Ensino e Tecnologia em Revista

ISSN: 2594-3901

http://periodicos.utfpr.edu.br/etr

Desafios à intuição: Quatro problemas de probabilidades condicionadas

Carla Santos
carla.santos@ipbeja.pt
orcid.org/0000-0002-0077-1249
Instituto Politécnico de Beja (I.P.Beja), Beja, Portugal / Centro de Matemática e Aplicações (CMA-FCT-UNL), Lisboa, Portugal

Cristina Dias
cpsd@ipportalegre.pt
orcid.org/0000-0001-6350-5610
Instituto Politécnico de Portalegre (I.P.Portalegre), Portalegre, Portugal / Centro de Matemática e Aplicações (CMA-FCT-UNL), Lisboa, Portugal

RESUMO

Na sociedade moderna, recorremos frequentemente a conceitos da Teoria das Probabilidade para a interpretação de informação probabilística ou para a tomada de decisão em situações de incerteza, pelo que as competências probabilísticas se tornaram indispensáveis para uma cidadania plena. A estreita ligação entre muitos problemas de probabilidades com ocorrências familiares impele a soluções sustentadas apenas pelo senso comum e intuição, mas muitos destes problemas escondem raciocínios complexos que conduzem a soluções contraintuitivas. Como é amplamente descrito na literatura, os conceitos de probabilidades que mais equívocos provocam são os de probabilidade condicionada e probabilidade conjunta, verificando-se que estes equívocos são transversais aos diversos graus de ensino e que sem tratamento específico dificilmente serão ultrapassados. Tendo como ponto de partida as principais dificuldades apresentadas pelos alunos, aquando do estudo de probabilidades condicionadas, apresentamos um plano de aula com quatro problemas que usamos na nossa prática letiva e que consideramos indispensáveis para desafiar o raciocínio probabilístico dos alunos. Para cada problema, identificamos o equívoco mais comum e propomos uma abordagem explicativa desse equívoco e do raciocínio correto.

PALAVRAS-CHAVE: Falácia da condicional transposta. Falácia do eixo temporal. Falácia da taxa base.

INTRODUÇÃO

A relevância das dificuldades no estudo da Teoria das Probabilidades tem desencadeado vasta investigação em âmbitos diversos e com diferentes abordagens por exemplo: Watson e Moritz (2002); Polaki (2005); Tarr e Lannin (2005); Estrada e Díaz (2006) e Díaz e Batanero (2009). Estas dificuldades manifestam-se em alunos de todos os graus de ensino e surgem associadas a multíplices aspectos, como, por exemplo, uma visão marcadamente determinística do mundo que os rodeia ou a disparidade entre a intuição e o desenvolvimento conceitual do domínio das Probabilidades, que contribuem determinantemente para erros e equívocos na resolução de problemas de probabilidades e para a incompreensão de muitos dos acontecimentos probabilísticos do cotidiano.

Ao longo dos últimos vinte anos, temos lecionado unidades curriculares de Estatística e Probabilidades, pertencentes aos planos curriculares de licenciaturas nas áreas da Engenharia, Ciências Sociais, Ciências da Saúde, Ciências Agrárias, Gestão de Empresas entre outras, em instituições do ensino superior politécnico e universitário português. Nessas unidades curriculares são lecionados diversos conteúdos de probabilidades entre os quais o de probabilidade condicionada, que temos constatado ser um dos conceitos que mais dificuldades motivam entre os alunos. Esta apreciação está em consonância com o descrito na literatura, que coloca a probabilidade condicionada e a probabilidade conjunta como os conceitos que mais equívocos causam no estudo da Teoria das Probabilidades por exemplo: Watson e Moritz (2002); Polaki (2005); Tarr e Lannin (2005), e evidencia que o desenvolvimento espontâneo da intuição probabilística é muito limitado, o que faz perdurar os equívocos, tornando-os transversais a alunos de todas as faixas etárias (CORREIA; FERNANDES; CONTRERAS, 2011, ESTRADA; DÍAZ, 2006).

Tal como destacado por Díaz e De la Fuente (2005), a compreensão da probabilidade condicionada desempenha um papel de relevo no leque de competências da cultura estatística de qualquer cidadão, pois o grau de crença sobre muitos dos acontecimentos aleatórios que ocorrem na vida cotidiana é alterado à medida que se adquirem novas informações. Mas a importância da probabilidade condicionada é mais abrangente, pois constitui também um requisito fundamental para o estudo da inferência estatística, da associação entre variáveis ou de modelos de regressão, entre outros, e assume particular importância na tomada de decisão em situações de incerteza em campos tão dispares como a Medicina, o Controle de Qualidade ou a Justiça.

