

# Conhecimento especializado de professores em formação continuada no contexto da Modelagem Matemática

## RESUMO

**Eleni Bisognin**  
[eleni@ufn.edu.br](mailto:eleni@ufn.edu.br)  
[orcid.org/0000-0003-3266-6336](https://orcid.org/0000-0003-3266-6336)  
Universidade Franciscana (UFN),  
Santa Maria, Rio Grande do Sul,  
Brasil.

**Vanilde Bisognin**  
[vanilde@ufn.edu.br](mailto:vanilde@ufn.edu.br)  
[orcid.org/0000-0001-5718-4777](https://orcid.org/0000-0001-5718-4777)  
Universidade Franciscana (UFN),  
Santa Maria, Rio Grande do Sul,  
Brasil.

Nesse artigo são descritos resultados de um estudo que teve como objetivo investigar a mobilização do Conhecimento Especializado do Conteúdo no Contexto da Modelagem Matemática, por um grupo de professores, alunos de um Curso de mestrado em Ensino de Matemática, ao desenvolverem atividades de modelagem. Denominamos Conhecimento Especializado do Conteúdo no contexto da Modelagem Matemática ao conhecimento que evidencia as características do conhecimento especializado do conteúdo matemático bem como as competências referentes a cada etapa do processo de modelagem. Os dados da pesquisa foram obtidos da observação do trabalho em sala de aula, dos registros escritos dos alunos e da gravação em áudio dos comentários durante o desenvolvimento da tarefa. Para análise dos resultados foram elencadas duas categorias de análise: a) Conhecimento Especializado do Conteúdo e b) Competências, com seus respectivos descritores. Pode-se inferir que os participantes da pesquisa construíram um conhecimento especializado no contexto da Modelagem Matemática pois, utilizaram uma linguagem matemática correta, utilizaram diferentes representações gráficas e analíticas na construção e na interpretação do modelo. Os argumentos utilizados foram coerentes para responder as conjecturas e os problemas formulados. Os alunos foram capazes de apresentar uma análise crítica e uma apresentação clara dos resultados obtidos, competências essas necessárias para o professor ensinar Matemática.

**PALAVRAS-CHAVE:** Conhecimento Matemático; Ensino; Modelo Matemático; Formação Continuada.

## INTRODUÇÃO

Atualmente muitos pesquisadores na área de Educação Matemática têm voltado sua atenção para a formação inicial ou continuada de professores, com foco na construção de conhecimentos que o professor necessita ter para ensinar Matemática. Nesse sentido, diferentes abordagens são utilizadas com vistas à construção desses conhecimentos. Uma das abordagens que tem se destacado nas últimas décadas, com implicações no ensino e na aprendizagem da Matemática é a Modelagem Matemática. A importância dessa abordagem tem sido discutida no âmbito da Educação Matemática, em publicações de artigos científicos em revistas, em anais de eventos e nos cursos de formação inicial e continuada de professores conforme trabalhos de Doerr (2007); Kaiser, Schwarz e Tiedemann (2010); Blum (2015); Mutti e Klüber (2018); Almeida (2022), entre outros. Nesses trabalhos os autores destacam as contribuições dessa abordagem no ensino e as competências que podem ser desenvolvidas com a utilização da Modelagem Matemática.

Na literatura encontramos diferentes concepções sobre a Modelagem Matemática e suas diferentes formas de utilizá-la no ensino. Para Bassanezi (2002, p.20), “modelagem matemática é a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos” e, para Almeida e Brito (2005, p. 19) a “modelagem matemática é uma alternativa pedagógica para o ensino de matemática por meio de situações-problema não matemáticas”. Nossa concepção de Modelagem Matemática está em concordância com as concepções apresentadas por esses autores.

Atuando num Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, nosso olhar volta-se para os trabalhos relativos à formação de professores em que a abordagem é a Modelagem Matemática. No Brasil, na linha de formação de professores, destacamos os trabalhos Mutti e Klüber (2018); Malheiros, Forner, Souza (2020) entre outros. Nesses trabalhos são apresentados resultados de pesquisas relativos à utilização da Modelagem Matemática, destacando sua eficácia bem como são descritos obstáculos oriundos tanto do sistema escolar quanto dificuldades dos próprios professores no domínio do conhecimento matemático, que dificultam sua utilização nas escolas ou em cursos de formação inicial. Em Ceolim e Caldeira (2017) os autores analisam os obstáculos e dificuldades apresentados por professores de Matemática recém-formados, ao utilizarem a Modelagem Matemática em suas aulas na Educação Básica e, no contexto da formação inicial.

Nesse trabalho nossa atenção está voltada para a construção de conhecimentos que o professor necessita para ensinar Matemática. Referente ao ensino da Matemática, muitos pesquisadores têm-se dedicado ao estudo de um conhecimento necessário ao professor para desempenhar a tarefa de ensinar. Nesse sentido destacamos os trabalhos de Ball, Hill e Bass (2005); Doerr (2007); Hill, Ball e Schilling (2008); Stillman (2011); Ribeiro e Powell (2019), entre outros.

Na Educação Matemática, as pesquisas referentes ao conhecimento matemático para o ensino têm como base o marco teórico de Shulman (1986), cujo Conhecimento Pedagógico do Conteúdo tem sido elemento chave para esses estudos. O autor destaca três categorias de conhecimento: Conhecimento do Conteúdo, Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e Conhecimento Curricular,

sendo o segundo definido como aquele “que vai além do conhecimento da disciplina em si para a dimensão do conhecimento para ensinar”.

