensar de maneira criativa, objetiva, lógica, analítica e crítica.

É evidente a importância desse pensamento ao lidar, gerenciar e resolver tanto problemas e situações de vivências cotidianas como de diferentes áreas no exercício do trabalho, sendo "[...] uma maneira específica de pensar sobre as coisas do mundo, não necessariamente pensar sobre a Matemática" (Gomes; Bianchini; Lima, 2023, p.11). Logo, destacamos a relevância de compreensões de como pensar matematicamente, uma vez que sua mobilização se dá por meio de diferentes representações, verbais e não verbais, formais e informais; desenvolvida desde a infância e em diferentes níveis de complexidade.

Partindo da definição apresentada, para estes autores, a investigação indica que os componentes essenciais do PM são:

> [...] processos racionais do intelecto ou abstrações da imaginação; sistematização e contextualização do conhecimento matemático; observação, reflexão crítica; capacidade de perceber visual e espacialmente, representar e memorizar; pensar de maneira criativa, objetiva, lógica, analítica e crítica (Gomes; Bianchini; Lima, 2023, p. 26).

Ainda sobre a investigação de Gomes, Bianchini e Lima (2023), acerca das concepções abordadas e apresentadas no estudo, destacamos outros componentes do PM concebidos enquanto processos e capacidades, sendo: raciocínios dedutivo, indutivo e lógico; raciocínios qualitativo e quantitativo; generalização; resolução e modelação de problemas diversos; técnica em cálculos e manipulação de símbolos matemáticos; autonomia; construção de novos conhecimentos; conexões entre conceitos matemáticos; justificação.

Como apresentam Bianchini e Lima (2023), diferentes tipos de pensamento integram o pensamento matemático, alguns deles são: pensamento aritmético, pensamento algébrico, pensamento geométrico, pensamento computacional, pensamento proporcional etc.

Assim como o PM, o RM também não possui uma caracterização única, Segundo Henriques (2012, p. 140), "É difícil definir raciocínio matemático uma vez que este termo é usado por professores e investigadores com uma variedade de significados que estão associados a práticas e abordagens teóricas distintas". Dentre aqueles que buscam uma caracterização, trazemos Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 782), que consideram que “raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas, ou seja, utilizar informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões”.

Para Jeannotte e Kieran (2017), os processos de raciocínio matemático podem ser organizados em três grupos: (i) *identificação de semelhanças e diferenças*, que envolve generalização, conjectura, reconhecimento de padrões, comparação e classificação; (ii) *validação*, que inclui justificação e prova; e (iii) *apoio a outros processos de raciocínio*, como exemplificação.

Considerando essas concepções sobre compreensões do que consistem o PM e o RM, as quais partilhamos, é essencial retomarmos a um dos questionamentos propostos no início dessa seção o qual também nos motiva e orienta este texto: Em qual contexto e para qual finalidade estamos falando quando tratamos de PM e de RM? E, faz sentido acrescentarmos outro questionamento que decorre do anterior: como promover o PM e ou o RM dos estudantes em sala de aula?

Embora as discussões apresentadas para o PM e o RM advêm de perspectivas teóricas diferentes, sobretudo, apresentadas com terminologias distintas, estas trazem pontos em comum: são essenciais para diferentes demandas, escolares e em outros âmbitos; também convergem e comungam enquanto orientações que problematizam o ensino de matemática ao tratarem da importância desse pensar e raciocinar na aprendizagem da Matemática em todos os níveis de escolaridade e que seja alicerçado em um ensino pautado na compreensão.

É pertinente repensar o ensino e a aprendizagem da Matemática no âmbito educacional, pois

> O foco do processo de ensino-aprendizagem não pode ser a transmissão de um corpo de conhecimentos estabelecido e a memorização de procedimentos, é necessário que os professores desenvolvam uma cultura de sala de aula que promova o raciocínio matemático proporcionando aos alunos atividades em que os processos de raciocínio e a construção de conceitos surjam de uma forma natural (Henriques, 2012, p.1).

Compartilhando dessa ideia, Gomes, Bianchini e Lima (2023, p. 11) sugerem uma reorientação do ensino da Matemática em que os conteúdos trabalhados ao longo dos anos de escolaridade, organizados nas unidades temáticas, estejam à serviço das diferentes formas de pensamento, “[...] não só diretamente articuladas com a Matemática, mas também que a transcendem”.

PESQUISAS DESENVOLVIDAS NO GRUPO MEPPE

Quando buscamos colocar os conteúdos matemáticos a serviço do desenvolvimento de diferentes formas de pensar, é preciso considerar, também, diferentes abordagens de ensino, evitando aquela que prioriza a transmissão de conhecimento. D’Ambrosio (1989, p. 16) nos mostra que não são recentes as abordagens de ensino que “colocam o aluno como centro do processo educacional, enfatizando o aluno como ativo no processo de construção de seu conhecimento”. Nessa direção, a autora menciona alguns exemplos de abordagens de ensino como: Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, uso de jogos matemáticos, História da Matemática etc.

Nas pesquisas desenvolvidas pelo Grupo MEPPE, temos adotado o Ensino Exploratório (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013) como abordagem de ensino em aulas que visam desenvolver o pensamento ou raciocínio matemático dos estudantes. Foi assim com as pesquisas de Silva (2024), Toginho (2024) e Santos (2025). Nessas três pesquisas, a seleção ou elaboração de tarefas exploratórias foi fundamental para o desenvolvimento das aulas pautadas no Ensino Exploratório. A única pesquisa que utilizou outra abordagem de ensino foi Shiinoki (2025), que fez uso da Abordagem Instrucional 4A (Powell, 2018), considerando uma sequência de atividades adaptadas de Amaral, Souza e Powell (2021).