Investigações de Falk (1979, 1986), Tversky e Kahneman (1983), Pollatsek *et al.* (1987), Gras e Totohasina (1995), Watson e Kelly (2007) e Díaz e Batanero (2009), junto de alunos dos diferentes graus de ensino, do básico ao superior, revelaram que a não identificação do acontecimento condicionante e não redução do espaço amostral, a falácia da condicional transposta, a falácia do eixo temporal e a falácia da taxa base constituem as dificuldades mais frequentes entre os alunos, aquando do cálculo de probabilidades condicionadas.

Perante as evidências da incapacidade do ensino formal em eliminar as intuições erradas associadas ao conceito de probabilidade condicionada, a solução passa por confrontar os alunos com situações que desafiem a sua intuição e recorrer a estratégias pedagógicas que possibilitem ao aluno a tomada de consciência das suas dificuldades. (BATANERO, 2001).

Ens. Tecnol.R., Londrina, v. 5, n. 1, p. 54-69, jan./jun. 2021.

Com o estudo, em sala de aula, de problemas desafiadores e contraintuitivos de probabilidades, em particular os que envolvem probabilidades condicionadas, pretendemos contribuir para a melhoria da intuição probabilística dos alunos e alertar os mesmos para as consequências do deficiente domínio do conceito de probabilidade condicionada. Em função destes objetivos, constituímos um leque de problemas, cuja seleção se baseou no descrito na literatura que aborda os erros e dificuldades associadas ao conceito de probabilidade condicionada e nas dificuldades que vimos identificando nos nossos alunos ao longo dos anos. Estes problemas permitem explorar cada uma das falácias identificadas por de Falk (1979, 1986), Tversky e Kahneman (1983), Pollatsek *et al.* (1987), Gras e Totohasina (1995) e Díaz e Batanero (2009).

ACASO E PROBABILIDADE

Sendo difícil determinar a origem da ideia de acaso, poderá supor-se que esta será quase tão antiga quanto a própria Humanidade. Ao observar ocorrências que se desencadeavam sem causa aparente, o Homem atribuía-os ao sobrenatural e à intervenção divina, ambicionando, no entanto, antever essas situações de incerteza. A evidência mais remota dessa ambição, encontrada entre os vestígios das culturas Suméria e Assíria, é o astrágalo. Este instrumento, feito do osso do calcanhar da ovelha (de onde advém o seu nome), que se pensa ter sido usado originalmente para a consulta da opinião dos deuses, é considerado como o antecessor do dado. (DAVID, 1955).

Estando a ocorrência dos acontecimentos aleatórios fora do controle do Homem, este sentiu necessidade de procurar padrões e quantificar o grau de incerteza a eles associados, para tentar prevê-los e acautelar os seus efeitos.

Com o Renascimento, o abandono progressivo das explicações sobrenaturais conduz a novas abordagens dos acontecimentos aleatórios, estimulando discussões filosóficas sobre probabilidades e os seus primeiros cálculos.

A primeira referência escrita ao cálculo de probabilidades encontra-se na obra de Luca Paccioli (1445-1509), *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, publicada em 1494. Tendo existido, no séc. XVI, outros trabalhos com alguns pequenos apontamentos de cálculo de probabilidades, devidos a Tartaglia (1500-1557), Galileo Galilei (1564-1642) e Girolamo Cardano (1501-1576), é amplamente aceite que a Teoria das Probabilidades teve o seu início na correspondência entre Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre Fermat (1601-1665), em que estes discutiam a melhor abordagem para resolver os problemas, relacionados com jogos de azar envolvendo dados, propostos a Pascal por Antoine Gombaud, mais conhecido por Chevalier de Mére (BELLHOUSE, 1988).

Desde os seus primórdios, o estudo das probabilidades sempre teve uma estreita ligação à vida cotidiana. No início, relacionado com os jogos de azar, mais tarde com problemas atuariais, estendendo-se progressivamente a quase todas as atividades humanas. Na sociedade de hoje, são diversas as circunstâncias em que recorremos às probabilidades, tanto para a interpretação de informação de natureza probabilística como para a tomada de decisão perante situações de incerteza, pelo que a formação em Probabilidades se tornou imprescindível em grande parte das áreas do conhecimento.

Ens. Tecnol.R., Londrina, v. 5, n. 1, p. 54-69, jan./jun. 2021.

Contrariamente ao que acontece em outros ramos da Matemática, a Teoria das Probabilidades é fértil em problemas de fácil compreensão, devido à sua estreita ligação com acontecimentos do cotidiano. A aparente simplicidade desses problemas impulsiona os alunos a proporem soluções sustentadas apenas no senso comum e na intuição. Contudo, estes problemas escondem frequentemente raciocínios complexos, impossíveis de desenvolver através do conjunto limitado de princípios heurísticos em que as pessoas confiam (KAHNEMAN; TVERSKY, 1982), que conduzem a soluções contraintuitivas. Do reconhecimento da importância da literacia estatística para o desenvolvimento de um raciocínio crítico e o exercício de uma cidadania informada e interventiva, surgiu a necessidade de estender o estudo da Estatística e das Probabilidades aos diferentes níveis de ensino. No caso particular das Probabilidades, esta decisão está em conformidade com a opinião de autores como Fischbein (1975), citado em Fischbein e Schnarch (1997), e Batanero (2013) que alertam para a imprescindibilidade do estudo das probabilidades desde os primeiros anos de escolaridade, sob pena de consolidação das intuições erradas.