A partir desse referencial teórico de Shulman (1986), os autores Ball, Thames e Phelps (2008) definem o Conhecimento Matemático para o Ensino como “o conhecimento matemático necessário para levar adiante a tarefa de ensinar matemática” (p.395). Nos trabalhos de Ball, Hill e Bass (2005); Hill, Ball e Schilling (2008); Ball, Thames e Phelps (2008) os autores apresentam um modelo elaborado a partir da observação da prática, identificando as tarefas usuais realizadas por professores as quais exigem conhecimentos matemáticos específicos. Esse modelo denominado Conhecimento Matemático para o Ensino, foi proposto para que se possa analisar a natureza do conhecimento matemático e como ele pode auxiliar na tarefa de ensinar. Não se trata somente de um conhecimento matemático, mas de uma integração entre Matemática e ensino. É o conhecimento de Matemática do professor que se faz necessário para executar o trabalho de ensinar. Para uma melhor compreensão Ball, Thames e Phelps (2008) subdividem a categoria Conhecimento do Conteúdo em Conhecimento Comum do Conteúdo e Conhecimento Especializado do Conteúdo. Essa última categoria é formada pelos conhecimentos e habilidades matemáticas exclusivas do professor como por exemplo, avaliar as possibilidades de usar alguma abordagem específica para ensinar determinado tópico.

Nessa pesquisa, focamos nosso trabalho na categoria do Conhecimento Especializado do Conteúdo no contexto da Modelagem Matemática. Por Conhecimento Especializado do Conteúdo no Contexto da Modelagem Matemática, entendemos o Conhecimento Especializado do Conteúdo conforme categorias destacadas por Ball, Thames e Phelps (2008), bem como as competências descritas por Stillman (2016) e Kaiser, Schwarz e Tiedemann (2010).

Considerando o Conhecimento Especializado do Conteúdo e as categorias elencadas por Ball, Thames e Phelps (2008), Hurrell (2013), elaborou descritores para cada categoria os quais serviram de inspiração para análise dos resultados dessa pesquisa.

Assim, nesse trabalho, nosso propósito é investigar a mobilização do Conhecimento Especializado do Conteúdo no Contexto da Modelagem Matemática, por um grupo de professores, alunos de um Curso de mestrado em Ensino de Matemática, ao desenvolverem atividades de modelagem

O artigo está estruturado do seguinte modo: primeiramente apresenta-se uma breve introdução contendo uma justificativa e propósito da pesquisa; a seguir, o referencial teórico que dará sustentação à análise dos resultados; na sequência, os caminhos metodológicos da pesquisa; depois, a descrição e a análise da atividade desenvolvida e, por último, as considerações finais.

## REFERENCIAL TEÓRICO

A Modelagem Matemática e seu papel na Educação Matemática têm recebido crescente atenção na literatura. O número crescente de publicações revela distintas abordagens ou concepções da Modelagem Matemática, tanto no seu aspecto prático de uso em sala de aula, como em pesquisas teóricas a respeito. Essas diferentes concepções ocasionam modos diversos de utilizar a Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem. Em Almeida e Carreira (2019)

as autoras apresentam uma discussão teórica sobre a configuração de atividades de modelagem e destacam que a concepção ou perspectiva de modelagem adotada influencia fortemente o desenho de tarefas e suas execuções em sala de aula.

Existe na literatura várias formas de conceber e visualizar a estrutura de um processo de modelagem. De modo geral, todo processo é dividido em fases ou etapas. Semelhante às etapas descritas por Bassanezi (2002), Blum (2015) apresenta um esquema composto por sete passos ou etapas para descrever esse processo. O ponto de partida é uma situação ou um problema da realidade; tem-se a simplificação e construção de um modelo matemático representativo dessa situação e, posteriormente, a resolução matemática e interpretação da solução do problema. A seguir é realizado o confronto com os dados reais tendo-se a validação e a exposição dos resultados. Por partir de uma situação ou problema da realidade e retornar a ela, a Modelagem Matemática apresenta uma característica cíclica.

Em Blum (2015) o autor define modelo matemático “como uma imagem deliberadamente simplificada e formalizada de alguma parte do mundo real.” O autor coloca também, que os propósitos dos modelos não são apenas de descrever e explicar a situação-problema real, o qual o autor denomina de modelos descritivos, mas, também, prever ou até mesmo descrever parte do mundo real. Stillman (2016), também distingue os tipos de modelos utilizados. A autora considera dois tipos de modelos, os descritivos e modelos prescritivos. O modelo descritivo é geralmente o foco da prática, pois é usado para entender uma parte do mundo real, enquanto o modelo prescritivo fornece informações para uma tomada de decisão para atingir os objetivos.

Em Blum (2015) tem-se a conceituação de competência em Modelagem Matemática. Para o autor a competência em modelagem é conceituada como a capacidade de construir e aplicar modelos matemáticos seguindo etapas apropriadas como as descritas em Blum (2015) em seus diversos esquemas. Durandt, Blum, Lindl (2022), definem competência em Modelagem Matemática como “uma capacidade individual de construir e usar modelos matemáticos práticos para resolver problemas do mundo real, bem como para analisar ou comparar tais modelos”. O conceito de competência também foi analisado por Kaiser, Schwarz e Tiedemann (2010). Nesse estudo os autores descrevem resultados de uma pesquisa em que investigaram o conhecimento profissional de futuros professores relativo às competências em modelagem. Considerando as categorias descritas por Shulman (1986) eles investigaram quais são as competências que esses professores têm nas áreas do conhecimento do conteúdo matemático, conhecimento pedagógico do conteúdo matemático e conhecimento pedagógico geral.