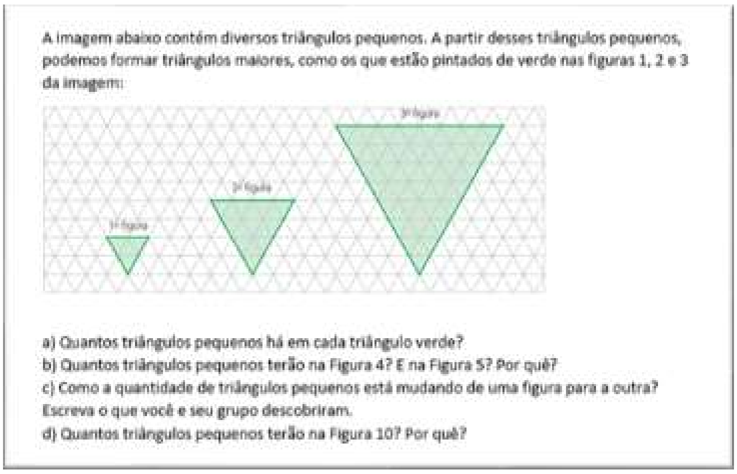
Na sequência, vamos apresentar brevemente as quatro pesquisas. Para cada uma delas, vamos destacar o objetivo, o contexto em que foi realizada, o referencial teórico adotado, um exemplo de tarefa ou atividade utilizada em sala de aula e as principais conclusões a respeito do pensamento ou raciocínio matemático.

O PENSAMENTO ALGÉBRICO EM SILVA (2024)

A dissertação de Silva (2024) teve como objetivo analisar manifestações do pensamento algébrico de estudantes do 6° ano do Ensino Fundamental ao realizarem tarefas que visam promover a construção da operação de potenciação. A escolha por investigar o tema potenciação no 6º ano se deu pelo fato de ser um ano de transição entre os anos iniciais e os anos finais do Ensino Fundamental.

Com base em Canavarro (2007), que afirma que o coração do pensamento algébrico está na generalização, Silva (2024) considerou que a identificação de regularidades e padrões de sequências numéricas, bem como a generalização desses padrões, poderiam contribuir para o ensino de potenciação, evitando um ensino pautado na apresentação da simbologia e pela explicação da técnica de operação. Por exemplo, ao invés de focar a realização do "cálculo" ou na representação $a^n = \underbrace{a.a.a \dots a}_{n}$, Silva (2024) considerou ser possível introduzir o tema potenciação por meio do desenvolvimento do pensamento algébrico pelo reconhecimento de padrões e da generalização. Para tanto, foram utilizadas duas tarefas matemáticas, ao longo de cinco aulas, em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do Paraná que contava com 35 alunos. Na Figura 1, apresentamos uma dessas tarefas exploratórias.

Figura 1 – A tarefa dos triângulos



Fonte: Silva (2024)

Os termos padrão e generalização foram considerados por Silva (2024) da mesma forma que Vale (2012, p. 186), quando afirma que a “ideia fundamental num padrão envolve repetição e mudança”, sendo possível identificar dois tipos de padrão: “Um padrão será de repetição quando há um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente. Um padrão será de crescimento quando cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior”. Além disso, tarefas que abordam padrões podem envolver dois tipos de generalização:

> [...] a *generalização próxima* que se refere à descoberta do termo seguinte e que podem ser obtidos por contagem, desenho ou por recurso a uma tabela e que normalmente envolve relações recursivas, e a *generalização distante* que envolve a descoberta do padrão e que requer uma compreensão da lei de formação, ou seja, uma regra geral através de uma expressão matemática, e requer a procura de relações funcionais (Vale, 2012, p. 190, grifo do autor).

Vale (2012, p.10) diz ainda que a seleção das tarefas é crucial se o professor pretende criar experiências de resolução de problemas que permitam aos alunos fazerem generalizações.

Dentre as conclusões apresentadas por Silva (2024) e no artigo Elias, Gereti, Martelozo e Silva (2023), destacamos o fato de que a tarefa permitiu discussões entre os integrantes do grupo a respeito do *padrão de crescimento* envolvido nos triângulos, em um primeiro momento olhando para a diferença entre a quantidade de triângulos, em outro momento estabelecendo uma relação de multiplicação. Ao terem que justificar essa relação para as figuras 4 e 5, ficaram confusos sobre como fazer e encontram uma justificativa que não permitiu aos estudantes determinarem uma regra para a quantidade de triângulos para uma figura n, sendo possível perceber que os estudantes mobilizaram indícios de uma *generalização próxima*. Não ficou evidenciado nos dados a *generalização distante* por parte dos alunos, mas a Tarefa 1 mostrou-se oportuna para o professor poder engendrar uma discussão no sentido de chamar a atenção dos estudantes para a importância da notação de potenciação (a^n) na representação de números grandes, como, no contexto da Tarefa 1, 4^{10} (Silva, 2024).