A CAIXA DE BERTRAND E A NÃO REDUÇÃO DO ESPAÇO AMOSTRAL

No ensino das probabilidades, o conceito de probabilidade condicionada é, frequentemente, introduzido em estreita ligação com as técnicas formais de contagem, em experiências que consistem em “extrações sem reposição”. Esta abordagem torna acessível a resolução dos exercícios, uma vez que a noção de probabilidade condicionada, a identificação do acontecimento condicionante e a redução do espaço amostral são bem explícitas (TARR; LANNIN, 2005). No entanto, quando surgem problemas de probabilidades condicionadas em que a “visualização” da situação é mais difícil a restrição do espaço amostral passa despercebida.

A literatura sobre probabilidades é fértil em problemas onde a nossa intuição nos leva a menosprezar ou interpretar erroneamente a informação adicional de que dispomos. Um dos mais famosos é conhecido como “Caixa de Bertrand”.

O PROBLEMA DA “CAIXA DE BERTRAND”

O problema da “Caixa de Bertand” foi enunciado, pela primeira vez, pelo matemático francês Joseph Bertrand, na sua obra, de 1889, *Calcul des probabilités,* (CLARK, 2012). A situação descrita no problema baseia-se na existência de três caixas: uma caixa contendo duas moedas de ouro, uma com duas moedas de prata e uma caixa com uma moeda de ouro e outra de prata. Após a escolha aleatória de uma das caixas, extrai-se uma moeda dessa caixa. Tendo-se verificado que a moeda extraída é de ouro, qual a probabilidade de a outra moeda dessa caixa ser também se ouro?

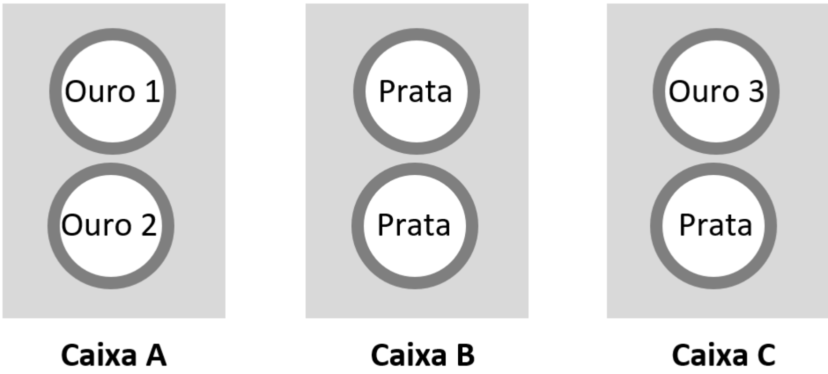
O EQUÍVOCO

Com base na intuição, o palpite (errado) é que a probabilidade de a outra moeda dessa caixa ser também de ouro é $\frac{1}{2}$. Da circunstância de a moeda extraída ser de ouro, conclui-se, acertadamente, que a caixa escolhida terá sido ou a que tem duas moedas de ouro ou a que tem uma moeda de ouro e outra de prata. O equívoco, tal como destacou o próprio Bertrand, está em assumir que a probabilidade de a outra moeda ser de ouro é igual à probabilidade de a outra moeda ser de prata.

A SOLUÇÃO

Na figura 1, estão representadas as três caixas e respetivos conteúdos, tendo-se numerado as moedas de ouro, de 1 a 3, por uma questão de facilidade de identificação.

Figura 1 – Representação das caixas do problema das caixas de Bertrand



Fonte: Elaboração própria (2020).

A impossibilidade de ter sido retirada uma moeda de ouro da caixa B, direciona o nosso raciocínio para as caixas A e C, considerando a experiência aleatória que consiste em extrair duas moedas consecutivamente de uma dessas caixas. Se as extrações ocorrerem na caixa A, o espaço de resultados da experiência é o conjunto $\Omega = \{(\mathrm{Ouro1}, \mathrm{Ouro2}), (\mathrm{Ouro2}, \mathrm{Ouro1})\}$, onde $(\mathrm{Ouro1}, \mathrm{Ouro2})$ representa o acontecimento em que a moeda extraída foi a moeda $\mathrm{Ouro1}$, tendo ficado na caixa a moeda $\mathrm{Ouro2}$. Para a caixa C o espaço de resultados da experiência é o conjunto $\Omega = \{(\mathrm{Ouro3}, \mathrm{Prata}), (\mathrm{Prata}, \mathrm{Ouro3})\}$. Visto que a primeira moeda extraída foi de ouro, o acontecimento $(\mathrm{Prata}, \mathrm{Ouro3})$ não está nas condições do problema, restando-nos três acontecimentos $(\mathrm{Ouro1}, \mathrm{Ouro2})$, $(\mathrm{Ouro2}, \mathrm{Ouro1})$ e $(\mathrm{Ouro3}, \mathrm{Prata})$. Destes apenas o primeiro e o segundo cumprem o pretendido, existir outra moeda de ouro na caixa de onde se retirou a primeira moeda de ouro. Há, portanto, 2 casos favoráveis em 3 possíveis, e a probabilidade procurada é de $\frac{2}{3}$.