Para cada fase os autores destacam os seguintes tipos de competências: a) competência para realizar as diferentes etapas da modelagem; b) competência para refletir criticamente sobre a modelagem realizada e, c) competência para argumentar.

Há atualmente nos cursos de formação de professores, uma preocupação sobre quais conhecimentos e habilidades os professores devem ter para ensinar Matemática e como essas questões afetam o ensino. Esse estudo da prática docente, buscando caracterizar as ações que os professores realizam em sala de aula e analisar como isso promove o desenvolvimento de saberes para ensinar, é

uma linha de pesquisa importante nos cursos de formação de professores. Esses estudos visam a contribuir e auxiliar os professores na aquisição desses saberes necessários para ensinar.

Em relação ao conhecimento necessário para ensinar Matemática, Doerr (2007), coloca que não basta conhecer o conteúdo matemático para se tenha um ensino de qualidade; essa é uma condição necessária, mas não é suficiente. A autora coloca que, para conceituar a natureza do conhecimento necessário para ensinar Matemática, por meio da Modelagem Matemática, o ensino deve versar sobre a criação de modelos ou maneiras de interpretar as tarefas de ensino. Essas tarefas devem incluir escolhas apropriadas de situações para serem modeladas pelos alunos e escolhas adequadas de materiais curriculares que favoreçam o desenvolvimento e uso de estratégias para motivar o aluno a avaliar criticamente seus modelos. Destaca ainda que, no desenvolvimento de seus projetos pôde observar que o ensino, por meio da Modelagem Matemática, colocou exigências substanciais relativas ao conhecimento pedagógico do professor e enumera quatro características desse conhecimento, tais como a) ser capaz de ouvir, b) propiciar representações úteis e adequadas às ideias dos alunos, c) ouvir novas abordagens e, d) ajudar os alunos a estabelecerem conexões entre os diferentes tópicos.

A autora coloca que, ensinar Matemática por meio da Modelagem Matemática oferece desafios substanciais às ideias sobre pedagogia. Os professores envolvidos com esse tipo de ensino são propensos a encontrar uma diversidade de ideias oriundas dos alunos. Isso exige do professor um novo saber quanto ouvir os alunos, fornecer representações ricas e pertinentes e auxiliá-los a estabelecerem conexões entre os conceitos matemáticos.

Uma abordagem de modelagem para o ensino exige uma grande inversão nos papéis habituais de professores e alunos. Os alunos precisam fazer mais avaliação de suas próprias ideias e os professores precisam criar oportunidades para que esta avaliação possa ocorrer. (DOERR, 2007, p.78).

A autora conclui que os programas de formação de professores precisam abordar tanto o conhecimento do conteúdo quanto novos tipos de conhecimentos pedagógicos. Relacionado ao conhecimento matemático para o ensino, destacamos também o trabalho de Ribeiro e Powell (2019). Nele os autores descrevem resultados de uma pesquisa que teve como propósito investigar se, e como, a formação contínua de professores, por meio da Modelagem Matemática, pode contribuir para o conhecimento matemático.

Tendo como aporte teórico os resultados de pesquisas descritos, nesse trabalho temos como propósito investigar a mobilização do Conhecimento Especializado do Conteúdo no Contexto da Modelagem Matemática, por professores em formação continuada, alunos de um curso de mestrado em Ensino de Matemática.

## **METODOLOGIA**

Para esse estudo, foi adotada uma abordagem de pesquisa qualitativa para investigar a mobilização do Conhecimento Especializado do Conteúdo no Contexto da Modelagem Matemática, pelos professores participantes da pesquisa no

desenvolvimento de tarefas de modelagem. Participaram da pesquisa nove professores em formação continuada, alunos de um curso de Mestrado em Ensino de Matemática que aceitaram o convite para participar da pesquisa. Como o curso de mestrado não contempla uma disciplina específica que aborda a Modelagem Matemática, as autoras ofereceram esse curso de curta duração para os professores alunos do curso de mestrado, para conhecerem e experienciem a Modelagem Matemática como alunos e incorporarem essa abordagem em suas práticas de sala de aula, como professores. Esse minicurso faz parte de um projeto maior sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino avaliado pelo Comitê de Ética sob número 08856819.8.0000.5306.

Os encontros do grupo aconteceram em horário extraclasse. Desses professores, cinco tinham mais de cinco anos de experiência atuando na docência com alunos da Educação Básica, três eram professores do Ensino Médio, com aproximadamente três anos de docência, e uma era professora de uma Universidade, atuando num curso de formação inicial de professores de Matemática, com dois anos de experiência. Os professores participantes da pesquisa apresentavam trajetórias profissionais distintas, mas todos costumavam participar de cursos de formação continuada. Todos os participantes da pesquisa já haviam participado de eventos e de cursos de curta duração em que foram relatadas experiências de ensino com o uso da Modelagem Matemática, porém, ainda não haviam participado ou desenvolvido experiências com essa abordagem.

Foi proposto às professoras participantes da pesquisa, uma atividade utilizando a Modelagem Matemática e, para o seu desenvolvimento elas foram divididas em três grupos  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$ . Para esse trabalho acompanhou-se o Grupo  $G_3$ , o qual foi composto pelas alunas  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ . A primeira e a última ( $A_1$  e  $A_3$ ) eram professoras que atuavam no Ensino Médio e a segunda ( $A_2$ ) atuava num curso de Licenciatura em Matemática. A escolha do grupo  $G_3$  deu-se em função do conhecimento teórico das participantes do grupo relativo à Modelagem Matemática devido a suas leituras e, também, pela capacidade e dedicação ao estudo apresentado pelo grupo em outras disciplinas do Curso de Mestrado.

