Ensino e Tecnologia em Revista

ISSN: 2594-3901

http://periodicos.utfpr.edu.br/etr

Geometria dos fractais: uma proposta para o cálculo da dimensão da Árvore Pitagórica

RESUMO

A presente discussão trata-se de parte uma proposta de mestrado concluída. Sendo assim, este trabalho tem por objetivo apresentar uma possibilidade para o cálculo da dimensão do fractal Árvore Pitagórica a ser trabalhado nas aulas de Matemática. Diversas formas encontradas na natureza não permitem que sejam estudadas apenas com o auxílio de objetos matemáticos da Geometria Euclidiana. Sendo assim, o matemático Benoit Mandelbrot idealizou a Geometria dos Fractais para explicar e caracterizar formas irregulares presentes na natureza. Os fractais são formas geométricas que possuem três características fundamentais: autossemelhança, complexidade infinita e dimensão fracionária. Este estudo concentra a discussão a respeito da dimensão do fractal. A dimensão de um fractal não é dada por um número inteiro, conforme acontece com os elementos da Geometria Euclidiana. Ademais, a dimensão do fractal que diz respeito ao seu grau de ocupação no espaço, está associada à sua irregularidade, aspereza, textura e densidade.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Geometrias Não Euclidianas. Dimensão fracionária.

Luan Padilha
padilha.luan16@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4616-3182
Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, União da Vitória, Paraná, Brasil

Mariana Moran
mmbarroso@uem.br
https://orcid.org/0000-0001-8887-8560
Universidade Estadual de Maringá (UEM), Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Maringá, Paraná, Brasil

INTRODUÇÃO

As formas presentes na natureza, por vezes, podem ser analisadas, estudadas e modeladas com o auxílio de objetos da Geometria Euclidiana. Entretanto, existem formas naturais que são constituídas de irregularidades e para estudar essas formas irregulares, o polonês Benoit Mandelbrot foi precursor da Geometria dos Fractais. Mandelbrot denominou as formas irregulares de **fractais** pois se baseou na palavra *fractus*, adjetivo cuja origem vem do latim, correspondente a irregular, quebrar, fragmentar (BARBOSA, 2005).

Segundo Barbosa (2005, p. 9, grifo nosso),

> [...] essas formas geométricas possuem, entre outras, uma propriedade especial que pode ser considerada característica. Esses entes constituem uma imagem de si, própria em cada uma das suas partes. Segue que suas partes são semelhantes; propriedade conhecida como **autossimilaridade**.

As três principais características de um fractal são autossimilaridade, dimensão fracionária e complexidade infinita. Barbosa (2005, p. 19) justifica a abordagem da Geometria Fractal em sala de aula baseado em

> [...] conexões com outras ciências; deficiências da Geometria Euclidiana para estudo de formas da natureza [...]; difusão e acesso aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização; existência do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais [...]; sensação de surpresa diante da ordem na desordem.

Entendemos que esse tema possui relevância para ser abordado na Educação Básica, considerando que ele apresenta ligações com diversas áreas do conhecimento, como Medicina (SEDIVY *et al*., 1999), Computação (MARTINS; LIBRANTZ, 2006) e Economia (HAYASHI, 2002), além de ser evidenciado nos documentos oficiais de orientações curriculares, como o Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná, em âmbito estadual; e na Base Nacional Comum Curricular - BNCC, em âmbito nacional.

O Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná sugere o estudo dos fractais porque "[...] permite que os estudantes desenvolvam a criatividade, a intuição, e a imaginação, percebendo os processos de regularidades e interação dessas entidades" (PARANÁ, 2021, p. 541). Nesse sentido, nota-se que a temática dos fractais está presente em uma das habilidades na parte da BNCC para o Ensino Médio, referindo-se à primeira competência para a área de Matemática e suas Tecnologias:

> Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras) (BRASIL, 2018, p. 533)

Pesquisas como a de Rezende *et al*. (2018) defendem a exploração de fractais geométricos em sala de aula, bem como reconhecem, na Geometria dos Fractais,

Ens. Tecnol. R., Londrina, v. 7, n. 1, p. 256-267, jan./abr. 2023.

a possibilidade de aprendizagem de conceitos matemáticos, como área e perímetro de figuras planas, funções, ângulos, entre outros. A esse respeito, a abordagem da Geometria Fractal em sala de aula e a construção de fractais utilizando um software como o GeoGebra proporcionam aos professores a exploração de diversos conteúdos matemáticos, e propiciam aos alunos perpassar diferentes representações semióticas durante a exploração de entes geométricos, por exemplo, do fractal Hexagonal Tipo Dürer (MORAN; REZENDE, 2020).

Compreendemos que, por meio da Geometria dos Fractais, é possível abordar diferentes conteúdos matemáticos, como progressão geométrica, função logarítmica, equivalência de frações, dentre outros. Para a presente discussão, escolhemos como objeto geométrico de estudo, dentre uma variedade de fractais, a Árvore Pitagórica.

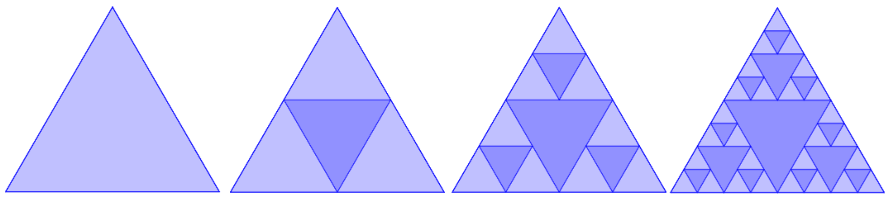
SOBRE A GEOMETRIA DOS FRACTAIS

O matemático polonês Benoit Mandelbrot foi o iniciador do estudo dos objetos geométricos chamados **fractais**. Essas entidades geométricas possuem propriedades particulares, e entre elas destacam-se a autossimilaridade, a complexidade infinita e a dimensão fracionária (BARBOSA, 2005). Mandelbrot denominou esses objetos de fractais baseando-se na palavra *fractus*, adjetivo do latim, do verbo *frangere,* que corresponde a quebrar, fragmentar.

A Geometria dos Fractais está relacionada a uma ciência chamada **Caos**. As estruturas fragmentadas, belas e complexas, fornecem uma ordem ao Caos, buscando padrões dentro de um sistema aparentemente aleatório (BARBOSA, 2005). Tanto a Geometria dos Fractais quanto a ciência do Caos desenvolveram-se pelo aprimoramento das técnicas computacionais. De acordo com Barbosa (2005), na natureza existem formas irregulares, e tentar simplificá-las usando formas da Geometria Euclidiana é considerado inadequado. Nesse sentido, a Geometria dos Fractais pode oferecer aproximações para essas formas.

Um fractal possui suas partes semelhantes ao conjunto como um todo, de forma exata ou aproximada, e isso é chamado de autossimilaridade (BARBOSA, 2005). A autossimilaridade exata é possível através de instrumentos de desenho, como o lápis, o compasso, a régua e o esquadro, ou por meio de softwares de geometria dinâmica. Tomemos como exemplo a construção do fractal Triângulo de Sierpinski feita no GeoGebra, conforme mostra a figura 1 a seguir.

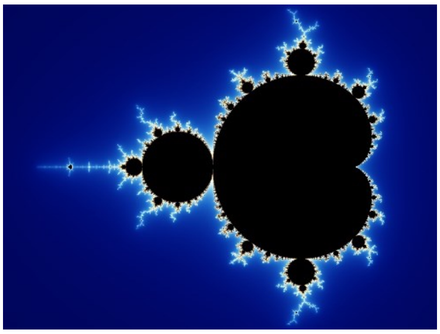
Figura 1 – Triângulo de Sierpinski nos primeiros estágios



Fonte: Autoria própria (2023).