Perante a elevada frequência com que ocorre o equívoco descrito, o problema da caixa de Bertrand deu origem a diversas variações, entre as quais está o jogo de apostas, designado por “Três cartas no chapéu” (KRÄMER; GIGERENZER, 2005), que tem como base uma carta em que as duas faces são pretas, uma carta em que duas faces são vermelhas e uma carta com uma face preta e outra vermelha por exemplo: (GARDNER, 1982, p. 93).

O PROBLEMA DE EDDY E A FALÁCIA DA CONDICIONAL TRANSPOSTA

Dada a simplicidade da fórmula de cálculo da probabilidade condicionada, os alunos revelam grande facilidade na sua memorização e na resolução de problemas que consistam na repetição de uma sequência de procedimentos já treinada. Mas, a destreza na utilização da fórmula, não certifica o domínio da resolução de problemas de probabilidades condicionadas, uma vez que, tal como confirma o trabalho Noddings et al. (1980), citado em Garfield e Ahlgren (1988), a grande maioria dos alunos não forma a representação interna do problema, limitando-se a reproduzir um processo vazio de significado.

As dificuldades, inerentes ao cálculo de probabilidades condicionadas, revelam-se habitualmente quando, para identificar as probabilidades a substituir na fórmula, é exigido ao aluno a interpretação de informação apresentada em linguagem corrente e a sua tradução para linguagem simbólica. Nesse processo de tradução, para linguagem simbólica, de enunciados de problemas que envolvem probabilidades condicionadas, surge frequentemente a falácia da condicional transposta (FALK, 1986), que consiste na confusão entre a probabilidade condicionada e a sua transposta. Esta dificuldade em identificar o acontecimento condicionante e o acontecimento condicionado, prejudica a aplicação correta da redução do espaço amostral o que compromete a compreensão e resolução de problemas de probabilidades condicionadas.

O conceito de probabilidade condicionada é, tal como afirma Feller (1968), uma ferramenta fundamental da Teoria das Probabilidades, sendo utilizado na tomada de decisão em diversos contextos, pelo que a adoção da falácia da condicional transposta na tomada de decisão em áreas nevrálgicas, como a Medicina ou a Justiça, acarretam consequências graves, como comprovam inúmeros casos existentes na literatura por exemplo: Eddy (1982); Thompson e Schumann (1987); Gigerenzer (2002) e Sangero e Halpert (2007).

Na área da Medicina, a falácia da condicional transposta é muito comum na interpretação de testes de diagnóstico, verificando-se que tanto pacientes como médicos confundem a sensibilidade do teste (ou seja, a probabilidade de o teste dar positivo na presença da doença) com o valor preditivo positivo (ou seja, a probabilidade que um resultado positivo de um teste signifique presença de doença. Uma prova disso pode ser encontrado no exemplo seguinte.

O PROBLEMA DE EDDY

Num estudo desenvolvido por Eddy (1982, p. 252), era solicitado aos médicos participantes que indicassem a probabilidade de uma mulher, cuja mamografia deu positiva (ou seja, a opinião do radiologista aponta para uma lesão maligna), ter realmente cancro de mama. Para tal, era-lhes fornecida a informação relativa à taxa de incidência da doença, à sensibilidade do teste (mamografia) e à taxa de falsos-positivos, respectivamente, 1%, 80% e 9,6%.

O EQUÍVOCO

No estudo de Eddy (1982), 95 dos 100 médicos a quem foi colocado o problema indicaram, para a probabilidade solicitada, valores próximos dos 75%, quando a resposta correta era menos de 8%. Tendo-se verificado que os médicos tinham considerado a probabilidade de ocorrência de cancro, dado que a mamografia deu positiva, aproximadamente igual à probabilidade de uma mamografia dar positiva, para uma doente com cancro, interpretado erradamente a precisão do teste (EDDY, 1982, p. 254).