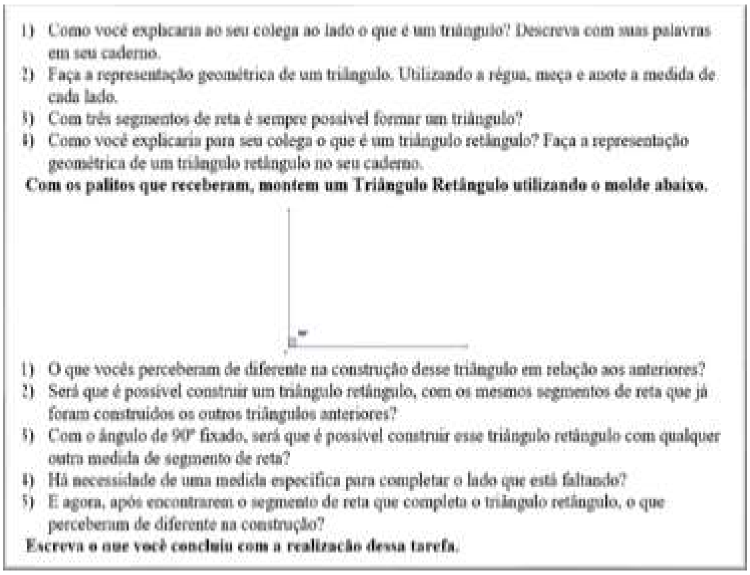
O PENSAMENTO GEOMÉTRICO EM TOGINHO (2024)

A dissertação de Toginho (2024) teve como objetivo identificar e caracterizar manifestações do pensamento geométrico de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental ao trabalharem com tarefas matemáticas que visavam introduzir o Teorema de Pitágoras. Foram seis aulas em uma turma de 9º ano de uma escola pública do Paraná que contava com 22 alunos.

Conforme apresenta Toginho (2024), o objetivo geral das aulas foi introduzir o Teorema de Pitágoras por meio de tarefas matemáticas que permitissem que os alunos: (i) resgatassem conhecimentos prévios que pudessem contribuir, posteriormente, para a compreensão do Teorema de Pitágoras; (ii) explorassem características e propriedades de um triângulo e, em particular, de triângulo retângulo; e (iii) percebessem, por eles próprios, que, no triângulo retângulo, a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma das medidas de cada cateto ao quadrado.

A Figura 2 traz um exemplo de uma das tarefas exploratórias utilizadas por Toginho (2024). No caso específico desta tarefa, o objetivo era resgatar o conhecimento que os alunos já possuíam a respeito do que é um triângulo, da condição de existência de um triângulo e, em particular, do que é um triângulo retângulo.

Figura 2 – A tarefa de reconhecimento de triângulos


1) Como você explicaria ao seu colega ao lado o que é um triângulo? Descreva com suas palavras em seu caderno.
2) Faça a representação geométrica de um triângulo. Utilizando a régua, meça e anote a medida de cada lado.
3) Com três segmentos de reta é sempre possível formar um triângulo?
4) Como você explicaria para seu colega o que é um triângulo retângulo? Faça a representação geométrica de um triângulo retângulo no seu caderno.

Com os palitos que receberam, montem um Triângulo Retângulo utilizando o molde abaixo.

1) O que vocês perceberam de diferente na construção desse triângulo em relação aos anteriores?
2) Será que é possível construir um triângulo retângulo, com os mesmos segmentos de reta que já foram construídos os outros triângulos anteriores?
3) Com o ângulo de 90º fixado, será que é possível construir esse triângulo retângulo com qualquer outra medida de segmento de reta?
4) Há necessidade de uma medida específica para completar o lado que está faltando?
5) E agora, após encontrarem o segmento de reta que completa o triângulo retângulo, o que perceberam de diferente na construção?

Escreva o que você concluiu com a realização dessa tarefa.

Fonte: Toginho (2024)

Para se trabalhar essa tarefa, segundo Toginho (2024), jogos com três palitos de madeira com diferentes comprimentos, conforme Figura 3, foram disponibilizados aos alunos. Havia jogos com três palitos que formavam um triângulo e jogos com três palitos que não formavam um triângulo.

Figura 3 – Jogos de três palitos de madeira com diferentes comprimentos

Fonte: Toginho (2024)

Para analisar os dados, Toginho (2024) utilizou o modelo de van Hiele do pensamento geométrico, que considera cinco níveis de compreensão: nível 0 - *visualização* (ou reconhecimento), nível 1 - *análise*, nível 2 - *dedução informal* (ou ordenação), nível 3 - *dedução formal* e nível 4 - *rigor* (Kaleff *et al*., 1994).

Da análise dos dados, Toginho (2024) concluiu que os alunos do grupo analisado não enunciaram, de maneira autônoma, a condição de existência do triângulo, ficando a cargo da professora promover essa formalização. Por outro lado, os alunos do grupo compreendem, de forma autônoma, a relação entre o quadrado da medida de cada lado do triângulo retângulo e chegaram à conclusão por meio do trabalho com a malha quadriculada. Coube à professora enunciar o Teorema de Pitágoras em termos dos catetos e da hipotenusa, mas o alicerce para a compreensão do teorema já estava construído pelos alunos. Nesse caso, Toginho (2024) concluiu que os alunos manifestaram o nível 2 - deduções informais ou ordenação, pois chegaram a estabelecer interrelações de propriedades em figuras, como quando perceberam que apenas no caso do triângulo retângulo, a medida de um lado ao quadrado é igual à soma das medidas dos outros dois ao quadrado.

Em síntese, a pesquisa de Toginho (2024) mostrou que os alunos puderam tratar de uma maneira inicial (nível 0) ao lidarem conceitualmente com a noção de triângulo – acreditando que a base de um triângulo é algo que define sua existência e focando no formato do triângulo – e, com o auxílio de materiais manipuláveis (palitinhos e malha quadriculada para recortar e colar quadradinhos), avançarem para um pensamento abstrato (nível 2) ao lidarem com características relacionadas a determinados tipos de triângulos, como o Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos.

O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM SANTOS (2025)

O objetivo da pesquisa de Santos (2025) foi identificar e discutir as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático dos estudantes durante a realização de uma tarefa exploratória em uma turma de Engenharia na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Os dados da pesquisa foram produzidos ao longo de seis aulas da disciplina EDO oferecida para uma turma composta por 35 alunos dos cursos de Engenharia Química e Engenharia Ambiental da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

A tarefa exploratória, apresentada na Figura 4, pretendia que os alunos construíssem, analisassem e discutissem um modelo matemático (utilizando uma EDO) para descrever o resfriamento ou o aquecimento de um recipiente com água (quente ou fria) quando colocada em temperatura ambiente, modelo matemático da Lei do Resfriamento de Newton.

