ISSN: 2594-3901
http://periodicos.utfpr.edu.br/etr

Suporte em atividades de Modelagem Matemática: olhar sobre um plano de resolução

Lourdes Maria Werle de Almeida
lourdes@uel.br
orcid.org/0000-0001-8952-1176
Universidade Estadual de Londrina (UEL) Londrina, Paraná, Brasil.

Rosângela Maria Kowalekl
rosangelakowalek1@gmail.com
orcid.org/0000-0002-2750-4829
Universidade Estadual de Londrina (UEL) Londrina, Paraná, Brasil.

Flavio Lima de Souza
flavio.lima@ifpr.edu.com
orcid.org/0009-0003-0025-3630
Instituto Federal do Paraná (IFPR), Pitanga, Paraná, Brasil.

RESUMO

O artigo tem como objetivo discutir implicações do uso de um plano de resolução para as ações dos estudantes em atividades de modelagem matemática. A base teórica dirige-se à investigação das demandas cognitivas reconhecidas na literatura relativamente à inclusão de atividades de modelagem nas aulas. Particularmente, considera-se propostas sugerindo que oferecer algum suporte aos estudantes é uma estratégia com boas repercussões sobre a sua performance em atividades de modelagem, caracterizando neste âmbito suportes que atuam como *andaimes* para os estudantes. De modo particular, o *andaime* a que o artigo se dedica é reconhecido como plano de resolução o qual sugere procedimentos concernentes à organização, elaboração, resolução e explicação de resultados em atividades de modelagem matemática. Uma pesquisa empírica com estudantes de um curso Técnico em Alimentos integrado ao Ensino Médio é realizada. A análise, alinhada com uma pesquisa qualitativa e interpretativa, permite concluir que decorrem do uso do plano quatro implicações para as ações dos estudantes: proporciona meios de lidar com um problema aberto; promove análise de respostas parciais durante a resolução, dá suporte à formalização da linguagem matemática e orienta um processo de generalização.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Andaime. Plano de resolução.

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas diferentes *insights* teóricos relativos à modelagem matemática em ambientes educacionais têm sido o foco de investigações que buscam entender o que acontece quando a modelagem é desenvolvida na sala de aula (SCHUKAJLOW *et al*., 2018).

A característica investigativa das atividades de modelagem tem como ponto central elucidar a possibilidade de realizar transferências (de ideias, de conceitos, de problemas, de usos) entre a realidade e a matemática. Henry Pollak, em diversos de seus estudos, chega a se referir a estas transferências como sendo o *coração* da modelagem matemática.

A própria natureza das atividades de modelagem, portanto, aponta para problemas que incluem condições vagas ou não bem especificadas à *priori*, de modo que sua resolução se torna um processo com várias demandas dos estudantes e que não se resolvem mediante procedimentos previamente conhecidos. De fato, estudos revelam que as demandas cognitivas que elas requerem podem, em alguns casos, atuar como barreira, seja para o sucesso dos estudantes nessas atividades no que se refere aos procedimentos requeridos, seja na sua repercussão sobre a aprendizagem (SCHUKAJLOW *et al.* 2023; ALMEIDA, 2022; BLUM, 2015; GALBRAITH; STILLMAN, 2006).

Considerada atividade em que se resolvem os chamados *problemas abertos* (BROWN; STILLMAN, 2017; SILVER, 1995), a modelagem matemática envolve fazer suposições, simplificações e tomar decisões para além de usar e aprender matemática. Esta pode ser uma razão pela qual tem havido interesse crescente em investigações que, por um lado, se direcionam aos processos psicológicos dos estudantes enquanto se envolvem com atividades dessa natureza (ALMEIDA; CASTRO, 2023; VORHÖLTER, 2019 entre outros) e, por outro lado, se dedicam a indicar ações do professor que podem impulsionar os movimentos dos estudantes na realização das atividades (SCHUKAJLOW *et al.* 2023; SCHUKAJLOW *et al.,* 2015).

No presente artigo, a atenção é dirigida ao segundo aspecto, apontando para meios que o professor pode usar para dar suporte aos estudantes quando inseridos em atividades de modelagem. Pesquisas têm indicado que oferecer algum suporte aos estudantes é uma estratégia com boas repercussões sobre a sua performance para desenvolver atividades de modelagem matemática (SCHUKAJLOW *et al.,* 2015), servindo como suporte às demandas cognitivas requeridas por esse tipo de atividade.

Particularmente, o artigo se dedica à abordagem do que na literatura se reconhece pela metáfora *scaffolding,* usada para indicar que o suporte pode ser dado aos estudantes mediante *andaimes* que lhes favorecem o movimento pelas ações requeridas para o desenvolvimento de atividades de modelagem, fomentando estratégias cognitivas e metacognitivas. Entre os mecanismos que atuam como andaimes está a apresentação ao estudante de um plano de resolução. Assim, o objetivo do artigo consiste em discutir as implicações do uso de um plano de resolução para as ações dos estudantes em uma atividade de modelagem matemática.

Uma pesquisa empírica com estudantes de uma disciplina de Matemática I de um curso Técnico em Alimentos de um Instituto Federal é realizada, sendo os estudantes, ainda não familiarizados com modelagem matemática, responsáveis pelo desenvolvimento de uma atividade tendo como suporte um plano de resolução.

MODELAGEM MATEMÁTICA

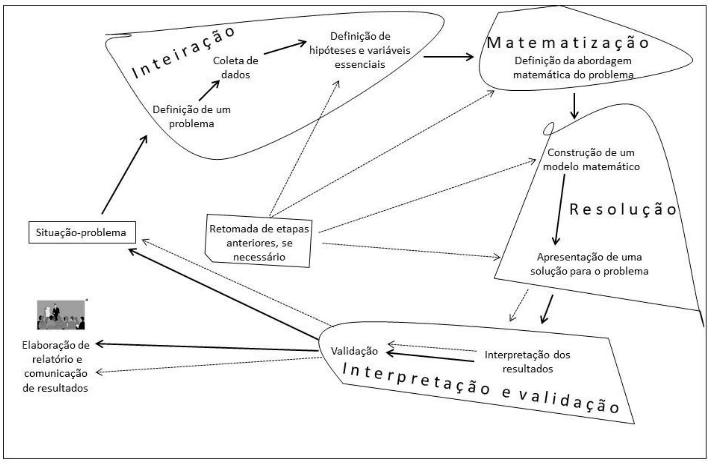
A modelagem matemática de situações da realidade visa, de modo geral, entender aspectos ou propriedades, explicar ou prever especificidades e apontar para uma tomada de decisão relativamente a um problema por meio do uso da matemática (GEIGER *et al.,* 2022; ALMEIDA, 2022; BLUM, 2015). Assim, atividades de modelagem são orientadas tanto por características da situação quanto por aspectos matemáticos. Conforme sugere Pollak (2012), o que fazer em cada momento decorre de uma contínua transferência de informações entre matemática e realidade em que nem a uma nem a outra é dada alguma soberania.