Como propõe as etapas da Modelagem Matemática, Bassanezi (2002) e Blum (2015), o ponto de partida é uma problemática da realidade. Foi colocada essa questão para as alunas e houve a discussão entre elas. O grupo  $G_3$  escolheu uma temática relacionada a uma situação vivenciada pela família da aluna  $A_3$ . Os familiares dessa aluna criavam Chinchilas para comercializar e a dúvida apresentada foi como determinar o momento propício para a venda para que a família não tivesse prejuízo com a manutenção dos animais, bem como quantos animais poderiam vender para que a família das Chinchilas continuasse a criação.

Essa atividade foi desenvolvida em três dias, com dois períodos em cada encontro no ano de 2019, totalizando seis horas aula. A coleta dos dados foi feita por meio das gravações em áudio durante o desenvolvimento da atividade, das observações das pesquisadoras em seus diários de campo, do relato escrito produzido pelo grupo e dos relatos orais das alunas.

Para análise dos resultados utilizamos uma abordagem interpretativa conforme Bogdan e Biklen (2010). Essa abordagem visa a descrição direta de uma experiência ou evento levando em consideração a interpretação dos significados atribuídos pelos sujeitos a suas ações. Nessa pesquisa foi realizada uma descrição da atividade desenvolvida no sentido de captar aspectos do Conhecimento

Especializado do Conteúdo no Contexto da Modelagem Matemática, mobilizados pelas professoras.

## DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS DADOS

A análise dos dados foi feita sob a ótica do Conhecimento Especializado do Conteúdo no Contexto específico da Modelagem Matemática. O Quadro 1 a seguir, mostra um esquema das categorias e indicadores que caracterizam esse conhecimento e que serviram de base para análise dos resultados.

**Quadro 1** – Conhecimento Especializado do Conteúdo no Contexto da Modelagem Matemática

Categorias	Indicadores
Conhecimento Especializado do Conteúdo	<ul style="list-style-type: none"><li>-Uso de linguagem e simbologia matemática;</li><li>-Uso de diferentes representações semióticas;</li><li>-Estabelecimento de conexões entre os conceitos matemáticos;</li><li>-Formulação de conjecturas e comprovação de sua veracidade ou não;</li><li>-Formulação de problemas a partir dos dados obtidos;</li><li>-Solução matemática do problema.</li></ul>
Competências	<ul style="list-style-type: none"><li>-Competência para realizar as diferentes etapas da modelagem;</li><li>-Competência para refletir criticamente sobre a modelagem realizada;</li><li>-Competência para argumentar;</li><li>-Competência para apresentar os resultados com clareza e objetividade.</li></ul>

Fonte: Autores (2019).

No primeiro encontro com as alunas, foi apresentada e discutida a alternativa da Modelagem Matemática e a identificação das etapas que a descrevem. A temática escolhida pelo grupo foi a criação de Chinchilas e, tendo em vista a preocupação dos familiares da aluna A<sub>3</sub>, o grupo colocou as seguintes questões: qual o momento adequado para a venda para que a família não tenha gastos com a manutenção dos animais? Quantas Chinchilas podem ser vendidas para que a criação desses animais não seja afetada?

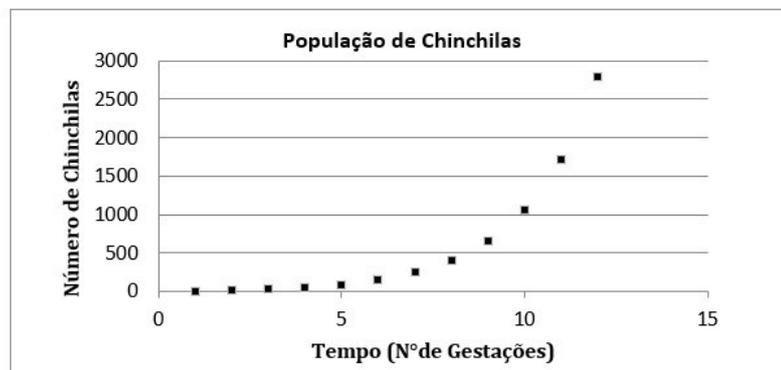
Conforme destacado em Kaiser, Schwarz, Tiedemann (2010) e Blum (2015) considerou-se uma situação do mundo real o ponto de partida do processo de modelagem. O primeiro aspecto observado, apesar das dificuldades iniciais apresentadas pelo grupo, foi a capacidade de interpretar e compreender a situação real e propor questões.

Partir de uma situação problema oriunda da realidade e buscar uma solução com o auxílio da Matemática, difere de uma aplicação da Matemática a problemas reais. Conforme destaca Stillman (2011), perguntar onde se pode usar um conhecimento matemático difere de indagar onde encontrar alguma matemática para auxiliar na solução do problema. No primeiro caso o modelo já foi construído e no segundo caso o modelo precisa ser construído por meio de uma matematização da situação do mundo real.

Colocadas as questões, as estudantes começaram a busca de informações sobre o tema além daquelas obtidas por meio dos familiares da aluna. Dessa pesquisa, o grupo obteve a informação de que uma Chinchila se torna adulta



**Figura 2** - Representação gráfica dos dados elaborada pelo grupo



Fonte: Participantes da pesquisa (2019).

Observou-se que, com as informações sobre o tempo de gestação, o número de animais que nascem em cada gestação, das hipóteses e simplificação das variáveis, o grupo foi capaz de traduzir o questionamento proposto em linguagem natural para um esquema e uma representação gráfica mais elucidativa do problema.