A SOLUÇÃO

Considerando como Universo, Ω, o conjunto de todas as mulheres, e os acontecimentos M, " a mamografia deu positiva" e C , " a mulher tem cancro da mama", em linguagem simbólica, os dados fornecidos no problema indicam que:

$P(C) = 0{,}01$ (a probabilidade de uma mulher ter cancro de mama é 1% - taxa de incidência da doença);

$P(M\,/C) = 0{,}8$ (a probabilidade de o teste dar positivo na presença da doença é 80% - sensibilidade do teste);

$P(M\,/\bar{C}) = 0{,}096$ (a probabilidade de o teste dar positivo na ausência da doença é 9,6% - taxa de falsos-positivos).

Traduzindo para linguagem simbólica a questão colocada aos médicos, pretende-se calcular a probabilidade $P(C/M)$. Substituindo estes valores na fórmula de Bayes, conclui-se que a probabilidade de uma mulher ter realmente cancro de mama, perante um resultado positivo de uma mamografia, é aproximadamente 8%.

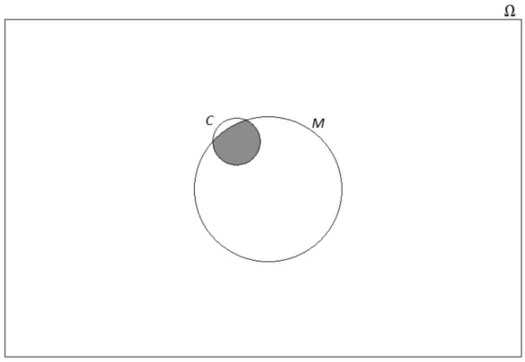
$$P(C/M) = \frac{P(M/C)\cdot P(C)}{P(M/C)\cdot P(C)+P(M/\bar{C})\cdot P(\bar{C})} = \frac{0{,}8\times 0{,}01}{0{,}8\times 0{,}01+0{,}096\times 0{,}99} = 0{,}078\,.$$

Tendo em consideração estudos, como o de Sedlmeier (1999), que sugerem que o treino com diagramas de Venn contribui para a eliminação da falácia da condicional transposta, Santos e Dias (2021) propõem a representação dos acontecimentos através de diagramas de Venn, como forma de contornar a falta de intuição probabilística do ser humano e simplificar a interpretação de problemas deste tipo.

Usando um diagrama de Venn para representar os dados do problema, C deverá cobrir 1% da área do Universo e M deverá abranger 80% da área de C e 9,6% da área exterior a C. Analisando o diagrama de Venn, usado em Santos e Dias (2021), que representa um esboço da representação diagramática dos dados do problema (figura 2), verifica-se que a área (sombreada) que corresponde à probabilidade de uma mulher, cuja mamografia deu positiva, ter realmente cancro é uma pequena parcela de M.

Ens. Tecnol.R., Londrina, v. 5, n. 1, p. 54-69, jan./jun. 2021.

Figura 2 – Tradução visual do problema de Eddy, num diagrama de Venn



Fonte: Santos e Dias (2021).

O PROBLEMA DA URNA DE FALK E A FALÁCIA DO EIXO TEMPORAL

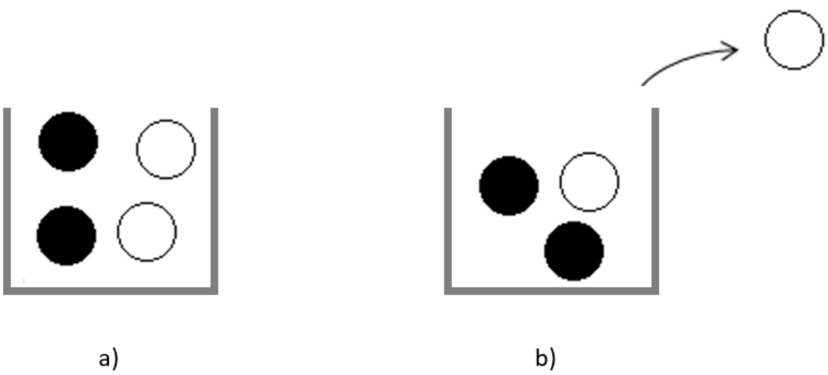
A falácia do eixo temporal, consiste na dificuldade em lidar com a probabilidade condicionada $P(A/B)$ quando o acontecimento condicionante (B) precede cronologicamente o acontecimento A (FALK, 1986, 1989, BATANERO; SANCHEZ, 2005).

O problema que se segue, apresentado originalmente em Falk (1986), tem sido frequentemente usado em diversos estudos sobre os equívocos e dificuldades dos alunos no cálculo de probabilidades condicionadas.

O PROBLEMA DA URNA DE FALK

Considerando uma experiência aleatória que consiste na extração sucessiva (sem reposição) de duas bolas de uma urna que contém duas bolas brancas e duas bolas pretas, é perguntado: (i) Se a primeira bola extraída é branca, qual a probabilidade de a segunda bola ser branca? (ii) Se a segunda bola extraída é branca, qual a probabilidade de a primeira bola ser branca?