O estudo da Geometria dos Fractais não poderia deixar de fora o conceito de comportamento caótico, e por esta razão estamos nos referindo ao fenômeno da imprevisibilidade. O Fractal de Mandelbrot ou Conjunto de Mandelbrot já foi considerado o mais complexo objeto da matemática (BARBOSA, 2005). Em suas regiões, os pontos são plotados escapando para o infinito, e as cores dependem do número de iterações que o ponto levou para escapar para o infinito (Figura 2).

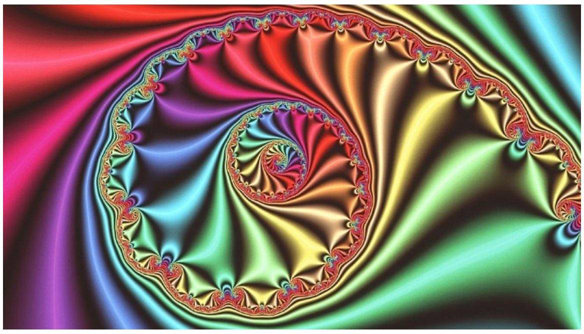
Figura 2 – Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Wikipédia (2018).

Na figura 3, podemos observar o Conjunto de Julia, obtido a partir de pontos do Conjunto de Mandelbrot.

Figura 3 – Conjunto de Julia



Fonte: BBC News (2019).

Em relação à noção de autossimilaridade aproximada, em que os padrões não se repetem com exatidão, podemos observar esses aspectos em elementos presentes na natureza, como na couve-flor romanesca e na samambaia, conforme ilustram as figura 4 e 5.

Figura 4 – Couve-flor romanesca

Fonte: Algar Sementes (2019).

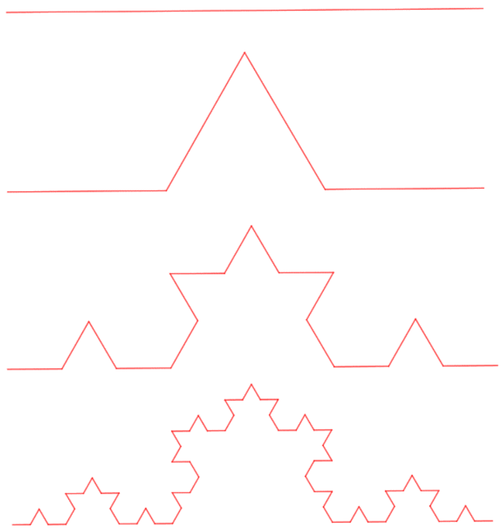
Figura 5 – Samambaia

Fonte: Fractal Matemático (2011**).**

O ramo da samambaia é semelhante à folha da samambaia, que por sua vez é semelhante à samambaia como um todo, consistindo em uma forma de autossimilaridade aproximada.

Outra característica do fractal é a complexidade infinita, expressada através do processo gerador dos fractais, podendo ser recursivo ou iterativo (BARBOSA, 2005). Em um fractal, podemos realizar um número infinito de iterações e nunca obteremos a imagem final desse fractal. A figura 6 apresenta o fractal Curva de Koch com iterações até a sua terceira etapa.

Figura 6 – Curva de Koch



Fonte: Autoria própria (2023).

O fractal será a figura limite do seu processo gerador, e vale ressaltar que esses objetos geométricos não perdem sua definição formal na medida em que são ampliados, mantendo a estrutura idêntica à original. É possível observar que, a cada segmento do fractal Curva de Koch, é realizada sua divisão em três partes de mesma medida, e na segunda parte constrói-se um triângulo equilátero. Tal iteração pode ser repetida infinitamente, dependendo da limitação do recurso utilizado para a representação do fractal.

Já a dimensão de um fractal não é necessariamente um número inteiro. Ela representa o grau de ocupação do fractal no espaço e está ligada ao grau de irregularidade ou fragmentação (BARBOSA, 2005).