Assim, uma certa vagueza pode se apresentar no início da atividade considerando a necessidade de informações e, diferentes métodos de resolução podem emergir, podendo também conduzir a resultados nem sempre iguais. Neste sentido, às atividades de modelagem se incluem os chamados problemas abertos (SCHUKAJLOW *et al.* 2023; SILVER, 1995).

O problema em atividades de modelagem pode se caracterizar como problema aberto, relativamente a três aspectos: (i) à situação inicial a ser estudada e à definição de um problema nessa situação; (ii) aos procedimentos matemáticos que não são pré-definidos, mas decorrem de escolhas dos estudantes e da constante transferência (de ideias, de conceitos, de informações, de usos) entre a matemática e a realidade; (iii) às informações consideradas indispensáveis para o estudo da situação e elaboração de uma resposta para o problema.

Para lidar com esta característica das atividades de modelagem, frequentemente se reconhecem etapas que integram os chamados ciclos de modelagem (Figura 1): inteiração com a situação; matematização que inclui simplificações, definição de hipóteses; resolução que inclui a construção de um modelo matemático; interpretação e validação dos resultados; comunicação dos resultados para uma comunidade (um grupo, todos os estudantes de uma disciplina, etc) (ALMEIDA, 2022; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Figura 1 – Ciclo de Modelagem Matemática



Fonte: Almeida; Castro; Silva (2021).

Este ciclo traduz a iteratividade requerida ao longo dessas etapas e funciona como modelo de referência epistemológica para a modelagem matemática (ALMEIDA, 2022). Além disso, conforme apontam Thompson e Yoon (2007), um ciclo de modelagem pode ser um facilitador para os estudantes, promovendo um certo gerenciamento de suas ações.

Entretanto, as demandas cognitivas que as atividades de modelagem matemática requerem (BLUM, 2015), podem não ser superadas sem um suporte oferecido pelo professor, emergindo o estímulo ao uso do de algum tipo de suporte (que pode ser físico, cognitivo ou metacognitivo) (SCHUKAJLOW *et al.,* 2023; SCHUKAJLOW *et al.,* 2015) aos estudantes ao desenvolverem atividades de modelagem.

ANDAIMES COGNITIVOS E SUA UTILIZAÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Segundo Lins e Alchieri (2016), o que os estudantes fazem em suas tarefas na sala de aula está diretamente relacionado à ativação e ao uso bem-sucedido de algumas estratégias. Essas estratégias são operações executadas pelos aprendizes para auxiliar na aquisição, armazenamento, recuperação e uso de informações e conteúdo (MOLINA; LOVERA, 2008). Nesse sentido, Di Carlo (2017) define estratégias cognitivas como aquelas ações que os aprendizes adotam de forma consciente (ou potencialmente consciente), relativamente controlada e intencional, para otimizar a assimilação, internalização, construção, consolidação e transferência de conhecimento e habilidades de linguagem.

Flavell (1978) aponta para uma estreita e sutil diferenciação entre estratégias cognitivas e metacognitivas. Conforme sugerem Castro e Almeida (2023a), a partir das ideias de Flavell é possível ponderar que, enquanto as estratégias cognitivas são usadas para resolver problemas, por exemplo, as metacognitivas proporcionam planejar, monitorar, avaliar e controlar o funcionamento da cognição nesta resolução. No âmbito da matemática, Almeida e Castro (2023a) se referem a exemplo dessa situação: um estudante resolver um sistema de equações lineares envolve estratégias cognitivas; ele pensar sobre quão bem resolveu esse sistema é uma cognição sobre a própria cognição – é uma estratégia metacognitiva.

No entanto, a mobilização de estratégias pode não ser espontânea, cabendo ao professor proporcionar meios que as acionem, visando uma forma mais autorregulada de suas ações e da aprendizagem que delas decorre (SANTOS; ALLIPRANDINI, 2017; GANDA; BORUCHOVITCH, 2018).

A problemática que se configura então é caracterizar ferramentas ou meios que podem ser utilizados na sala de aula visando à mobilização ou ao desenvolvimento de estratégias cognitivas ou metacognitivas dos estudantes (CASTRO; ALMEIDA, 2023b). Uma dessas ferramentas é a utilização de andaimes.

O termo andaime deriva da construção civil em que é utilizado para designar uma estrutura temporária montada para viabilizar alguns tipos de trabalho dos operários em reformas ou construções. O termo adentrou o âmbito educacional, de forma mais acentuada no contexto internacional, em que se caracteriza pelo termo *scaffolding* (VAN DE POL *et al.*, 2010; STENDER; KAISER, 2015; WOOD, et al. 1976, entre outros) como metáfora para designar um suporte adaptativo oferecido aos estudantes para auxiliá-los em atividades que ainda não conseguem realizar sozinhos.

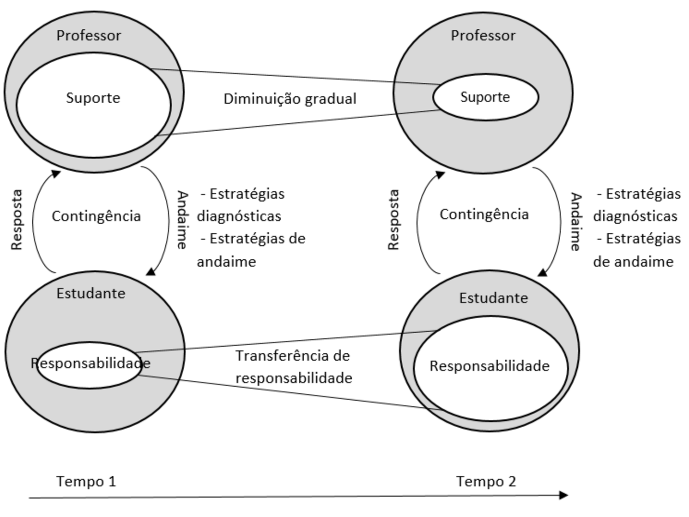
Os andaimes têm recebido atenção especial em pesquisas na área de Educação e, em particular, na Educação Matemática, por serem considerados eficazes para auxiliar os estudantes em atividades consideradas complexas (GÜREL, 2023; SCHUKAJLOW *et al.*, 2015; STENDER e KAISER, 2015).

Sua ação sobre a performance dos estudantes está associada ao conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) da teoria sociocultural de Vygotsky. De fato, a ZDP representa um *espaço* entre o que o estudante pode fazer de forma independente (nível de desenvolvimento real) e o que ele se torna capaz de fazer sob a orientação do professor (nível de desenvolvimento potencial), sendo, portanto, o andaime um suporte fornecido na ZDP.

Segundo Van de Pol *et al*. (2010), andaimes são suportes interativos entre professor e estudante e ambos participam ativamente da interação. O apoio dado pelo professor depende das características da situação, como o tipo de atividade e as respostas dos estudantes. Portanto, não se trata de uma ferramenta que pode ser usada em todas as situações da mesma forma.