Figura 4 – Tarefa do resfriamento/aquecimento da água

Primeiro momento (dia 12 de abril)	Realize as medições de temperaturas da água.
Segundo momento (dia 17 de abril)	Com base nos dados, encontre um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t.
Terceiro momento (dia 19 de abril)	Discuta e analise o modelo matemático obtido na aula anterior.

Fonte: Santos (2025)

Para as análises dos dados, Santos (2025) considerou categorias *a priori* para as ações do professor (*convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir* e *desafiar*), de acordo com Araman, Serrazina e Ponte (2019), e para os processos de raciocínio matemático dos estudantes (*conjecturar, generalizar e justificar*), segundo Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) e Morais, Serrazina e Ponte (2018).

Tanto Santos (2025) como Santos, Elias e Araman (2025) trazem conclusões a respeito das ações do professor. No entanto, como nosso foco aqui está no raciocínio matemático, vamos destacar as conclusões especificamente relacionadas a esse aspecto. O primeiro momento, quando os estudantes coletaram dados com o termômetro, foi rico na elaboração de conjecturas seguidas de justificativas por parte dos estudantes, algumas delas foram centrais para a continuidade da tarefa. O segundo momento, isto é, a busca por um modelo matemático, oscilou entre encontrar uma função (exponencial ou polinomial do segundo grau) e uma EDO. Esse foi um momento em que, além dos processos de conjecturar e de justificar, foi possível perceber o processo de generalização. Após terem compartilhado com a sala toda o modelo matemático construído, o terceiro momento ocorreu durante a resolução da EDO, que exigiu dos alunos do grupo analisado decidirem qual a melhor estratégia de resolução (o método das equações separáveis), considerarem a constante de integração ao se resolver uma integral indefinida, escolherem a condição inicial para encontrar o valor dessa constante de integração e da constante de proporcionalidade. Todas essas tomadas de decisão, por parte dos alunos, exigiram deles a elaboração de conjecturas e de justificativas, convergindo para a generalização de um modelo matemático para a situação estudada.

O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM SHIINOKI (2025)

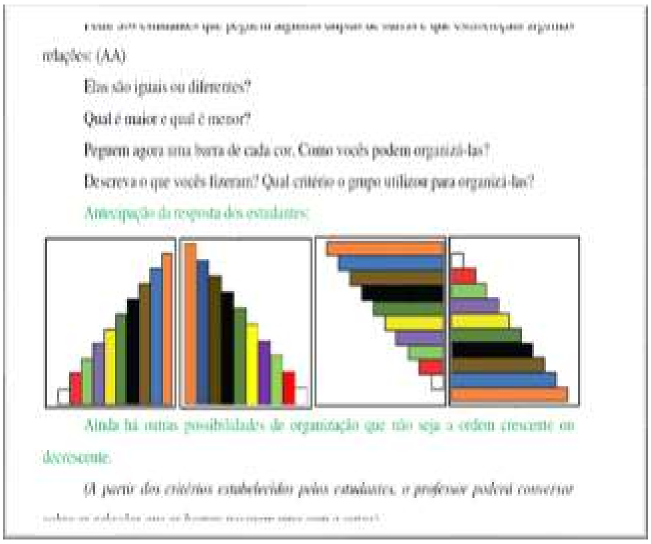
O objetivo de Shiinoki (2025) foi analisar os processos de raciocínio matemático manifestados por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental durante o ensino de frações, na perspectiva de medição, segundo Abordagem Instrucional 4A (Powell, 2018). Os dados foram produzidos ao longo de oito aulas em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal no Paraná que contava com 30 alunos.

Para a realização das aulas, Shiinoki (2025) utilizou e adaptou atividades propostas por Amaral, Souza e Powell (2021). Tais atividades visavam o desenvolvimento do conceito de fração pela perspectiva de medição, fazendo uso das barras de Cuisenaire como material manipulativo. Assim, o foco da proposta de ensino de frações estava nas relações multiplicativas entre as barras, distanciando-se da abordagem tradicional de fração como parte-todo (Shiinoki, 2025).

No primeiro dia de aula, por exemplo, Shiinoki (2025) buscou que os alunos realizassem: (i) manipulação das barras de Cuisenaire; (ii) comparação entre os comprimentos das barras; (iii) as relações entre as barras (múltiplos e não múltiplos); (iv) elaboração da simbologia para as cores das barras.

A Figura 5 mostra uma parte das atividades planejadas e desenvolvidas na primeira aula. Já a Figura 6 mostra outra parte das atividades planejadas e desenvolvidas na terceira aula.

Figura 5 – Atividade de reconhecimento das barras de Cuisenaire



relações: (AA)

Elas são iguais ou diferentes?

Qual é maior e qual é menor?

Peguem agora uma barra de cada cor. Como vocês podem organizá-las?

Descreva o que vocês fizeram? Qual critério o grupo utilizou para organizá-las?