Elaborar um esquema e representar graficamente para tornar a situação mais compreensível é uma habilidade necessária para ensinar Matemática. Conhecer a importância da visualização para elaborar conjecturas e possíveis generalizações ou provas, faz parte do conhecimento especializado do professor (BALL, THAMES, PHELPS, 2008) em qualquer contexto de ensino.

Professora: Na formulação do problema vocês não consideraram o fato de alguma chinchila morrer, daí a reprodução não será a mesma.

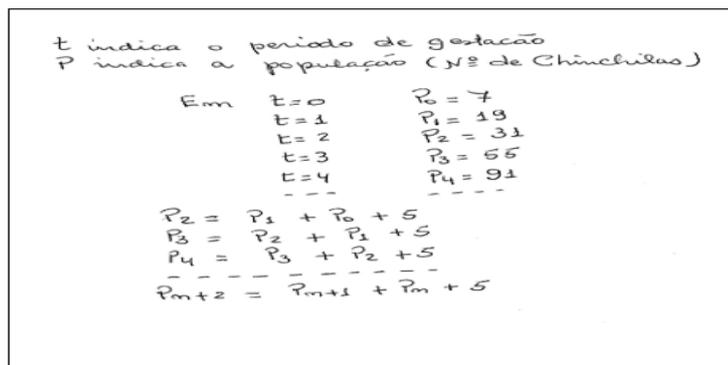
Aluna A2: Pensamos nisso professora, mas... não sei, achamos que o problema ficaria muito difícil de resolver. Optamos por um problema mais simples, por isso eliminamos algumas variáveis.

Professora: É possível construir um modelo matemático que represente essa situação?

Aluna A2: Vamos ver....vamos tentar.

Construir um modelo matemático representativo da situação é uma etapa que demanda um domínio do conhecimento do conteúdo matemático. Nesse sentido a compreensão conceitual e procedimental referente ao método de recorrência, possibilitou ao grupo descrever o modelo que permite calcular o número de Chinchilas em cada período. Um esquema de como esse modelo foi construído está representado na Figura 3, a seguir.

**Figura 3** - Modelo matemático elaborado pelo grupo G3.



Fonte: Autores (2019)

A matematização foi uma das fases que apresentou maior dificuldade às alunas. A presença e o incentivo dado pela professora foram importantes para elaboração de um modelo matemático. Como destacado por Doerr (2007), propiciar representações úteis e adequadas às ideias dos alunos é uma ação que deve ser desempenhada pelo professor no ensino por meio da modelagem.

Sousa e Almeida (2021) destacam que o ensino mediado pela Modelagem Matemática apresenta vários desafios e o professor precisa de conhecimentos específicos.

A construção do modelo matemático foi o primeiro obstáculo transposto pelo grupo. Outra dificuldade encontrada foi determinar uma solução matemática para o modelo. Percebe-se essa preocupação no diálogo entre a professora da classe e a aluna A<sub>2</sub>.

Professora: Como se resolve uma equação dessa natureza?

Aluna A<sub>2</sub>: Professora, nós obtivemos essa equação por recorrência...acho que é uma equação de diferenças. Trabalhamos com uma equação semelhante na disciplina de Cálculo, no curso de graduação, mas não sei se ainda lembro como se resolve.

Buscar ancoradouro nos conhecimentos prévios, portanto, é uma forma de tentar resolver uma nova situação. Por outro lado, a dificuldade para classificar a equação foi o primeiro entrave para resolução, pois não basta identificar as etapas da Modelagem Matemática, é necessário também o domínio do conteúdo matemático para resolver o modelo, conhecer os métodos de resolução para diferentes modelos matemáticos.

Após explicações da professora da disciplina, o grupo identificou que essa era uma equação de diferenças de segunda ordem não homogênea e sua solução é semelhante à de uma equação diferencial ordinária. Fazendo a conexão com o problema de Cauchy para equações diferenciais ordinárias, as alunas escreveram o problema de Cauchy para equações de diferenças  $P_{n+2} = P_{n+1} + P_n + 5$ ,  $n \geq 0$ , com valores iniciais  $P_0 = 7$  e  $P_1 = 19$ . Seguindo os procedimentos da solução de equações diferenciais ordinárias, as alunas calcularam primeiramente uma solução da equação homogênea, obtendo

$$P_n = C_0 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_1 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

em que  $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  são as raízes da equação característica  $r^2 - r - 1 = 0$  e  $C_0, C_1$  são constantes a serem determinadas. Em seguida, calcularam uma solução particular da equação não homogênea e, levando em consideração os valores iniciais, obtiveram

$$P_n = \left(\frac{1 + 13\sqrt{5}}{5}\right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - 13\sqrt{5}}{5}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + 5$$

que é a solução do problema.

O grupo sentiu muitas dificuldades na resolução desse problema e precisou se apoiar em livros e em textos em que esse conteúdo era abordado, mas instigado pela professora, foi capaz de buscá-lo e transferir esse conhecimento para esse caso particular.

Blum (2015) se refere à necessidade de se buscar um equilíbrio entre a ação independente dos alunos e a condução pelo professor. Nesse caso a professora da classe analisou problemas matemáticos semelhantes para indicar caminhos para solução do problema.

Observou-se nesse caso que foram estabelecidas conexões entre modelos de diferente natureza. Embora os métodos de resolução sejam semelhantes eles apresentam particularidades e o grupo necessitou dominar o conhecimento matemático para obter a solução do modelo.

Percebe-se indícios de que as alunas também conseguiram estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos quando, ao preparar a apresentação, a aluna A<sub>2</sub> fez uma observação sobre a equação do segundo grau  $r^2 - r - 1 = 0$ .