O modelo conceitual dos andaimes inclui três elementos: a contingência, a diminuição gradual e a transferência de responsabilidade (VAN DE POL *et al.*, 2010) (Figura 2).

Figura 2 – Modelo conceitual de andaime



Fonte: Adaptado de Van de Pol et al. (2010, p. 274).

A contingência representa a natureza adaptativa do andaime. De acordo com Van de Pol *et al.* (2010, p. 4), nem todas as formas de suporte podem ser chamadas de andaime uma vez que ele precisa ser adaptado às necessidades dos estudantes. Um professor atua de forma contingente quando adapta o suporte a um ou a um grupo de estudantes considerando suas demandas específicas.

A diminuição gradual do andaime refere-se à retirada gradativa do suporte e está relacionada com a transferência de responsabilidade. De fato, o estudante passa a realizar uma atividade de forma independente à medida que a responsabilidade é transferida do professor para o estudante (Figura 2). Segundo Van de Pol (2012, p. 153), “a diminuição gradual e a transferência de responsabilidade só podem ser alcançadas quando forem realizadas de forma contingente”.

Na contingência, estratégias de diagnóstico são utilizadas para determinar o nível atual de desempenho dos estudantes. Segundo Gürel (2023), é por meio dessas estratégias que os estudantes podem atingir o seu nível potencial de competência e, consequentemente, o professor pode reduzir o seu suporte ao longo do tempo.

No âmbito da modelagem matemática o uso de suportes caracterizados como andaime é recente. Há, entretanto, estudos que se referem ao uso de algum tipo de suporte nessas atividades. Um deles é o chamado plano de resolução (BECKSCHULTE, 2020; DURANDT; LAUTENBACH, 2020; SCHUKAJLOW *et al.*, 2015).

Beckschulte (2020, p. 129), define plano de resolução como “um ciclo de modelagem simplificado que fornece estratégias em cada etapa e, portanto, serve como uma orientação estratégica”. Schukajlow *et al.* (2015) sugerem que esse plano visa ajudar a localizar as dificuldades dos estudantes no processo de resolução e melhorar o apoio adaptativo fornecido pelo professor. A diminuição gradual pode ser feita fornecendo um instrumento em papel, pois os estudantes só precisam utilizar o plano em caso de dificuldades e se não identificarem estratégia adequada disponível. Assim que os estudantes conhecem as etapas e compreendem a ajuda prestada pelo plano, o instrumento deixa de ser necessário. Deste modo, o plano de resolução é um instrumento de assistência estratégica e não visa fornecer assistência em relação ao conteúdo matemático, mas auxilia na identificação de etapas da modelagem matemática e na definição de ações em cada etapa.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para investigar implicações do uso de um plano de resolução em atividades de modelagem matemática uma pesquisa empírica é realizada com uma turma de vinte e cinco estudantes do 1° ano de um curso Técnico em Alimentos de um Instituto Federal no Estado do Paraná.

Os estudantes, que não tinham nenhuma experiência anterior com modelagem matemática, desenvolveram uma atividade divididos em grupos. A atividade teve como temática *A matemática e o bolo* e foi desenvolvida na disciplina de Matemática I, sendo um dos autores desse artigo o professor da disciplina. A atividade foi desenvolvida em dois dias de duas aulas durante o mês de março de 2024. Ao final cada grupo apresentou o seu encaminhamento na atividade para todos os estudantes da disciplina.

Os dados que subsidiam as argumentações aqui apresentadas são oriundos de falas e gestos dos estudantes obtidos por meio de gravação em áudio e vídeo do desenvolvimento da atividade, além de fotos dos materiais dos estudantes, dos relatórios entregues e das anotações do diário de campo do professor. Para análise que ampara a discussão nesse artigo, considerando a extensão possível para o texto, são utilizados os dados de um grupo, composto de cinco estudantes, identificados com os nomes (fictícios) Ana, Camila, João, Pedro e Maria.

O caminho metodológico da pesquisa segue orientações da abordagem qualitativa e interpretativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994). A identificação de implicações do uso do plano de resolução se dá a partir do olhar sobre os dados coletados.

CENÁRIO DA PESQUISA

O cenário de modelagem aqui referido leva em consideração a premissa apontada por Lesh *et al.* (2000) de que para desenvolver problemas que encorajem os estudantes a basear suas resoluções em extensões de seu conhecimento e suas experiências, as temáticas que funcionam melhor tendem a ser aquelas que se encaixam nos interesses e experiências de grupos específicos de estudantes. Neste sentido, em se tratando de um curso de Tecnologia em Alimentos, a temática de discutir o *fazer um bolo e como vendê-lo* despertou interesse nos estudantes.

Na sala de aula a atividade de modelagem teve início com considerações sobre um bolo levado pelo professor para um lanche. Apresentando o bolo, o professor apresentou também a ideia de que a partir dele seria introduzida uma atividade de modelagem matemática. Antes da degustação do bolo, foi introduzida a atividade mediante um texto informativo (Figura 3). Formaram-se os grupos e as primeiras ideias sobre a abordagem da situação foram sendo estruturadas pelos estudantes, sendo que alguns realizaram medições do bolo e fizeram estimativas sobre seu peso (massa). Ao final dessa aula o bolo foi degustado de modo que mais informações poderiam ser consideradas tais como o tipo de massa e de recheio do bolo.

Figura 3 – Introdução da situação

A matemática e o bolo

O bolo, entre os produtos de panificação, vem ganhando importância no que se refere ao consumo e à comercialização no Brasil e no mundo. Com o desenvolvimento tecnológico, ocorreram mudanças nas indústrias, transformando a outrora produção caseira para algo quantitativamente maior[1].

Consumido pelo público de diferentes faixas etárias, o bolo é um produto assado, preparado à base de farinhas ou amidos, açúcares, fermento químico ou biológico, podendo conter leite, ovos, manteiga ou gordura vegetal, e outras substâncias que determinam as características do produto, como leveza, textura e sabor.

Uma reportagem do *site* Terra[2] sugere que o bolo é um dos produtos mais procurados na área da panificação. A edição do jornal Diário do Comércio publicada em 31 de outubro de 2019, aponta que os bolos correspondem a 7% dos 5,6 milhões de toneladas de produtos panificados comercializados anualmente. Isso significa que são cerca de 392 mil toneladas de bolo sendo produzidos nas padarias todo ano. Baseada nesta nota, o bolo é classificado como o 4º produto mais vendido nas padarias, perdendo apenas para o pão francês, os pães macios e o pão de queijo.