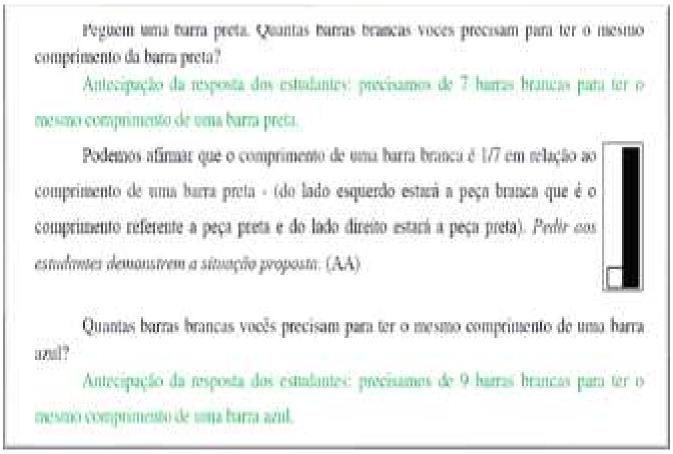
Antecipação da resposta dos estudantes:

Ainda há outras possibilidades de organização que não seja a ordem crescente ou decrescente.

(A partir dos critérios estabelecidos pelos estudantes, o professor poderá conversar

Fonte: Shiinoki (2025)

Figura 6 – Atividade das frações por meio das barras de Cuisenaire



Peguem uma barra preta. Quantas barras brancas vocês precisam para ter o mesmo comprimento da barra preta?

Antecipação da resposta dos estudantes: precisamos de 7 barras brancas para ter o mesmo comprimento de uma barra preta.

Podemos afirmar que o comprimento de uma barra branca é 1/7 em relação ao comprimento de uma barra preta - (do lado esquerdo estará a peça branca que é o comprimento referente a peça preta e do lado direito estará a peça preta). *Pedir aos estudantes demonstrem a situação proposta.* (AA)

Quantas barras brancas vocês precisam para ter o mesmo comprimento de uma barra azul?

Antecipação da resposta dos estudantes: precisamos de 9 barras brancas para ter o mesmo comprimento de uma barra azul.

Fonte: Shiinoki (2025)

Ens. Tecnol. R., Londrina, v. 9, n. 3, p. 646-665, set./dez. 2025.

Para as análises dos dados, Shiinoki (2025) focou nos processos de raciocínio matemático manifestados pelos estudantes segundo Jeannotte e Kieran (2017). A autora considerou cinco processos: *comparar*, *conjecturar*, *classificar*, *generalizar* e *justificar*.

Após as análises dos dados, Shiinoki (2025) concluiu que a Abordagem Instrucional 4A favoreceu a identificação dos processos de raciocínio matemático durante as aulas de frações. A autora identificou todos os processos sendo mobilizados pelos estudantes, alguns em maior intensidade (comparar e conjecturar), outros em menor intensidade (classificar e generalizar). Uma conclusão que destacamos, por exemplo, diz respeito a uma estudante que generalizou o fato de que, para frações com denominadores iguais, a fração com o numerador maior é sempre a maior, demonstrando a capacidade dos estudantes de aplicar uma conclusão específica a uma situação mais ampla (Shiinoki, 2025). Essa generalização se deu por conta da sequência de atividades desenvolvidas com as barras de Cuisenaire e com a mediação da professora, mas foi manifestada pela própria estudante, sem que a professora precisasse lhe mostrar tal propriedade.

DISCUSSÃO ENVOLVENDO AS QUATRO PESQUISAS

As quatro pesquisas apresentam um aspecto em comum, em todas elas os estudantes eram estimulados a chegarem, por si mesmos, na ideia matemática pretendida pelo professor ou pela professora. O foco da aula não era o conteúdo. Não foi apresentado, de início, o conteúdo novo e, em seguida, exercícios de repetição para os estudantes memorizá-lo. Nessas dissertações, os conteúdos pretendidos estavam a serviço do desenvolvimento do pensamento ou raciocínio matemático dos estudantes.

Em Silva (2024), o conteúdo novo era a potenciação, que foi construído pelos estudantes por meio do reconhecimento de padrão e da generalização. Em Toginho (2024), o conteúdo novo era o Teorema de Pitágoras, que foi construído pelos estudantes por meio da percepção, por eles mesmos, de que, para um determinado tipo de triângulo (o triângulo retângulo), há uma propriedade comum que sempre vale, que é a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma das medidas de cada cateto ao quadrado. Em Santos (2025), o conteúdo de EDO de primeira ordem e, em particular, as equações de variáveis separáveis já haviam sido trabalhadas pelo professor em sala de aula, mas havia a intenção do professor de introduzir um modelo matemático tradicional, a Lei do Resfriamento de Newton, que foi construído por meio de uma experimentação realizada pelos próprios estudantes. Em Shiinoki (2025), os conteúdos novos eram as frações e a comparação de frações, que foram construídos por meio da manipulação das barras de Cuisenaire, ao mesmo tempo em que algumas notações eram combinadas e escolhidas durante as aulas.

Nas quatro pesquisas aqui apresentadas, uma conclusão comum foi a de que, com tarefas ou atividades cuidadosamente planejadas e com o desenvolvimento dessas tarefas em aulas com dinâmicas que favoreçam e estimulem a participação dos estudantes (como ocorre no Ensino Exploratório e na Abordagem Instrucional 4A), os processos de pensamento ou de raciocínio matemático tendem a se manifestar enquanto os estudantes produzem seus modos de fazer matemática.

É necessário destacar, também, o papel do professor em todas essas pesquisas. Apesar de os estudantes participarem do processo de construção de seu conhecimento (D'Ambrosio, 1989), os professores nas pesquisas apresentadas tiveram papel central. As quatro pesquisas apresentam reflexões sobre o papel e os desafios do professor em aulas que fogem do ensino tradicional com foco no professor e na transmissão do conhecimento. Silva (2024, p. 74) afirma que "Um desses desafios envolve a orquestração das discussões matemáticas coletivas, isto é, a busca por manter os alunos ativos e interessados e, ao mesmo tempo, evitando dar respostas que diminuam o nível cognitivo das tarefas". Na mesma linha, Toginho (2025, p. 79) considera que um desafio "é controlar as questões e comentários que se oferecem aos alunos durante o trabalho autônomo, de modo a não lhes indicar a estratégia a seguir, reduzindo o desafio intelectual das tarefas, diminuindo o potencial da discussão matemática". Santos (2025) tem a mesma percepção e afirma que observou "momentos em que o professor assume um papel excessivamente diretivo [...], fazendo perguntas relevantes e, ele mesmo, as respondendo". Para Shiinoki (2025, p. 70), "Outra dificuldade foi promover o envolvimento de todos os estudantes em cada grupo durante a resolução das atividades e as discussões subsequentes".