Figura 3 – Composição da urna, antes (a) e após (b) a primeira extração



Fonte: Elaboração própria (2020).

O EQUÍVOCO

Nos estudos levados a cabo por Falk (1989), Díaz e Batanero (2009) e Fischbein e Schnarch (1997) verificou-se que grande parte dos alunos, apesar de concordarem que, devido à não reposição, o resultado da primeira extração influencia o resultado da segunda extração (respondendo corretamente a (i)), não aceitam que um acontecimento posterior possa ser usado para determinar a probabilidade de ocorrência de outro anterior a ele (respondendo incorretamente a (ii)).

Na resolução do item (i), os alunos compreendem que a probabilidade solicitada tem que contemplar a informação adicional, decorrente do resultado da primeira extração, e que esta informação dá origem à redução do espaço amostral, indicando como resposta $\frac{1}{3}$.

Na resolução do item (ii), a dificuldade em determinar a probabilidade inversa deve-se à interpretação da probabilidade condicional como relação temporal. Assumindo a irreversibilidade temporal, os alunos subestimam a informação fornecida pela primeira extração ao calcularem a probabilidade, não percebendo que, também neste caso, existe uma redução do espaço amostral. Para o item (ii) as respostas mais comuns são $\frac{1}{2}$.

Utilizando um problema distinto do de Falk, os investigadores Gras e Totohasina (1995) chegaram igualmente à conclusão de que é comum os alunos assumirem a existência de uma relação temporal entre os acontecimentos, e sugeriram que a utilização de diagramas em árvore, na resolução de problemas de cálculo de probabilidades condicionadas, acentua a visão cronológica deste conceito.

A SOLUÇÃO

Tal como está esquematizado na figura 3, existindo inicialmente quatro bolas na urna, perante o conhecimento de que na 1ª extração saiu uma bola branca passam a estar disponíveis, para a 2ª extração, três bolas, das quais apenas uma é branca, portanto a probabilidade solicitada é de $\frac{1}{3}$.

Como se pode perceber pela esquematização apresentada na Figura 3, a resposta correta é $\frac{1}{3}$, uma vez que, a probabilidade de a segunda bola extraída ser branca, está relacionada com a composição da urna imediatamente antes da segunda extração, ou seja, a composição decorrente de a primeira bola extraída ter sido branca.

O PROBLEMA DO TÁXI E A FALÁCIA DA TAXA BASE

Em situações em que se supunha que as pessoas se comportavam de forma racional, ocorrem erros de raciocínio, de forma sistemática e generalizada (CEREZO, 2005). Esses erros são originados pela necessidade de o ser humano simplificar os processos cognitivos de julgamento e tomada de decisão, para fazer face à complexidade do mundo que o rodeia (TONETTO *et al.*, 2005). Um desses erros de raciocínio, designado por falácia da taxa base, consiste em negligenciar a informação prévia, em julgamentos bayesianos.

Reconhecendo a gravidade das consequências da adoção da falácia da taxa base em julgamentos e tomadas de decisão em contextos clínicos, legais, sociopsicológicos e outros, tem sido dedicada vasta investigação a esta falácia por exemplo: Tversky e Kahneman (1971); Kahneman e Tversky (1972, 1973, 1983); Lyon e Slovic (1976); Fischhoff, Slovic e Lichtenstein (1979) e Bar-Hillel (1980).

Uma das circunstâncias em que se verifica a falácia da taxa base é quando, no julgamento da probabilidade de um acontecimento se prioriza a informação referente a uma parte da população em detrimento da informação respeitante à frequência relativa do acontecimento numa população (TVERSKY; KAHNEMAN, 1980).

Para demonstrar esta vertente da falácia da taxa base, em estudos experimentais, é usado, frequentemente, o "Problema do Táxi", cuja versão de Tversky e Kahneman (1980), descrevemos a seguir.

PROBLEMA DO TÁXI

Num acidente ocorrido à noite, está envolvido um táxi que se põe em fuga. Na cidade, em que ocorre o acidente, existem duas companhias de táxis, a Verde e a Azul, que possuem, respetivamente, 85% e 15% dos táxis dessa cidade. Uma testemunha identificou o táxi como sendo Azul. O tribunal testou a confiabilidade da testemunha, nas mesmas circunstâncias verificadas na noite do acidente, e concluiu que, numa amostra com igual número de táxis verdes e azuis, a testemunha identificou corretamente a cor, 80% das vezes e falhou em 20%. Qual a probabilidade de o táxi envolvido no acidente ser azul?

O EQUÍVOCO

Em todos os estudos experimentais, em que foram adotados problemas semelhantes a este, a resposta modal e mediana foi de 80%, o que indica que os intervenientes no estudo tiveram em consideração, apenas, a credibilidade da testemunha, negligenciando a taxa base, ou seja, a frequência relativa de táxis Verdes e Azuis.