Aluna A<sub>2</sub>: Professora, eu acho que já trabalhei com uma equação semelhante. Numa disciplina da graduação nós trabalhamos com a sequência de Fibonacci, era um problema ligado aos coelhos, semelhante ao que estamos trabalhando.

Professora: Sim, esse problema é semelhante ao problema de Fibonacci.

Aluna A<sub>2</sub>: Como é interessante. Estamos calculando o número de Chinchilas e de repente aparece uma equação quadrática que se trabalha no Ensino Fundamental. Acho que só conhecendo o conteúdo somos capazes de estabelecer as conexões entre os conteúdos matemáticos. Esse problema ficou de fato muito interessante.

Aluna A<sub>3</sub>: Se podemos fazer uma relação com o problema de Fibonacci sobre a criação de coelhos, então acho que também podemos relacionar as raízes dessa equação quadrática com o Número de Ouro. Vimos isso no caso de Fibonacci.

O diálogo entre a professora e as alunas mostra a capacidade do grupo de estabelecer conexões com outros conceitos. Essa é uma característica destacada por Hurrell (2013) para construção de um Conhecimento Especializado do Conteúdo. Esse aspecto também foi destacado por (DOERR, 2007) quando coloca que o ensino por meio da Modelagem Matemática, coloca exigências relativas ao Conhecimento Pedagógico do Professor e, ajudar os alunos a estabelecerem conexões entre os diferentes tópicos, é uma delas.

Ao discutir com o grande grupo, observou-se que muitos dos alunos não conheciam as soluções dessa equação e não conseguiram estabelecer relações. Também, tiveram dificuldades de entender o método de solução do modelo matemático. Eles estavam cientes de suas limitações e comentaram que eles sentem necessidade de ter uma melhor compreensão do conteúdo, pois às vezes, eles se perguntam sobre os porquês e não sabem responder. Foi uma oportunidade que a Modelagem Matemática propiciou para o grupo pesquisar e conhecer o problema de Fibonacci e sua relação com o Número de Ouro.

Abordar conceitos matemáticos que já fazem parte do repertório dos estudantes, conectá-los e ressignificá-los faz parte da prática docente no que se refere aos conhecimentos necessários para o ensino. De todos os participantes, observou-se que apenas duas alunas foram capazes de fazer a conexão entre o conteúdo que estavam trabalhando e as raízes de uma equação do segundo grau e seu significado histórico. A maioria dos alunos comentou que não consegue fazer conexões com outros conteúdos, pois quando estão estudando determinado tópico, eles ficam centrados nos procedimentos sem estabelecer relações com outros conteúdos e suas diferentes representações.

Conhecer o processo de modelagem e considerar sua natureza cíclica é um conhecimento necessário para analisar o problema real. A percepção da continuidade do processo é percebida no diálogo das alunas.

Aluna A2: Professora, todo esse estudo que fizemos ainda não respondeu nossa questão.

Professora: Tem razão. O que precisam fazer para responder à questão inicial?

Aluna A2: Precisamos saber quantas Chinchilas podem ser vendidas e o melhor momento para fazer isso.

Ao formular questões como: quantos filhos jovens haverá em cada período? E quantos filhos adultos? Qual a porcentagem de Chinchilas adultas, em relação à população total, pode ser colocada à venda? Como vamos obter esses dados? Que estratégia vamos utilizar para resolver o problema? foram aspectos levantados na discussão estabelecida pelas alunas. A elaboração desses questionamentos demonstra a compreensão do grupo sobre a tarefa que precisam executar, além da clareza dos propósitos estabelecidos. Observamos, nesse questionamento, que as alunas apresentavam a competência destacada por Stillman (2011), sobre a clareza do problema real e sobre as questões que precisavam ser respondidas para obter uma solução satisfatória ao problema proposto.

Para responder ao questionamento levantado o grupo elaborou um quadro, mostrado na Figura 4, com os valores da população total de Chinchilas, das Chinchilas jovens e das Chinchilas adultas.

**Figura 4 - Número total de Chinchilas, Chinchilas jovens e Chinchilas adultas**

Período	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
População de Chinchilas	7	19	31	55	91	151	247	403	655	1063	1723	2791	4519
Chinchilas adultas	0	0	12	24	48	84	144	240	396	648	1056	1716	2784
Porcentagem	0	0	39	46	53	56	58	60	60	60,8	61,2	61,4	61,6

Fonte: Autores (2019)

Conhecendo o número de Chinchilas jovens e o número de Chinchilas adultas, foi possível calcular a porcentagem de Chinchilas adultas em relação à população total dos animais, uma vez que só eram vendidas Chinchilas adultas. Essa informação era importante para determinar o número de Chinchilas que podiam ser vendidas e manter estáveis a família. As porcentagens calculadas pelo grupo são mostradas na Figura 5.

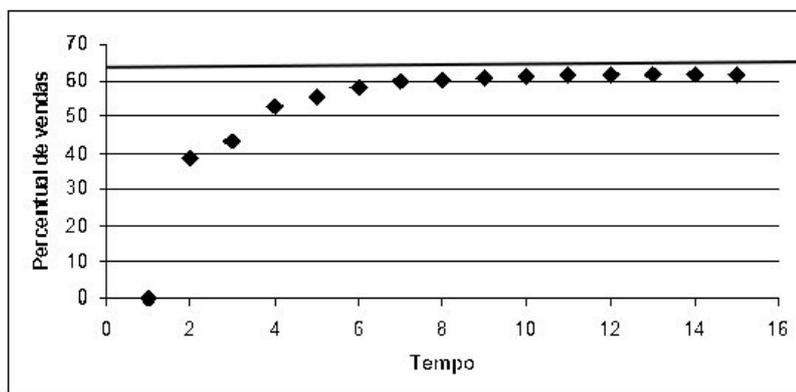
**Figura 5 - Porcentagens de Chinchilas adultas calculadas pelo grupo G3**

Período	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
População de Chinchilas	7	19	31	55	91	151	247	403	655	1063	1723	2791	4519
Chinchilas adultas	0	0	12	24	48	84	144	240	396	648	1056	1716	2784
Porcentagem	0	0	39	46	53	56	58	60	60	60,8	61,2	61,4	61,6

Fonte: Autores (2019)

No gráfico da Figura 6, a seguir, o grupo mostrou o comportamento dos percentuais de Chinchilas adultas em relação ao número total de Chinchilas em cada período.