Embora a Geometria dos Fractais seja uma temática nova no cenário educacional brasileiro, trazida à tona nos últimos anos, especialmente no Estado do Paraná (PEREIRA; BORGES, 2017), ela já havia sido recomendada nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná – DCE (PARANÁ, 2008) e está presente no Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná - CREP (PARANÁ, 2021). Este último recomenda sua abordagem na unidade temática de Geometria, nas noções de Geometrias Não Euclidianas.

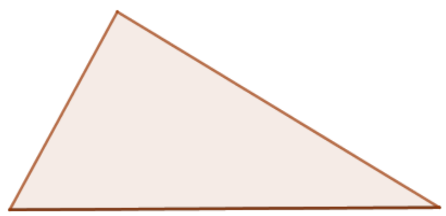
Além disso, Pereira e Borges (2017, p. 567) destacam que

> [...] a construção de fractais estimula o senso estético do aluno, proporcionando a criação de uma figura matemática que atrai sua atenção por ser, normalmente, desconhecida, fazendo-o imaginar qual formato tal figura assumiria nas próximas iterações e estimulando sua imaginação. Não podemos esquecer também do fato de que, em muitas das atividades, é exigido o manuseio de objetos de medição, como régua e compasso, o que contribui diretamente também para a compreensão de outros assuntos (geométricos, sistemas de medidas etc.).

A ÁRVORE PITAGÓRICA

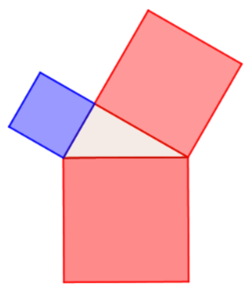
O fractal Árvore Pitagórica consiste inicialmente em um triângulo retângulo, cujos catetos e hipotenusa são dados pelo terno pitagórico fundamental (Figura 7). A partir da hipotenusa e dos catetos, os quadrados que formam o fractal são construídos. O quadrado, que tem como medida a hipotenusa, é o tronco inicial da árvore, e os quadrados que têm os catetos como medida constituem o iniciador-gerador[1] (Figura 8).

Figura 7 – Segmento, quadrado e cubo



Fonte: Autoria própria (2023).

Figura 8 – Segmento, quadrado e cubo

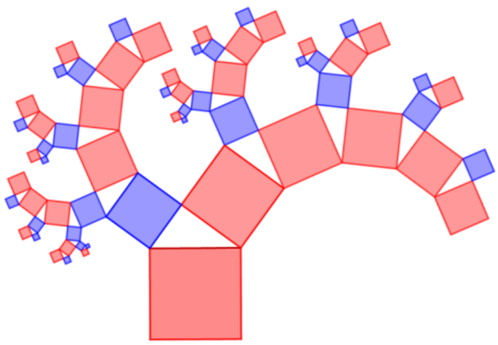


Fonte: Autoria própria (2023).

Para cada nova etapa são construídos, sobre o lado de cada quadrado oposto ao respectivo cateto, novos triângulos retângulos semelhantes ao inicial, tendo a medida da hipotenusa como aquela do lado do quadrado em que o triângulo está justaposto. A cada nova iteração, cada cateto se transforma em um lado de um novo quadrado, que se transforma em hipotenusa.

Conforme explica Barbosa (2005, p. 62), "[...] para se obter a autossimilaridade, os novos triângulos retângulos precisam ser semelhantes ao inicial, isto é, seus lados devem ser proporcionais aos números 3, 4 e 5" (Figura 9).

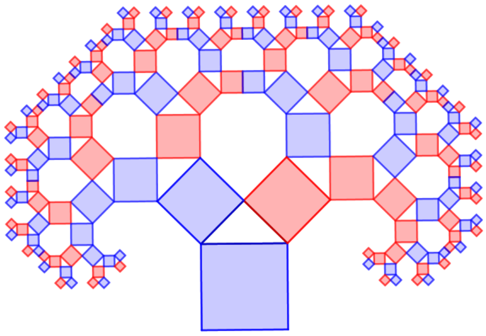
Figura 9 – Árvore Pitagórica Fundamental



Fonte: Autoria própria (2023).