Considerando esse potencial do comércio de bolos, vamos usar esta guloseima na aula de Matemática! Com essa finalidade, está aqui na sala de aula um bolo (imagem a seguir -trazido pelo professor). A partir da degustação desse bolo, identificando sabor, textura, tipo de massa e de recheio, vamos usar matemática para responder a seguinte questão: **Esse bolo deve ser vendido por qual valor, considerando que quem o produziu não pode ter prejuízo?**

[1]MOSCATTO, J. A.; PRUDÊNCIO-FERREIRA, S. H.; HAULY, M. C. O. Farinha de yacon e inulina como ingredientes na formulação de bolo de chocolate. Ciência e Tecnologia de Alimentos, Campinas, v. 24, n. 4, p. 634-640, out-dez, 2004.

[2] Estudo aponta aumento no consumo de chocolates, biscoitos e bolos. *Site* Terra, 12 de nov. de 2021. Disponível em: <https://www.terra.com.br/noticias/estudo-aponta-aumento-no-consumo-de-chocolates-biscoitos-e-bolos,f5db22ff1cd17bcf1b68161970b667d5njqc48gf.html?utm_source=clipboard>. Acesso em: 10 de mar de 2024.

Fonte: Os autores (2024).

Tendo em vista esse cenário, foi planejado o uso de um plano de resolução como andaime para os estudantes. Esse plano foi apresentado após a leitura e discussão sobre o tema considerando informações da Figura 3. Para dar suporte às ações dos estudantes, o plano (Figura 4) inclui quatro itens: (1) Para inteirar-se com a situação; (2) Para organizar a resolução do problema; (3) Sobre o uso da matemática; (4) Para explicar os resultados. Em cada item do plano ao estudante são sinalizadas ações e reflexões para subsidiar a resolução do problema definido na Figura 3.

Figura 4 – Plano de resolução para a atividade de modelagem

PLANO DE RESOLUÇÃO: A MATEMÁTICA E O BOLO

1) Para inteirar-se com a situação

- Leia o texto informativo.
- Quais informações são necessárias para resolver o problema? (Por exemplo: o sabor do bolo, a massa do bolo, os ingredientes usados).

2) Para organizar a resolução do problema

- Defina variáveis para resolver o problema. Faça suposições bem fundamentadas, por exemplo, sobre os ingredientes utilizados na massa e no recheio do bolo, sobre o custo dos ingredientes, sobre o preço de venda de bolo. Considere simplificações, se necessário.
- Escolha conteúdos, conceitos, regras e procedimentos matemáticos para a resolução do problema a partir do que organizou até o momento (por exemplo, proporção, porcentagem).

3) Sobre o uso da matemática

- Resolva o problema a partir das suas escolhas matemáticas. Verifique se os procedimentos usados produziram uma solução. Se necessário, mude os procedimentos ou complemente informações.
- Escreva uma resposta para o problema.

4) Para explicar os resultados

- Questione-se: A resposta para o problema tem sentido? Você compraria o bolo por este valor? Você considerou custos com os ingredientes e com mão-de-obra? Você fez ou considera pertinente fazer uma estimativa de lucro com a venda do bolo?
- Como assegurar que a resposta está correta? Alguma comparação o preço de venda em confeitarias pode ser adequado?
- Escreva sua resposta final para o problema.

Fonte: Os autores (2024).

AS AÇÕES DOS ESTUDANTES MEDIADAS PELO PLANO DE RESOLUÇÃO

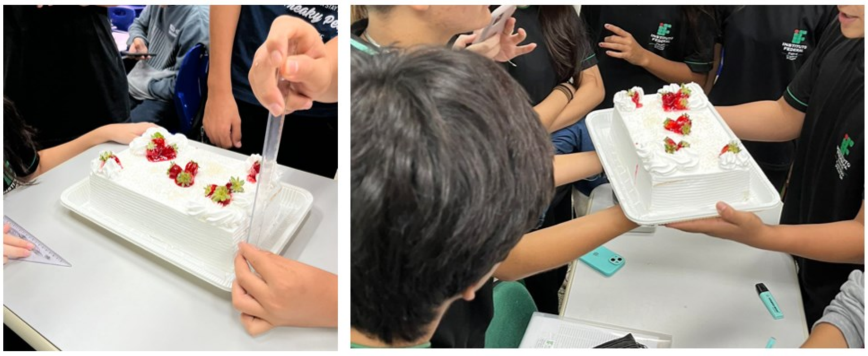
A entrega do plano para cada grupo teve como finalidade orientar os encaminhamentos dos estudantes para a atividade com foco na construção de uma resposta para o problema. As informações propostas na Figura 3, embora sejam introdutórias à temática da produção e consumo de bolos, são pouco esclarecedoras no que diz respeito aos dados diretamente associados ao bolo em estudo. Neste sentido, os quatro itens do plano visam fomentar o planejamento e a construção da resolução do problema.

Além disso, esses itens, de forma indireta, visam sinalizar etapas essenciais para lidar com um problema que é aberto em relação às especificidades da situação, aos procedimentos matemáticos e à construção da resposta. Assim, os itens do plano sugerem procedimentos concernentes à organização e elaboração (itens 1 e 2), resolução (item 3) e explicação (item 4).

No que se refere à organização e elaboração, o item 1 do plano chama atenção para a necessidade de informações que não estão disponíveis até aquele momento, mas são necessárias para resolver o problema, conforme indica o diálogo no grupo.

> Maria: Ah, então precisamos de mais informações!
>
> Camila: Sim, eu acho que sim.
>
> Ana: Mas nós medimos bolo, então temos isso (Figura 5).
>
> Pedro: E o peso (o estudante se refere à massa do bolo), não sabemos! Será que o professor sabe quanto pesa o bolo? Vamos perguntar!
>
> Pedro: Professor, qual é o peso do bolo, o senhor sabe?
>
> Professor: Vejam eu não tenho essa informação. Mas vocês podem fazer suposições ou hipóteses considerando o tamanho e o tipo de recheio, por exemplo.
>
> Maria: Pessoal, vamos ver aqui na folha o que o professor pediu para a gente fazer (referindo-se ao plano de resolução recebido).

Figura 5 – As medidas do bolo



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Para orientar suas ações, no grupo, os estudantes fizeram um planejamento que inclui possibilidades do que poderiam fazer na atividade de modelagem. O que eles caracterizaram como planos (Figura 6), são procedimentos que indicam a percepção da necessidade de informações externas (conhecer uma receita e fazer consulta em uma panificadora) bem como internas (provenientes da degustação do bolo na aula).

Figura 6 – Estratégias elencadas pelo grupo para resolver o problema

Plano A: Descobrir receita de bolo de pão de ló, de creme de ninho, chantily e morango, então calcular.

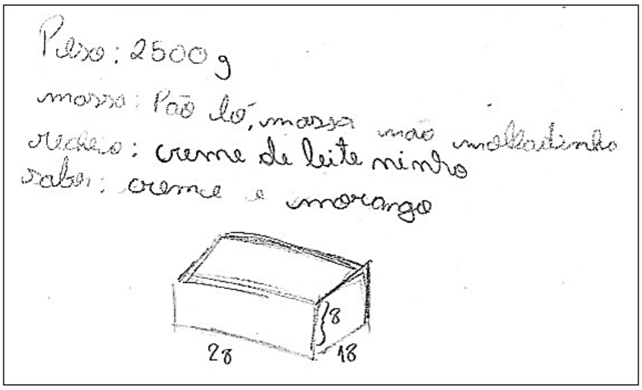
Plano B: descrever o bolo (características acima) para uma panificadora e perguntar quanto fica.