**Figura 6 - Representação gráfica dos percentuais de Chinchilas adultas**



Fonte: Autores (2019)

Para a validação dos dados o grupo comparou os dados obtidos por meio da resolução do modelo matemático e os procedimentos usados pelos criadores para escolha e venda das Chinchilas. Essa comparação mostrou a eficácia do estudo realizado pelo grupo, pois em geral, as Chinchilas eram vendidas após a oitava e a décima segunda gestação.

Observamos que a articulação entre os dados obtidos da situação real, suas simplificações, elaboração do problema, solução e validação dos dados obtida no confronto com os dados reais, o grupo percorreu todas as etapas do processo de modelagem e nesse “fazer modelagem”, simultaneamente mobilizaram conhecimentos especializados tanto no sentido do conteúdo matemático, conforme conceituado por Ball, Thames e Phelps (2008) como as competências necessárias para utilização da Modelagem Matemática.

### **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A pesquisa foi realizada num curso de formação continuada de professores, tendo como propósito investigar a mobilização do Conhecimento Especializado do Conteúdo no Contexto da Modelagem Matemática. Foram analisadas as ações e o material produzido por um grupo de professoras, alunas de um Curso de Mestrado em Ensino de Matemática. Foram acompanhadas todas as etapas da Modelagem Matemática em que o grupo se envolveu na busca de solução de um problema da vida real vivenciado pela família de uma das componentes do grupo.

A ação das alunas foi analisada sob a ótica do Conhecimento Especializado do Conteúdo no Contexto da Modelagem Matemática considerando os aspectos do Conhecimento Especializado do Conteúdo segundo as ideias de Ball, Thames e Phelps (2008), bem como as competências relatadas por e Kaiser, Schwarz e Tiedemann (2010) sobre a utilização da Modelagem Matemática no ensino.

Ao propor o desenvolvimento de um curso de curta duração aos alunos do curso de Mestrado em Ensino de Matemática, para trabalharem especificamente no desenvolvimento de tarefas de Modelagem Matemática, tivemos também, a intenção de desafiá-los a utilizarem essa abordagem em suas aulas como professores de Matemática.

Da análise dos resultados percebemos fortemente a contribuição do conhecimento matemático das integrantes do grupo na construção e resolução do modelo, tanto no aspecto conceitual como procedimental. Essa contribuição deu-se na construção do modelo matemático ao utilizarem uma linguagem e simbologia matemáticas precisas e da capacidade de generalizar. Observamos também, a capacidade das integrantes do grupo de fazer a conexão e a transferência de conhecimentos entre um problema de Cauchy, descrito por equações de diferenças e um descrito por equações diferenciais ordinárias. Embora o método de solução nos dois casos seja semelhante, ele exigiu certa maturidade e conhecimento dos procedimentos de cálculo para obter a solução geral. O modelo matemático construído e o método para obter sua solução exigiram do grupo um pensamento matemático mais aprofundado

Outro aspecto que mostrou a aquisição de um conhecimento especializado pelo grupo foi na apresentação dos resultados. O grupo utilizou recursos como tabelas e gráficos que facilitaram a visualização e mostraram a estabilização da quantidade de Chinchilas adultas e o momento propício para vendê-las. Observamos como a visualização auxiliou ao grupo concluir que, por volta da décima geração, o percentual de Chinchilas adultas sofre pequenas variações, portanto, esse é o momento propício para venda e responde ao problema real proposto. Essas conclusões apresentadas são evidências de que as alunas

conhecem a potencialidade dos recursos visuais para apresentar suas conjecturas e comprovar suas conclusões.

O problema real de investigar o momento adequado de vender as Chinchilas pode ser analisado de diferentes óticas. O modelo construído pelo grupo, e apresentado nesse artigo, não é certamente um modelo para se trabalhar na Educação Básica, mas outros modelos podem ser construídos com os dados levantados. Doerr (2007) coloca que, as tarefas de modelagem oferecem aos alunos a oportunidade de desenvolver uma diversidade de abordagens para expressar suas interpretações de uma determinada situação.

Considera-se, portanto, que as experiências com a Modelagem Matemática poderá ser uma das formas que permita contribuir com a prática do professor que ensina Matemática com foco no Conhecimento Especializado do Conteúdo no Contexto da Modelagem Matemática.

# Specialised knowledge of teachers in continuous training in the context of Mathematical Modeling

## AABSTRACT

In this article are described results of a study that aimed to investigate the mobilization of Specialized Content Knowledge in the Context of Mathematical Modeling, by a group of teachers, students of a master's degree in mathematics teaching, when developing activities of modeling. We call Specialized Content Knowledge in the context of Mathematical Modeling to knowledge that highlights the characteristics of specialized knowledge of mathematical content as well as the skills related to each stage of the modeling process. The research data were obtained from the observation of the work in the classroom, the written records of the students and the audio recording of the comments during the development of the task. For analysis of the results were listed two categories of analysis: a) Specialized Knowledge of Content and b) Skills, with their respective descriptors. It can be inferred that the research participants built a specialized knowledge in the context of mathematical modeling because they used a correct mathematical language, used different graphical and analytical representations in the construction and interpretation of the model. The arguments used were consistent to answer the conjectures and problems formulated. Students were able to present a critical analysis and a clear presentation of the results obtained, skills that are necessary for the teacher to teach Mathematics.