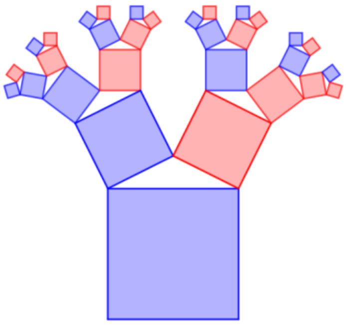
Escolhemos o fractal Árvore Pitagórica pois ela permite a apreciação do belo irradiante e da observação da regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades. Outro ponto levado em consideração é que fractais de árvores pitagóricas podem variar o triângulo inicial em outros ternos pitagóricos, por exemplo: Árvore Pitagórica Isósceles Regular (Figura 10), Árvore Pitagórica Isósceles Obtusângula (Figura 11) e Árvore Pitagórica Equilátera (Figura 12).

Figura 10 – Árvore Pitagórica Isósceles Regular



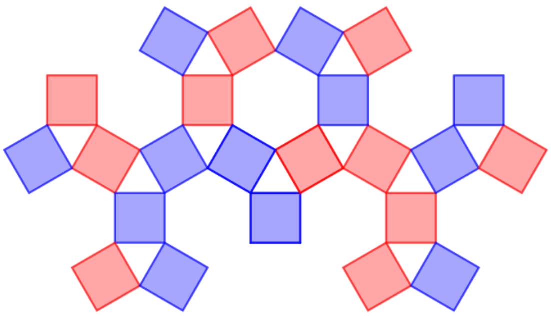
Fonte: Autoria própria (2023).

Figura 11 – Árvore Pitagórica Obtusângula



Fonte: Autoria própria (2023).

Figura 12 – Árvore Pitagórica Equilátera



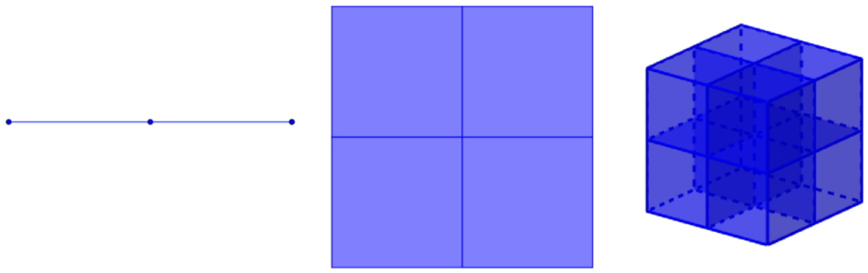
Fonte: Autoria própria (2023).

E ainda a Árvore Pitagórica permite diversas possibilidades de exploração em sala de aula, como: uma exploração relativa à contagem, de forma a contar o número de quadrados induzindo o estudante a expressar uma fórmula relacionada a esse aspecto; tendo em vista a autossimilaridade dos triângulos, podemos explorar a medida do comprimento dos lados dos triângulos e a relação entre os catetos e a hipotenusa; e uma exploração relacionada ao cálculo da medida do perímetro e da área do fractal em suas etapas, investigando uma expressão que represente o cálculo a partir do modelo gerador com lado de comprimento unitário.

A DIMENSÃO FRACTAL

Podemos recordar o conceito de dimensão a partir de objetos da Geometria Euclidiana. Por exemplo, um ponto possui dimensão zero, um segmento de reta possui dimensão um, um quadrado tem dimensão dois, e um cubo apresenta dimensão três. Para entender melhor, vamos considerar um segmento de reta, um quadrado e um cubo repartidos em objetos autossimilares (Figura 13).