Plano C: Contar quantos pedaços cada um comeu, tendo em vista que sobrou por volta de 5.

Fonte: Relatório do grupo (2024).

O que se pode observar, entretanto, é que em seus planos os estudantes mencionam ações distintas, apontando também para possibilidades de obter soluções diferentes. Antes de definir qual seria seu encaminhamento, o grupo se dedicou a indicações do plano de resolução entregue pelo professor: definiram ingredientes de uma receita para o bolo, caracterizaram itens do recheio e fizeram uma estimativa do peso (massa) do bolo (Figura 7).

Figura 7 – Uma suposição usando as medidas do bolo



Fonte: Relatório do grupo (2024).

O que se pode inferir sobre o uso do plano de resolução relativamente à compreensão e elaboração é que ele deu suporte aos estudantes, implicando na definição de meios de lidar com o problema aberto.

A organização das informações tendo em vista a matematização da situação para resolver o problema, se deu a partir de um olhar sobre seus planos de abordagem da situação (Figura 6). Um diálogo entre os integrantes do grupo sinaliza a necessidade de uma tomada de decisão.

Ana: O plano B é muito simples, pois bastaria perguntar para o Pedroso da padaria quanto custa o quilo do bolo de massa de pão de ló, com recheio de leite ninho e morangos e cobertura de morango. Ele, informaria o valor do quilo e nosso problema seria resolvido.

João: Mas poderíamos perguntar o preço em duas padarias...

Pedro: Mas não é isso que temos que fazer.

Maria: É verdade, aqui na folha (referindo-se ao plano de resolução recebido), está pedindo para usar matemática.

João: É verdade. Então o plano B não serve (referindo-se ao plano B da Figura 6)

João: Mas alguém contou em quantos pedaços o bolo foi cortado?

Todos os integrantes do grupo ponderaram que essa contagem de pedaços não ocorreu.

Pedro: Então também temos que descartar o plano C.

Resulta desse diálogo a decisão do grupo de que, entre as possíveis ações constantes em seu planejamento inicial, somente o plano A atende às reivindicações do que deveriam fazer nessa atividade. Para definir o que fazer, entretanto, o grupo recorreu ao plano de resolução recebido e solicitou intervenção do professor, conforme indica parte de um diálogo.

Pedro: Professor, o que são suposições bem fundamentadas? (expressão que consta no plano de resolução)

Professor: São suposições que vocês podem fazer, mas que estão baseadas no conhecimento de vocês em relação à situação.

Ana: Então precisamos ver se é razoável considerar esse peso (2,5kg).

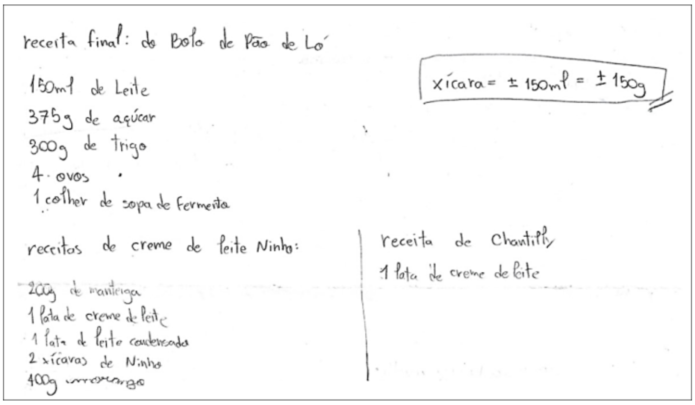
Maria: E também ver quais são os ingredientes do bolo, porque isso influencia.

João: É, então vamos pesquisar sobre isso.

Por meio de uma pesquisa na internet, o grupo encontrou informações relativas ao rendimento de bolo usando uma forma retangular cujas dimensões são 25cm de comprimento, 17cm de largura e 10 cm de altura (medidas bem próximas daquelas do bolo). Conforme essa informação, uma receita de massa de pão de ló resulta em um bolo com peso entre 3k e 3,5 kg. Os estudantes concluíram que essas informações são suficientes para garantir que a suposição de que o bolo pesa 2,5 kg é bem fundamentada.

As estimativas para o valor do bolo são decorrentes do tipo de ingredientes bem como do preço de cada um deles. Assim, o grupo, a partir de consultas a receitas de bolo em diferentes sites da internet, construiu uma receita para um bolo pão de ló (Figura 8). Conhecida a quantidade e o preço de cada item, foi obtido o valor da quantidade usada no bolo (Figura 9).

Figura 8 – Receita para a produção do bolo


receita final: do Bolo de Pão de Ló

xícara = ± 150ml = ± 150g

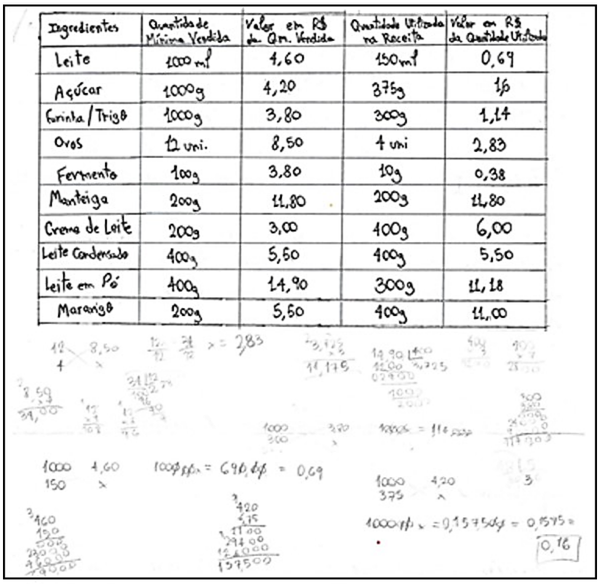
150ml de Leite
375g de açúcar
300g de trigo
4 ovos
1 colher de sopa de Fermento

receitas de creme de leite Ninho:
200g de manteiga
1 lata de creme de leite
1 lata de leite condensado
2 xícaras de Ninho
400g morango

receita de Chantilly
1 lata de creme de leite

Fonte: Relatório do grupo (2024).