A SOLUÇÃO

Considerando os acontecimentos T, "a testemunha identifica o táxi como azul", V, "o táxi é Verde" e A, "o táxi é Azul", em linguagem simbólica, os dados fornecidos no problema indicam que:

$P(A) = 0{,}15$ (a probabilidade de o táxi envolvido no acidente ser Azul é 15%);

$P(T/A) = 0{,}8$ (a probabilidade de a testemunha estar certa é de 80%, tendo identificado como Azul um táxi que era realmente Azul);

Ens. Tecnol.R., Londrina, v. 5, n. 1, p. 54-69, jan./jun. 2021.

Traduzindo para linguagem simbólica a questão colocada, pretende-se calcular a probabilidade $P(A/T)$ (a probabilidade de o táxi ser realmente azul, visto que a testemunha o identificou como azul).

$$P(A/T) = \frac{P(T/A)\cdot P(A)}{P(T/A)\cdot P(A)+P(T/\bar{A})\cdot P(\bar{A})} = \frac{0{,}8\times 0{,}15}{0{,}8\times 0{,}15+0{,}20\times 0{,}85} = 0{,}414\ ,$$

onde $P(T/\bar{A})$ representa a probabilidade de a testemunha estar errada, tendo identificado como Azul um táxi que era Verde, e $P(\bar{A})$ representa a probabilidade de o táxi ser Verde.

A resposta correta é, portanto, 41%.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer das aulas das unidades curriculares de Estatística e Probabilidades, que temos lecionado no ensino superior, temos verificado que o conceito de probabilidade condicionada é um dos que mais dificuldades motivam entre os alunos. Esta constatação, está em consonância com o relatado na literatura existente sobre a temática. Nesses trabalhos, os conceitos de probabilidade condicionada e probabilidade conjunta são identificados como os que mais equívocos causam, verificando-se que esses equívocos são transversais aos diversos graus de ensino. No caso particular da probabilidade condicionada, existem diversos equívocos, que pela sua relevância e frequência de ocorrência, importa explorar em sala de aula. Neste trabalho foram analisados quatro problemas, onde é comum a manifestação dos equívocos da falácia do eixo temporal, da falácia da condicional transposta, da falácia da taxa base e a não identificação do acontecimento condicionante, que julgamos poderem ser úteis como alerta para as consequências do deficiente domínio do conceito de probabilidade condicionada e para estimular a intuição probabilística dos alunos.

Ens. Tecnol.R., Londrina, v. 5, n. 1, p. 54-69, jan./jun. 2021.

Challenging intuition: four conditional probabilities problems

ABSTRACT

In modern society, there are many circumstances in which we use probabilities, either for the interpretation of probabilistic information or for decision-making in situations of uncertainty, so that probabilistic skills have become critical for an informed and participatory citizenship. The close connection between probability problems and everyday phenomena leads to proposal solutions sustained only by common sense and intuition. However, many of these problems hides complex reasoning leading to counterintuitive solutions. As described in the literature, the main misconceptions with concepts of probabilities involve conditional probability and joint probability. These misconceptions are transversal to the different levels of education and remain unless they are subject to specific treatment. Taking, as starting point, the main difficulties presented by students when calculating conditional probabilities, we present four problems that we use in the classroom to challenge students' probabilistic reasoning. For each one of these problems, we present the most common mistake and we propose an explanatory approach to this misconception and to the correct reasoning.

KEYWORDS: Base rate fallacy. Fallacy of the time axis. Fallacy of the transposed conditional.

REFERÊNCIAS

BAR-HILLEL, M. The base-rate fallacy in probability judgments. **Acta Psychologiea**, v. 44, p. 211–233, 1980.

BATANERO, C. **Didáctica de la Estadística**. Granada, España: Universidad de Granada, 2001.

BATANERO, C.; SÁNCHEZ, E. What is the nature of high school student's conceptions and misconceptions about probability? *In:* JONES, G. (Ed.), **Exploring probability in school:** challenges for teaching and learning. New York: Springer, 2005. p. 241–266.

BATANERO, C. La comprensión de la probabilidad en los niños. ¿Qué podemos aprender de la investigación? *In:* FERNANDES, J. A.; CORREIA, P. F.; MARTINHO, M. H.; VISEU, F. (Eds.) **Atas do III encontro de probabilidades e estatística na escola**. Braga: Centro de Investigação em Educação. Universidade Do Minho, 2013. p. 9–21.

BELLHOUSE, D. Probability in the Sixteenth and Seventeenth Centuries: An Analysis of Puritan Casuistry. **International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique**, v. 56, n. 1, p. 63–74, 1988.

CEREZO, F. **Psicología del Pensamiento**. Barcelona: Editorial UOC, 2005.