**KEYWORDS:** Mathematical Knowledge for Teaching. Mathematical Model. Continuing Teacher Training.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, L. W. Uma Abordagem Didático-pedagógica da Modelagem Matemática. **Vidya**, v.42, n.2, p.121-145, jul./dez. 2022.
- ALMEIDA, L. W.; BRITO, D.S; Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência e Educação**, v.11, n.3, p.483-498, 2005.
- ALMEIDA, L. W.; CARREIRA, S. The configuration of mathematical modelling activities: a reflection on perspective alignment. *In*: JANKVIST, U. T.; HEUVEL-PANHUIZEN, M. S.; VELDHUIS, M. (Eds). **CERME-11 – Proceedings of the sixth congress of the european society for research in mathematics education**. [S.l]: Utrecht, 2019. p. 1112–1119.
- BAIOA, A. M.; CARREIRA, S. Simulation and prototypes in mathematical modelling tasks. *In*: JANKVIST, U. T.; HEUVEL-PANHUIZEN, M. S.; VELDHUIS, M. (Eds). **CERME-11 – Proceedings of the sixth congress of the european society for research in mathematics education**. [S.l]: Utrecht, 2019. p. 1136-1143.
- BALL, D. L., HILL, H. C., BASS, H. Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? **American Educator**, v.29, n.1, p.14-22, 2005.
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v.59, n.5, p.389-407, 2008.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo, SP: Contexto, 2002.
- BLUM, W. Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? *In*: Cho, S. J. (Ed.). **Proceedings of the 12th international congress on mathematical education: intellectual and attitudinal changes**. New York: Springer, 2015. p.73-96.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. 12. ed. Porto: Porto, 2010.
- CEOLIM, A. J.; CALDEIRA, A. D. Obstáculos e Dificuldades Apresentados por Professores de Matemática Recém-Formados ao Utilizarem Modelagem Matemática em suas Aulas na Educação Básica. **Bolema**, v. 31, p.760-776, 2017.
- DOERR, H. What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? *In*: BLUM, W.; GALBRAITH, P. L.; HENN, H.; NISS, M. (Eds). **Modelling and Applications in Mathematics Education**. New York: Springer, 2007. p.69-78.
- DURANDT, R.; BLUM, W.; LINDL, A. Fostering mathematical modelling competency of South African engineering students: which influence does the teaching design have?. **Educ Stud Math**, v.109, p.361–381, 2022.
- HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers’ Topic-Specific Knowledge of Students. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.39, n.4, p.372-400, 2008.
- HURRELL, D. P. What Teachers Need to Know to Teach Mathematics: an argument for a reconceptualised model. **Australian Journal of Teacher Education**, v.38, n.11, p.54-64, 2013.
- KAISER, G.; SCHWARZ, B.; TIEDEMANN, S. Future Teachers’ Professional Knowledge on Modeling. *In*: LESH, R.; GALBRAITH, P.; HAINES, C. R.; HURFORD, A. (Eds.). **Modeling Students’ Mathematical Modeling Competences**. New York: Springer, 2010.

MALHEIROS, A. P. S.; FORNER, R.; SOUZA, L. B. S. Formação de professores em modelagem e a escola: que caminhos perseguir? **ReBECCEM**, v.4, n.1, p. 01-22, 2020.

MUTTI, G. S. L.; KLÜBER, T. E. Aspectos que constituem práticas pedagógicas e a formação de professores em Modelagem Matemática. **Alexandria**, v.11, p. 85-107, 2018.

POLLAK, H. O. A history of the teaching of modelling. *In*: STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. (Eds.). **A history of school mathematics**. Reston, US: NCTM, 2003. v.1, p. 647–672

RIBEIRO, R, M.; POWEL, A. B. Mathematical Modeling and Teachers' Formation: a discussion on mathematical knowledge for teaching. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v.16, n.21, p.5-17, 2019.

SHULMAN, L. S. Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. **Educational Researcher**, v.15, n.2, p.4-14, 1986.

SOUSA, B. N. V. A.; ALMEIDA, L. W. Formação do Professor em Modelagem Matemática: um olhar sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v.12, n.2, p.1-28, 2021.

STILLMAN, G. A. Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modelling tasks at secondary school. *In*: KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R.; STILLMAN, G. A. (Eds.). **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**. Dordrecht, Netherlands: ICTMA14, 2011. p.165-180.

STILLMAN, G. A. State of the Art on Modelling in Mathematics Education. *In*: STILLMAN, G. A.; BROWN, J. P. (Eds.). **Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education**. [S.l.]: Springer, 2016.

**Recebido:** 13 abr. 2024.

**Aprovado:** 15 jul. 2024.

**DOI:** <http://dx.doi.org/10.3895/etr.v8n2.18413>.

**Como citar:**

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Conhecimento especializado de professores em formação continuada no contexto da Modelagem Matemática. **Ens. Tecnol. R.**, Londrina, v. 8, n. 2, p. 82-99, ago. 2024. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/etr/article/view/18413>. Acesso em: XXX.

**Correspondência:**

Eleni Bisognin

Universidade Franciscana. Rua dos Andradas, 1614. Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil.

**Direito autoral:**

Este artigo está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.