Figura 9 – Preço dos ingredientes para um bolo



Ingredientes	Quantidade Mínima Vendida	Valor em R$ da Qm. Vendida	Quantidade Utilizada na Receita	Valor em R$ da Quantidade Utilizada
Leite	1000 ml	4,60	150ml	0,69
Açúcar	1000g	4,20	375g	1,6
Farinha / Trigo	1000g	3,80	300g	1,14
Ovos	12 uni.	8,50	4 uni	2,83
Fermento	100g	3.80	10g	0,38
Manteiga	200g	11,80	200g	11,80
Creme de Leite	200g	3,00	400g	6,00
Leite Condensado	400g	5,50	400g	5,50
Leite em Pó	400g	14,90	300g	11,18
Morango	200g	5,50	400g	11,00

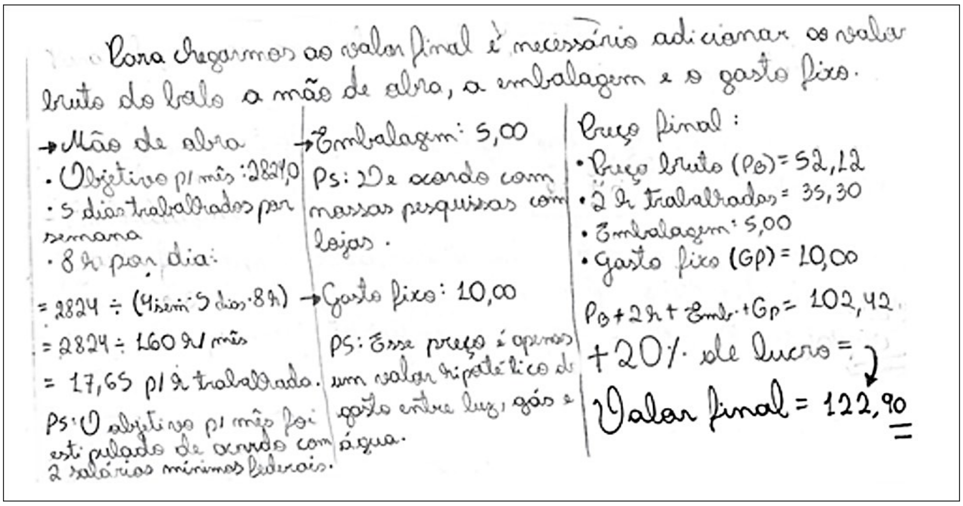
Fonte: Relatório do grupo (2024).

Com os dados da última coluna da tabela na Figura 9, o grupo concluiu que o custo de fabricação de um bolo com as características daquele degustado na aula é de R$52,12. Entretanto, uma consulta ao plano de resolução, levou o grupo a ponderar que outros custos devem ser considerados para elaborar uma possível resposta para o problema, passando a discutir um aspecto referido por eles como precificação[1] conforme sinaliza o diálogo.

> Pedro: Acho que esse valor que obtivemos não é o preço de venda.
>
> João: Não, esse valor é só para produzir o bolo.
>
> Camila: Olhem aqui na folha [plano de resolução] fala de mão de obra e lucro, e nós ainda não consideramos isso.
>
> Pedro: Então vamos fazer e considerar a precificação. Incluir mais os outros custos e o lucro também.

Outros custos foram adicionados levando o grupo a apresentar uma resposta para o problema (Figuras 10 e 11).

Figura 10 – A resposta construída



Para chegarmos ao valor final é necessário adicionar o valor bruto do bolo a mão de obra, a embalagem e o gasto fixo.

→ Mão de obra
- Objetivo p/ mês: 2824,0
- 5 dias trabalhados por semana
- 8 h por dia:

= 2824 ÷ (4 sem · 5 dias · 8 h)
= 2824 ÷ 160 h/mês
= 17,65 p/ h trabalhado.

PS: O objetivo p/ mês foi estipulado de acordo com 2 salários mínimos federais.

→ Embalagem: 5,00
PS: De acordo com nossas pesquisas com lojas.

→ Gasto fixo: 10,00
PS: Esse preço é apenas um valor hipotético de gasto entre luz, gás e água.

Preço final:
- Preço bruto (PB) = 52,12
- 2 h trabalhadas = 35,30
- Embalagem: 5,00
- Gasto fixo (GP) = 10,00

PB + 2h + Emb. + GP = 102,42
+ 20% de lucro =
Valor final = 122,90

Fonte: Relatório do grupo (2024).

Figura 11 – Comparação com o preço das padarias da cidade

Obtendo os resultados

- Sem considerar a mão de obra, a embalagem e o gasto fixo, o valor do bolo é R$52,12 .
- Incluindo estes custos, o valor do bolo é R$122,90.
- A pesquisa nas confeitarias da cidade indica que o preço de um bolo de 2,5kg é, em média, R$120,00

Fonte: Arquivo de apresentação do grupo (2024).

Assim, relativamente à organização e resolução do problema, o uso do plano entregue pelo professor favoreceu a definição de estratégias de resolução e a análise de sua pertinência bem como a avaliação de resultados parciais obtidos.

No que diz respeito ao uso da matemática e apresentação dos resultados, o plano de resolução se mostrou eficiente, particularmente, em dois aspectos: provocou nos estudantes um esforço pelo uso da linguagem matemática e conduziu-os a requerer do professor uma generalização para a resposta construída.

De fato, os cálculos realizados para as estimativas do preço de produção e a inclusão de outros custos a partir do conceito de precificação (Figura 10) foram suficientes para a elaboração de uma resposta. Entretanto, o item 3 do plano de resolução refere-se usos da matemática. Dois estudantes então solicitaram intervenção do professor relativamente ao próprio uso do plano, indagando sobre a articulação da definição de variáveis (item 1) com uso da matemática (item 3).

> Pedro: Como podemos escrever isso, professor? (referindo-se à construção da última coluna da tabela da Figura 9).
>
> João: É, professor, podemos usar símbolos ou só fazer as contas mesmo?
>
> Professor: Como vocês me explicam a conta que fizeram?
>
> Pedro: Professor, em cada linha, o valor final (em reais) é o resultado da divisão do valor do ingrediente pela quantidade como ele é vendido no mercado, multiplicado pela quantidade usada.
>
> Pedro: É, professor, é tipo uma regra de três.
>
> Professor: Então tentem escrever uma forma geral disso que pode ser usada para qualquer um dos ingredientes.

A linguagem matemática então apresentada pelo grupo consta na Figura 12, ponderando que o uso de regra de três para os ingredientes como definidos na Figura 9 permite escrever o custo de cada ingrediente conforme indica esta figura.

Figura 12 – Um modelo matemático para o custo dos ingredientes

$$\text{preço da quantidade utilizada} = \frac{\text{preço da quantidade vendida}}{\text{quantidade vendida}} \text{ x } \text{quantidade utilizada}$$

Fonte: Relatório do grupo (2024).

Embora o grupo tenha considerado que a resposta informando o preço de venda do bolo (Figura 10) e uma comparação desse valor com aquele praticado em confeitarias da cidade (Figura 11) tenha atendido ao que se propuseram a fazer, o grupo se interessou em obter uma expressão mais geral para tratar do preço de bolos. Ou seja, emergiu do grupo o interesse em uma possibilidade de generalização, considerando todas as variáveis incluídas na precificação do bolo.