Por fim, um desafio comum às quatro pesquisas, que está relacionado ao fato de envolver os estudantes na construção de seus conhecimentos matemáticos, diz respeito ao tempo demandado nas aulas. Envolver os estudantes durante as aulas exige mais tempo do que o modelo de aula tradicional centrado no professor. As quatro pesquisas relataram a mesma dificuldade, a quantidade de aulas planejadas para o desenvolvimento das intervenções foi insuficiente para o que era desejado. O que nos leva a reflexões a respeito das dificuldades de implementação dessas abordagens na realidade cotidiana das salas de aula, isto é, para além de episódios esporádicos de intervenções devido a pesquisas realizadas em sala de aula.

PESQUISAS FUTURAS: RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

O raciocínio proporcional é fundamental para a aprendizagem da Matemática, da Física e da Química, na medida em que possibilita a interpretação de relações entre grandezas. No campo da Matemática, além de fundamental para Álgebra, Geometria e Trigonometria, o raciocínio proporcional representa o ponto culminante de conceitos de Aritmética e Medida, ao mesmo tempo em que serve de base para áreas mais avançadas da Matemática (Silvestre; Ponte, 2006). Além disso, está presente desde a infância, sendo necessário "realizar um trabalho pedagógico com o pensamento proporcional desde a Educação Infantil, considerando a especificidade da faixa etária e promovendo propostas que envolvam a roda de conversa, a brincadeira e o desenho" (Vilas Boas; Godoi; Silva, 2024, p. 3). Dada a sua relevância no desenvolvimento escolar, seja para a aprendizagem da Matemática, seja para outras áreas, esse raciocínio tem sido tema de investigação e discussão no campo da Educação Matemática e da Psicologia (Costa; Ponte, 2008).

Não há uma única maneira de definir ou caracterizar o raciocínio proporcional. Para Lamon (2020), este raciocínio refere-se à capacidade de pensar de maneira progressiva e regressiva em situações nas quais exista uma relação invariante (constante) entre duas quantidades que estão ligadas e variando juntas. Uma característica fundamental para o desenvolvimento do raciocínio proporcional é a capacidade de distinguir entre os raciocínios aditivo e multiplicativo em uma determinada situação (Lamon, 2020; Modestou; Gagatsis, 2010; Proulx, 2024).

Segundo Modestou e Gagatsis (2010), um "pensador proporcional" não pode ser identificado como alguém que resolve mecanicamente uma proporção. Para os autores, o amplo uso de algoritmos, como o da multiplicação cruzada, não indica que todas as pessoas que resolvem corretamente um problema envolvendo proporções necessariamente usam o RP; ao contrário, é a capacidade de decidir se um problema envolve proporcionalidade direta ou inversa, raciocínio aditivo ou qualquer outra relação numérica que é essencial para o raciocínio proporcional (Modestou; Gagatsis, 2010).

Dada essa relevância do raciocínio proporcional para a formação do cidadão e considerando a complexidade de seu desenvolvimento e as dificuldades que os estudantes enfrentam ao trabalhar com situações que demandam sua mobilização, nós, integrantes do Grupo MEPPE, temos nos dedicado a estudar e investigar tal temática. Esses estudos ainda estão em fase inicial e fazem parte de nosso projeto futuro de pesquisa.

Desde a metade do ano de 2024, temos estudado na íntegra o livro *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*, de Susan Lamon (2020), que, como já dissemos na introdução deste texto, é um dos trabalhos mais citados sobre o assunto no Brasil. Em paralelo a isso, temos selecionado tarefas matemáticas que demandam o raciocínio proporcional e realizado estudos pilotos (ainda sem a intenção de pesquisa) a partir da implementação dessas tarefas em sala de aula e da realização delas por estudantes dos anos iniciais e anos finais do Ensino Fundamental.

Algumas pesquisas estão sendo realizadas e publicadas sobre a temática. Elias *et al.* (2025) realizaram revisão sistemática da literatura acerca dos temas raciocínio proporcional e proporcionalidade a partir de 41 periódicos. Dos 58 artigos analisados, os autores concluíram que, em geral, as pesquisas brasileiras estão fortemente fundamentadas nos trabalhos de Susan Lamon, do grupo Rational Number Project[3] e de Gérard Vergnaud.

Dois artigos do Grupo MEPPE foram apresentados no XV Encontro Nacional de Educação Matemática (XV ENEM). O primeiro artigo é uma pesquisa bibliográfica que investiga o que trabalhos das cinco últimas edições do ENEM têm revelado/apontado a respeito do raciocínio proporcional. Como resultado desse primeiro artigo, concluímos, por exemplo, que trabalhos analisados destacam desafios comuns enfrentados por estudantes, como dificuldades em justificar seu raciocínio e compreender relações multiplicativas, o que sugere a necessidade de práticas pedagógicas que vão para além do ensino mecânico da regra de três. O segundo artigo analisa respostas de usuários da rede social *Threads* a um suposto problema envolvendo regra de três e, a partir dessa análise, discute a centralidade da regra em detrimento do raciocínio proporcional. Como resultado deste segundo artigo, percebemos, por exemplo, que os usuários da rede social lidam de forma mecânica com proporção, pois fazem uso automático da regra de três sem refletir sobre o enunciado do problema, assumem a regra como sendo de um único tipo (regra de três simples e direta), desconhecem ou desconsideram a relação entre as grandezas, entre outros indícios.