Figura 13 – Segmento, quadrado e cubo

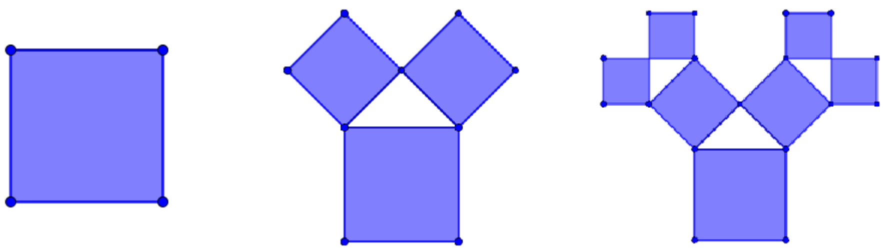


Fonte: Autoria própria (2023).

O segmento foi dividido em duas peças; o quadrado, em quatro peças (repartindo o lado em dois); e o cubo, em oito peças (dividindo a aresta em duas). Cada uma das peças é autossimilar ao objeto como um todo, e essa divisão é feita a partir de um fator de aumento (ou redução) também chamado coeficiente de proporcionalidade (BARBOSA, 2005). O número de peças em cada caso é igual: ao fator de aumento (2), para o segmento de reta; ao **quadrado** do fator de aumento (2^2), para o quadrado; e ao **cubo** (2^3), para o cubo. Com efeito, o número de peças é dado por $n = m^D$, onde **m** é o fator de aumento e **D** é a dimensão.

Vamos agora para o cálculo da dimensão a respeito do fractal Árvore Pitagórica. Considerando inicialmente a Árvore Pitagórica como um quadrado de comprimento unitário, teremos, da primeira para a segunda iteração, o número de peças **n** = 3; e o fator de aumento **m** = 2 (Figura 14).

Figura 14 – Exemplo de figura



Fonte: Autoria própria (2023).

Ens. Tecnol. R., Londrina, v. 7, n. 1, p. 256-267, jan./abr. 2023.

Abaixo, apresentamos o cálculo da dimensão referente à primeira iteração realizada:

$$n = m^D$$

$$3 = 2^D$$

$$D = \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$D \cong \frac{0{,}47712}{0{,}30103}$$

$$D \cong 1{,}585$$

Assim, temos a seguinte fórmula para os fractais: Dimensão = log (número de peças) / log (fator de aumento) ou $D = \frac{\log n}{\log m}$, chamada **Dimensão Fractal**.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo direcionamos nossa argumentação em torno do cálculo da dimensão do fractal Árvore Pitagórica por um dos métodos possíveis de aplicação. Destacamos que na literatura existem outros métodos para calcular e analisar a dimensão de um fractal, tais como: método de cálculo de Massa-Raio; interseção acumulativa; *BoxCounting*; *Dividers* e *Bouligand-Minkowski*. Os métodos para o cálculo da dimensão do fractal possuem se baseiam em um tipo de medição diferente e podem apresentar resultados diferentes para o mesmo fractal estudado (BACKES; BRUNO, 2005).

Por fim, esperamos que a presente discussão possa contribuir com todos que possuem interesse em estudar e debater em sala de aula sobre as Geometrias Não Euclidianas, e mais especificamente a Geometria dos Fractais. Aspiramos que este artigo possa fornecer subsídios para mais pesquisas que tratem a respeito da dimensão fractal, tema que se mostra producente.

Ens. Tecnol. R., Londrina, v. 7, n. 1, p. 256-267, jan./abr. 2023.

Geometry of Fractals: a proposal for calculating the dimension of the Pythagorean Tree

ABSTRACT

This discussion is part of a completed master's proposal. Therefore, this work aims to present a possibility for calculating the dimension of the Pythagorean Tree fractal to be worked on in Mathematics classes. Several forms found in nature do not allow to be studied only with the aid of mathematical objects of Euclidean Geometry. Thus, the mathematician Benoit Mandelbrot devised the Geometry of Fractals to explain and characterize irregular shapes present in nature. Fractals are geometric shapes that have three fundamental characteristics: self-similarity, infinite complexity and fractional dimension. This study concentrates the discussion about the dimension of the fractal. The dimension of a fractal is not given by an integer, as with the elements of Euclidean Geometry. Furthermore, the dimension of the fractal regarding its degree of occupation in space is associated with its irregularity, roughness, texture and density.