Os estudantes, entretanto, requereram a intervenção do professor para a construção do que poderia ser um modelo geral para indicar o preço de venda de um bolo. Utilizando dos indicativos do grupo relativamente às variáveis incluídas no preço final, a expressão construída conjuntamente entre estudantes e professor é:

$$Preço\ de\ venda = P_V = (CP + CM + CE + CF)(1 + \mathrm{P})$$

em que (P_V) é preço de venda de um bolo; (CP) é o custo de produção; CM custo de mão de obra; (CE); é o preço da embalagem; (CF) são custos fixos da confeitaria e P é percentual de lucro desejado pelo confeiteiro.

Assim, em termos gerais, considerando as ações dos estudantes amparados pelo plano de resolução na atividade de modelagem, é possível caracterizar quatro implicações do uso do plano de resolução para as ações dos estudantes: (i) oferece meios de lidar com um problema-aberto; (ii) promove a análise de respostas parciais durante a resolução; (iii) dá suporte à formalização da linguagem matemática; (iv) orienta um processo de generalização.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na pesquisa empírica que fundamenta a presente pesquisa, estudantes do Ensino Médio ainda não familiarizados com modelagem matemática são introduzidos à sua primeira experiência com modelagem matemática mediante uma atividade em que são amparados por um plano de resolução, conforme caracterizado em Schukajlow *et al.* 2015.

O plano de resolução construído para a investigação da temática *A matemática e o bolo* considera que a falta de experiência dos estudantes com problemas abertos, como é caso daqueles que emergem em atividades de modelagem matemática, requer que algum suporte lhe seja oferecido, consoante a que já se discute em Schukajlow *et al.* 2023 e Kaiser *et al.* 2023.

O que decorre do uso desse suporte para o desenvolvimento da atividade é o objeto de pesquisa do presente artigo. Nesse sentido, é preciso considerar que o plano visa dar cobertura aos diferentes aspectos em que o problema de modelagem se caracteriza como um problema aberto, conforme apontam Schukajlow *et al.* 2023.

A problemática, referente *A matemática e o bolo*, é de fato aberta relativamente às informações concernentes à situação a ser estudada, aos procedimentos matemáticos bem como em relação à construção e avaliação de uma resposta para o problema.

Assim, o plano oferecido aos estudantes é um andaime para a organização, elaboração, resolução e explicação de resultados na atividade de modelagem matemática. Em cada uma dessas etapas o plano teve implicações para as ações dos estudantes.

Por um lado, em etapas iniciais o plano inspirou os estudantes a buscar informações, traçar um planejamento, aceitando alguns dos itens planejados e rejeitando outros; posteriormente, deu suporte à construção de uma resposta para o problema de estimar o preço de venda de um bolo, levado para a aula de matemática pelo professor, a partir de uma constante tomada de decisões, em consonância com o que aponta Almeida (2022) como essencial em atividades de modelagem matemática.

Por outro lado, o plano de resolução promoveu um processo reflexivo em que, tanto os estudantes percorreram os diferentes itens elencados nesse plano (como por exemplo a definição de variáveis e a resposta construída), quanto despertou interesse em usar linguagem matemática e encontrar expressões mais gerais que poderiam ser transferidas para situações outras de produção e comercialização de bolos. Neste sentido, a constante transferência entre a situação e a matemática, já apontada em Pollak (2012), orientou as ações dos estudantes inspirados no plano de resolução. Para efetivar o que o plano sugere, todavia, os estudantes ainda solicitaram a intervenção do professor, seja para explicar itens do plano, seja para orientá-los na estrutura do que poderia ser um modelo matemático para essa situação.

O que se pode inferir da pesquisa é que o plano de resolução, proposto como um andaime físico em Schukajlow *et al.* (2015), mobilizou, nos estudantes, estratégias cognitivas e metacognitivas caracterizadas em Almeida e Castro (2023b), como por exemplo a análise de respostas parciais, a identificação de procedimentos matemáticos potencialmente úteis na construção do modelo matemático, um processo decisório em que procedimentos identificados como não produtivos para a situação são rejeitados.

Assim, quatro implicações para as ações dos estudantes em atividades de modelagem são caracterizadas: proporciona meios de lidar com um problema aberto; promove análise de respostas parciais durante a resolução, dá suporte à formalização da linguagem matemática e orienta um processo de generalização.

No que diz respeito aos elementos que um modelo conceitual caracterizado como andaime deve incluir, segundo Van de Pol *et al.* (2010), (contingência, diminuição gradual e transferência de responsabilidade) a presente pesquisa se limita a observá-los apenas em uma atividade em que o uso do plano de resolução foi bem-sucedido. Nesse sentido, o plano atuou de modo contingente, considerando que serviu como suporte aos grupos de estudantes considerando suas demandas específicas.

Pesquisas futuras poderão investigar como a diminuição gradual e a transferência de responsabilidade podem ser efetivadas com os estudantes, visando a sua competência para realizar atividades de modelagem matemática no decorrer de seu envolvimento com esse tipo de atividades.

Scaffolding Mathematical Modelling activities: look at a resolution plan

ABSTRACT

The article aims to discuss implications of using a resolution plan in mathematical modeling activities. The theoretical basis is aimed at investigating the cognitive demands recognized in the literature regarding the inclusion of modeling activities in classes. Particularly, proposals are considered suggesting that offering some support to students is a strategy with good repercussions on their performance in modeling activities, characterizing in this context supports that act as scaffolds for students. In particular, the scaffolding to which the article is dedicated is recognized as a resolution plan which suggests procedures concerning the organization, elaboration, resolution and explanation of results in mathematical modeling activities. An empirical research with students from a Food Technician course integrated into high school is carried out. The analysis, aligned with qualitative and interpretative research, allows us to conclude that four implications arise from the use of the plan for students' actions: it provides ways of dealing with an open problem; promotes analysis of partial answers during resolution, supports the formalization of mathematical language and guides a generalization process.

KEYWORDS: Mathematical Modelling. Support. Scaffolding. Resolution plan.

NOTAS

1 Precificação é o processo de definição do valor monetário a ser cobrado do cliente por um produto, mercadoria ou serviço. Ela deve ser equacionada de forma a proporcionar retorno positivo à empresa e garantir a competitividade do negócio e a satisfação do cliente (Portal do Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas (SEBRAE) https://bibliotecas.sebrae.com.br).

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; CASTRO, E. M. V. O planejamento como estratégia metacognitiva em atividades de modelagem matemática. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 30, p. 1, 2023a.

ALMEIDA, L. M. W.; CASTRO, E. M. V. Metacognitive strategies in mathematical modelling activities: structuring an identification instrument. **REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education**, v. 12, p. 210-228, 2023b.

ALMEIDA, L. M. W. Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. **Vydia**, v. 42, n. 2, p. 121-145, 2022.

ALMEIDA, L. M. W.; DE CASTRO, É. M. V.; DA SILVA, M. H. S. Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto on-line. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,** v. 14, n. 2, p. 383-406, 2021.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo, SP: Contexto, 2012.