Esses estudos e investigações iniciais têm indicado possibilidades futuras de pesquisas. Temos um projeto de pesquisa em andamento, intitulado "Formação de professores que ensinam matemática e o desenvolvimento do Raciocínio

Proporcional na Educação Básica", em que pretendemos focar nossos esforços enquanto grupo de pesquisa. Iremos selecionar, adaptar, elaborar tarefas matemáticas para trabalhar com estudantes de diferentes anos escolares e, também, promover processos formativos para professores que ensinam matemática. Nosso propósito é disseminar ainda mais a importância do desenvolvimento do raciocínio proporcional dos estudantes em vez de focar na memorização de regras que, em geral, são insuficientes para compreender e interpretar situações cotidianas.

Alinhados à chamada temática "Dez Anos de PPGMAT: Trajetórias traçadas e avanços para a contemporaneidade" da revista Ensino Tecnologia em Revista, finalizamos este texto que descreve trajetórias e avanços de algumas pesquisas de mestrado profissional do PPGMAT, realizadas no âmbito do Grupo MEPPE, e indicamos nosso projeto futuro de investigações.

Perspectives on mathematical thinking and mathematical reasoning in research conducted by the MEPPE group

ABSTRACT

Developing students' mathematical thinking or reasoning goes beyond manipulating formulas and mathematical algorithms. Similarly, proportional reasoning requires abilities that transcend the mere use of the rule of three, for example. To achieve this, it is necessary to promote a type of teaching that is not exclusively focused on rules, content, and formulas, but rather prioritizes different ways of thinking. In this theoretical article, we aim to argue for the importance of seeking the development of students' mathematical thinking or reasoning instead of placing mathematical content as the main goal of teaching. In this context, we present and discuss four professional master's dissertations produced by students from the Graduate Program in Mathematics Education, based on the Cornélio Procópio and Londrina campuses, and developed within a research group. These studies, in which the lesson focused not on content, carefully planned tasks with dynamics that fostered and encouraged student participation. The results reveal that mathematical thinking or reasoning processes tend to emerge as students produce their own ways of doing mathematics. Among the different ways of thinking, we have focused on understanding proportional reasoning, given its relevance to mathematics learning as well as other areas. Considering the complexity and difficulty of its development, we intend to investigate aspects of the development of proportional reasoning in both students and teachers through studies that promote formative processes for teachers who teach mathematics.

KEYWORDS: Mathematical Thinking. Mathematical Reasoning. Proportional Reasoning. MEPPE Group.

NOTAS

1 Esses nomes "fórmula de Bhaskara" e "Teorema de Pitágoras" são questionáveis. Segundo Roque (2012), é possível que apenas no Brasil a fórmula para resolver equação do segundo grau seja associada ao nome de Bhaskara. Bhaskara, segundo a autora, não é o inventor dessa fórmula. No que se refere ao chamado Teorema de Pitágoras, Roque (2012, p. 78) aponta que a "escassez das fontes, somada à convergência interessada dos únicos textos disponíveis, nos permite duvidar até mesmo da existência de um matemático de nome Pitágoras". De acordo com a autora, não se sabe ao certo se a Matemática atribuída a Pitágoras é uma criação de um matemático chamado Pitágoras, de integrantes de uma escola antiga chamada pitagórica (mas não de Pitágoras), ou dos neoplatônicos e neopitagóricos da Antiguidade (Roque, 2012). Para mais informações sobre esses debates, sugerimos a leitura do livro "História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas", da autora Tatiana Roque.

2 O grupo MEPPE está cadastrado no Diretório dos Grupos de Pesquisa do CNPq e pode ser acessado em: dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/8346690438897348.

3 O RNP teve início em 1979 com os pesquisadores Merlyn Behr, Thomas Post e Richard Lesh. Outros pesquisadores, como Kathleen Cramer, foram ingressando no projeto. Tal grupo de investigadores apresentou diversos resultados de pesquisas empíricas e teóricas sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais.

USO DE INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL (IA)

Este artigo não fez uso de Inteligência Artificial em nenhuma etapa de sua realização.

REFERÊNCIAS

AMARAL, C. A. N.; SOUZA, M. A. V. F.; POWELL, A. B. **Fração à moda antiga**. Vitória, ES: Editora Ifes, 2021. Disponível em: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/602100. Acesso em: 03 out. 2025.

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L.; PONTE, J. P. Raciocínio Matemático nos primeiros anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. **Bolema**, v.34, n.67, p.441–461, maio 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n67a05. Acesso em: 03 out. 2025.

BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. Introdução: os conteúdos matemáticos a serviço do desenvolvimento de diferentes formas de pensar. *In:* BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. (Orgs). **O Pensamento Matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem**. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2023.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.36, n.5, p.412–446, 2005. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/30034944. Acesso em: 03 out. 2025.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, v.16, n.2, p.81-118, 2007. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/22816. Acesso em: 03 out. 2025.

COSTA, S.; PONTE, J. P. O Raciocínio Proporcional dos alunos do 2º ciclo do Ensino Básico. **Revista da Educação**, v.16, n.2, p.65-100, 2008. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/4074. Acesso em: 03 out. 2025.

D'AMBROSIO, B. S. Como Ensinar Matemática hoje? **Temas e Debates**, v.1, n.2, 1989. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/td/article/view/2651. Acesso em: 03 out. 2025.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. *In:* TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002. p. 25-41.