KEYWORDS: Mathematics Education. Non-Euclidean Geometries. Fractional dimension.

NOTAS

1 De acordo com Barbosa (2005), entende-se por iniciador-gerador o modelo gerador para todas as novas partes.

REFERÊNCIAS

ALGAR SEMENTES. **Couve-flor romanesca**. 2019. Disponível em: https://algarsementes.blogs.sapo.pt/couve-flor-romanesca-sementes-17162. Acesso: 10 jan. 2023.

BACKES, A. R.; BRUNO, O. M. Técnicas de Estimativa da Dimensão Fractal: Um Estudo Comparativo. **INFOCOMP Journal of Computer Science**, v. 4, n. 3, p.50–58, 2005. Disponível em: https://infocomp.dcc.ufla.br/index.php/infocomp/article/view/102. Acesso em: 10 jan. 2023.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal**: para a sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2005.

BBC NEWS. **Science photo library**. 2019. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-50656301. Acesso: 10 jan. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018.

FRACTAL MATEMÁTICO. **Samambaia**. 2011. Disponível em: http://fractalmatematico.blogspot.com/2011/09/o-que-e-um-fractal.html. Acesso: 10 jan. 2023.

HAYASHI, A. D. **Aplicação dos fractais ao mercado de capitais utilizando-se as Elliott Waves**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

MARTINS, A. M. S. M.; LIBRANTZ, A. F. H. A geometria fractal e suas aplicações em arquitetura e urbanismo. **Exacta**, v. 4, n. Esp, p. 91-93, 2006.

MORAN, M.; REZENDE, V. Uma exploração do Hexágono de Dürer com professores de Matemática da Educação Básica. **Revista BOEM**, Florianópolis, v. 8, n. 15, p.109-127, 2020. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/17141. Acesso em: 10 jan. 2023.

PARANÁ. Secretaria de Educação e do Esporte do Estado do Paraná. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná**. Curitiba: Sistema Estadual de Ensino do Paraná, 2021. Disponível: https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-08/referencial_curricular_novoem_11082021.pdf. Acesso em: 10 jan. 2023.

PARANÁ. Secretária de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Matemática. Curitiba: Secretária de Estado da Educação do Paraná, 2008.

PEREIRA, T.; BORGES, F. A. A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos. **Acta Scientiae**, v. 19, n. 4, p.563-581, jul./ago. 2017.

REZENDE, V.; MORAN, M.; MÁRTIRES, T. M.; PAIXÃO, F. C. O Fractal Árvore Pitagórica e Diferentes Representações: uma Investigação com Alunos do Ensino Médio. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 11, p. 160, 2018.

SEDIVY, R.; WINDISCHBERGER, C.; SVOZIL, K.; MOSER, E.; BREITENECKER, G. Fractal analysis: an objective method for identifying atypical nuclei in dysplastic lesions of the cervix uteri. **Gynecologic Oncology**, v. 75, n. 1, p. 78-83, 1999.

WIKIPÉDIA. **Conjunto de Mandelbrot**. 2018. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal. Acesso: 10 jan. 2023.

Recebido: abril 2023.
Aprovado: abril 2023.
DOI: http://dx.doi.org/10.3895/etr.v7n1.16786.
Como citar:
SANTOS, L. P.; MORAN, M. Geometria dos fractais: uma proposta para o cálculo da dimensão da Árvore Pitagórica. **Ens. Tecnol. R.**, Londrina, v. 7, n. 1, p. 256-267, jan./abr. 2023. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/etr/article/view/16786. Acesso em: XXX.
Correspondência:
Luan Padilha dos Santos
Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Av. Colombo, 5790, Bloco F67 sala 007, Maringá, Paraná, Brasil.
Direito autoral:
Este artigo está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.