BECKSCULTE, C. Mathematical modelling with a solution plan: An intervention study about the development of grade 9 students' modelling competencies. *In*: STILLMAN, G. A.; KAISER, G.; LAMPEN, C. E. (Eds.). **Mathematical modelling education and sense-making:** International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling. Cham: Springer, 2020.

BLUM, W. **Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?** The proceedings of the 12thIinternational Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal changes. New York: Springer, 2015. p. 73-96.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. [S.l.]: Porto Editora. 1994.

BROWN, J. P., STILLMAN, G. A. Developing the roots of modelling conceptions: 'Mathematical modelling is the life of the world.' **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v.48, n.3, p.353–373, 2017.

CASTRO, E. M. V.; ALMEIDA, L. M. W. Estratégias metacognitivas de um grupo de estudantes brasileiros em atividades de modelagem matemática. **Actualidades Investigativas en Educación**, v. 23, p. 1-26, 2023a.

CASTRO, E. M. V.; ALMEIDA, L. M. W. A natureza individual ou colaborativa de estratégias metacognitivas e seus desdobramentos para a modelagem matemática. **Revista Acta Scientiae**, v. 25, p. 1-25, 2023b.

DI CARLO, S. Understanding cognitive language learning strategies. **International Journal of Applied Linguistics and English Literature**, v. 6, n. 2, p. 114-126, 2017.

DURANDT, R.; LAUTENBACH, G. Strategic support to students' competency development in the mathematical modelling process: A qualitative study. **Perspectives in Education**, v. 38, n. 1, p. 211–223, 2020.

FLAVELL, J. H. Metacognitive development. *In*: SCANDURA, J.; BRAINERD, C. (Eds). **Structural process theories of complex human behavior**. The Netherlands: Sijthoff & Noordoffp, 1978. p. 213-245

GALBRAITH, P. L.; STILLMAN, G. A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. **ZDM-Mathematics Education**, v. 38, p. 143–162, 2006.

GANDA, D. R.; BORUCHOVITCH, E. Promoting self-regulated learning of Brazilian Preservice student Teachers: results of an intervention Program. *In:* FRONTIERS in Education. [S.l.]: Frontiers Media SA, 2018.

GEIGER, V.; GALBRAITH, P.; NISS, M.; DELZOPPO, C. Developing a task design and implementation framework for fostering mathematical modelling competencies. **Educational Studies in Mathematics**, v. 109, n. 2, p. 313-336, 2022.

GÜREL, Z. Ç. Teaching mathematical modeling in the classroom: Analyzing the scaffolding methods of teachers. **Elsevier Teaching and Teacher Education**, p. 1-13, 2023.

KAISER, G. *et al.* Teachers' scaffolding behavior and visual perception during cooperative learning. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 22, n. 2, p. 333-352, 2023.

LESH, R.; HOOVER, M.; HOLE, B.; KELLY, A.; POST, T. Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. *In*: LESH, R. A.; KELLY, A. (Eds.). **Handbook of research design in mathematics and science education.** [S.l.]: [S.n.], 2000. p. 591-646.

LINS, M. R. C.; ALCHIERI, J. C. Estratégias de aprendizagem utilizadas por estudantes cegos e videntes. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, p. 1221-1241, 2016.

MOLINA CONTRERAS, D. L.; LOVERA, Z. M. Meaning that to him the educational ones grant to strategies of evaluation of the learnings. **Ciências & Cognição**, v. 13, n. 1, p. 82-93, 2008.

POLLAK, H. O. Introduction: what is mathematical modeling? *In:* GOULD, H.; MURRAY, D. R.; SANFRATELLO, A. (Eds.). **Mathematical Modeling Handbook**. Bedford: Comap, 2012. p. viii-xi.

SANTOS, D. A. dos; ALLIPRANDINI, P. M. Z. A promoção do uso de estratégias cognitivas em alunos do Ensino Médio. **Psicologia Escolar e Educacional**, v. 22, p. 535-543, 2017.

SCHUKAJLOW, S.; KRAWITZ, J.; KANEFKE, J. BLUM, W. Open modelling problems: cognitive barriers and instructional prompts. **Educational Studies in Mathematics,** n. 114, p. 417–438, 2023.

SCHUKAJLOW, S, KAISER, G; STILLMAN, G. Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: A survey on the current state-of-the-art. **ZDM Mathematics Education**, v. 50, n. 1, p. 5-18, 2018.

SCHUKAJLOW, S.; KOLTER, J.; BLUM, W. Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. **ZDM Mathematics Education**, v. 47, p. 1241–1254, 2015.

SILVER, E. A. The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. **ZDM Mathematics Education**, v. 27, n. 2, p. 67–72, 1995.

STENDER, S.; KAISER, G. Scaffolding in complex modelling situations. **ZDM Mathematics Education**, v. 47, n. 7, 2015.

THOMPSON, M.; YOON, C. Why build a mathematical model? Taxonomy of situations that create the need for a model to be developed. *In:* LESH, R.; HAMILTON, E.; KAPUT, J. (Eds.). **Foundations for the Future in Mathematics Education.** London: Laurence Earl Baum Associates, 2007. p. 193—200.

VAN DE POL, J.; VOLMAN, M.; ELBERS, E.; BEISUIZEN, J. Measuring scaffolding in teacher: Small- group interactions. *In*: GILLIES, R. M. (Ed.). **Pedagogy:** New developments in the learning sciences. Hauppage: Nova Science Publishers, 2012. p. 151–188.

VAN DE POL, J.; VOLMAN, M.; BEISHUIZEN, J. Scaffolding in teacher–student interaction: A decade of research. **Educational psychology review**, v. 22, p. 271-296, 2010.

VORHÖLTER, K. Enhancing metacognitive group strategies for modelling. **ZDM Mathematics Education**, v. 51, n. 4, p. 703-716, 2019.

WOOD, D.; BRUNER, J. S.; ROSS, G. The role of tutoring in problem solving. **Journal of Child Psychology and Psychiatry**, v. 17, p. 89–100, 1976.

VAN DE POL, J.; VOLMAN, M.; BEISHUIZEN, J. Scaffolding in teacher-student interaction: A decade of research. **Educational Psychology Review**, v. 22, p. 271–296, 2010.

Recebido: 15 abr. 2024.
Aprovado: 15 jul. 2024.
DOI: http://dx.doi.org/10.3895/etr.v8n2.18447.
Como citar:
ALMEIDA, L. M. W. de; KOWALEK, R. M.; SOUZA, F. L. de. Suporte em atividades de modelagem matemática: olhar sobre um plano de resolução. **Ens. Tecnol. R.**, Londrina, v. 8, n. 2, p. 318-336, ago. 2024. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/etr/article/view/18447. Acesso em: XXX.
Correspondência:
Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina. Departamento de Matemática. Rodovia Celso Garcia Cid, Pr 445 Km 380. Campus Universitário. Londrina, Paraná, Brasil.