ELIAS, H. R. et al. Tarefas exploratórias para o ensino de potenciação: manifestações do pensamento algébrico a partir de uma Investigação Baseada em *Design*. **Perspectivas da Educação Matemática**, v.16, n.42, p.1-21, maio 2023. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/17912. Acesso em: 03 out. 2025.

ELIAS, H. R. et al. Uma revisão sistemática da literatura sobre proporcionalidade. **Bolema**, v.39, p.1-31, 2025. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v39a240201. Acesso em: 03 out. 2025.

GOMES, E.; BIANCHINI, B. L; LIMA, G. L. O que entendemos por Pensamento Matemático? E qual a relevância de desenvolvê-lo na escola? *In:* BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. (Orgs). **O Pensamento Matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem**. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2023. p. 15–29.

HENRIQUES, A. C. O raciocínio matemático na exploração de tarefas de investigação: um estudo com alunos universitários. **Quadrante**, v.21, n.2, 2012. Disponível em: https://doi.org/10.48489/quadrante.22877. Acesso em: 03 out. 2025.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v.96, n.1, p.1-16, 2017. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-017-9761-8. Acesso em: 03 out. 2025.

KALEFF, A. M. et al. Desenvolvimento do pensamento geométrico – o modelo de Van Hiele. **Bolema**, Rio Claro, v.9, n.10, 1994. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10671. Acesso em: 03 out. 2025.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. New York: Routledge, 2020.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o raciocínio matemático dos alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**. Rio Claro, v.32, n.62, p.781-801, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02. Acesso em: 03 out. 2025.

MODESTOU, M.; GAGATSIS, A. Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. **Mathematical Thinking and Learning**, v.12, n.1, p.36-53, 2010. Disponível em: https://doi.org/10.1080/10986060903465822. Acesso em: 03 out. 2025.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. **Acta Scientiae**, v.20, n.4, 2018. Disponível em: https://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/3892. Acesso em: 03 out. 2025.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da matemática: contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, v.12, n.2, 2013. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/22895/16961. Acesso em: 03 out. 2025.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? **Educação e Matemática**, n.156, p.7-11, 2020. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/44393. Acesso em: 03 out. 2025.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. **Revista Perspectiva**, Florianópolis, v.36, n.2, p.399-420, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.5007/2175-795x.2018v36n2p399. Acesso em: 03 out. 2025.

PROULX, J. Relative proportional reasoning: transition from additive to multiplicative thinking through qualitative and quantitative enmeshments. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v.22, p.353–374, 2024. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-023-10373-y. Acesso em: 03 out. 2025.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. [S. l.]: Editora Zahar, 2012.

SANTOS, T. M. **Uma análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático na disciplina Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Engenharia.** 2025. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2025. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/35859. Acesso em: 03 out. 2025.

SANTOS, T. M., ELIAS, H. R., ARAMAN, E. M. O. Ações que apoiam o Raciocínio Matemático desempenhadas por um professor da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias em uma turma de Engenharia. **Revista Internacional De Pesquisa Em Educação Matemática**, v.15, n.2, p.1-20, 2025. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/ripem/article/view/4467. Acesso em: 03 out. 2025.

SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. Uma experiência de ensino da proporcionalidade no 2º ciclo do ensino básico. *In:* Actas do XVI ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2006. **Anais [...]** [S. l.]: Caminha, 2006. p. 295-313.

SHIINOKI, V. G. **Frações na perspectiva de medição e a Abordagem Instrucional 4A:** uma análise dos processos de raciocínio matemático manifestados por estudantes do 5º ano do ensino fundamental. 2025. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2025. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/36652. Acesso em: 03 out. 2025.

SILVA, S. P. P. F. **Desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de tarefas exploratórias sobre potenciação**. 2024. 122 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/33331. Acesso em: 03 out. 2025.

TALL, D. **How humans learn to think mathematically**: exploring the three worlds of mathematics. New York: Cambridge, 2013.

TOGINHO, E. U. **Ensino Exploratório e o Teorema de Pitágoras:** uma análise das manifestações do Pensamento Geométrico. 2024. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/35185. Acesso em: 03 out. 2025.

VALE, I. As tarefas de padrões na aula de Matemática: um desafio para professores e alunos. **Interacções**, Campo Grande, 20, p.181-207, 2012. Disponível em: https://doi.org/10.25755/int.493. Acesso em: 03 out. 2025.

VILAS BOAS, S. N.; GODOI, D. S. S.; SILVA, M. R. G. Brincadeira Pipoca - Educação Infantil e o Pensamento Proporcional. *In:* SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIAS E INVESTIGAÇÕES DE/EM AULAS DE MATEMÁTICA, 9., 2024. **Anais [...]** [S. l.]: Campinas, 2024, p. 1-3. Disponível em: https://static.even3.com/anais/644041.pdf?v=638951111800124453. Acesso em: 03 out. 2025.

Recebido: 22 julho 2025.
Aprovado: 04 novembro 2025.
DOI: http://dx.doi.org/10.3895/etr.v9n3.20586.
Como citar:
ELIAS, Henrique Rizek; MARTELOZO, Daniele Peres da Silva; GERETI, Laís Cristina Viel; OLIVEIRA, Laís Maria Costa Pires de. Perspectivas de pensamento matemático e de raciocínio matemático em dissertações do Grupo MEPPE. **Ens. Tecnol. R.**, Londrina, v. 9, n. 3, p. 646-665, set./dez. 2025. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/etr/article/view/20586. Acesso em: XXX.
Correspondência:
Henrique Rizek Elias
Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática. Avenida João Miguel Caram, 3131 Jd. Morumbi. Bloco A - Sala 101 - 1º andar. Londrina - Paraná - Brasil.