CORREIA, P.; FERNANDES, J.; CONTRERAS, J. Intuições de alunos do 9º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada. *In:* NUNES, C.; HENRIQUES, A.; CASEIRO, A.; SILVESTRE, A.; PINTO, H.; JACINTO, H.; PONTE J. (Orgs.), **Actas do XXII seminário de investigação em educação matemática**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2011. p. 1–13.

CLARK, M. **Paradoxes from A to Z**. Third edition. [S.l.]: Routledge, 2012.

DAVID, F. Dicing and gaming (a note on the history of probability). **Biometrika,** v.42, p. 1–15, 1955.

DÍAZ, C.; BATANERO, C. University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, p. 131–162, 2009.

DÍAZ, C.; DE LA FUENTE, I. Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. **Epsilon**, v. 59, p. 245–260, 2005.

EDDY, D. Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. *In:* KAHNEMAN, D.; SLOVIC P.; TVERSKY A. (Eds.) **Judgment under uncertainty:** heuristics and biases. New York: Cambridge University Press, 1982. p. 249–267.

ESTRADA, A.; DÍAZ, C. Computing probabilities from two-way tables: an exploratory study with future teachers. *In:* ROSSMAN A.; CHANCE, B. (Eds.), **Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics**. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education, 2006.

FALK, R. Revision of probabilities and the time axis. **Proceedings of the third international conference for the psychology of mathematics education**, 1979. p. 64–66.

FALK, R. Conditional probabilities: Insights and difficulties. *In:* DAVIDSON, R.; SWIFT, J. (Eds.), **Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistics**, 1986. p. 292–297.

FALK, R. Inference under uncertainty via conditional probabilities. *In:* MORRIS, R. (Ed.). **Studies in mathematics education**, v.7. The teaching of statistics. Paris: UNESCO, 1989. p. 175–184.

FELLER, W. **An introduction to probability theory and its applications**. 3rd ed. New York: Wiley, 1968. v. 1.

FISCHBEIN, E.; SCHNARCH, D. The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 28, n. 1, p. 96–105, 1997.

FISCHHOFF, B.; SLOVIC, P.; LICHTENSTEIN, S. Weighing the risks. **Environment,** v. 21, n. 5, p. 17–20, 1979.

GARDNER, M. **Aha! Gotcha – Paradoxes to puzzle and delight**. New York, W.H. Freeman and Comp., 1982.

GARFIELD, J.; AHLGREN, A. Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 19, n. 1, p. 44–63, 1988.

GIGERENZER, G. **Calculated risks:** How to know when numbers deceive you. New York: Simon e Schuster, 2002.

GRAS, R.; TOTOHASINA, A. Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilitè conditionnelle. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 15, n. 1, p. 49–95, 1995.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Subjective probability: A judgment of representativeness. **Cognitive Psychology**, v. 3, n. 3, p. 430–454, 1972a.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. On prediction and judgment. **Oregon Research Institute Bulletin**, v. 12, n. 4, 1972b.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. (1982). Subjective probability: A judgment of representativeness. *In:* KAHNEMAN, D.; SLOVIC, P.; TVERSKY, A. (eds.) **Judgement Under Uncertainty:** Heuristics and Biases. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. p. 32–47.

KRÄMER, W.; GIGERENZER, G. How to confuse with statistics or: The use and misuse of conditional probabilities. **Statistical Science**, v. 20, p. 223–230, 2005.

LAPLACE, P. **Essai philosophique sur les probabilities.** Paris: Académie des Sciences (1878-1912), 1814. v. 7.

LYON, D.; SLOVIC, P. Dominance of Accuracy Information and Neglect of Base Rates in Probability Estimation. **Acta Psychologica**, v. 40, p. 287–298, 1976.

POLAKI, M. Dealing with compound events. *In:* JONES, G. A. (Ed.) **Exploring probability in school:** challenges for teaching and learning. New York, NY: Springer, 2005. p. 191–214.

POLLATSEK, A.; WELL, A.; KONOLD, C.; HARDIMAN, P. Understanding Conditional Probabilities. **Organizational Behavior and Human Decision Processes**, v. 40, p. 255-269, 1987.

ROSS, S. **A First Course in Probability.** 8th Edition. [S. l.]: Pearson, 2010. Chapter 5.

SANGERO, B.; HALPERT, M. Why a Conviction Should Not Be Based on a Single Piece of Evidence: A Proposal for Reform. **Jurimetrics J.**, v. 48, p. 43–94, 2007.

SANTOS, C.; DIAS, C. Considerações sobre o uso de representações diagramáticas no cálculo de probabilidades condicionadas. **Experiências em Ensino de Ciências**, v. 16, n. 1, p. 121–136, 2021.

SEDLMEIER, P. **Improving Statistical Reasoning:** Theoretical Models and Practical Implication. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999.

TARR, J.; LANNIN, J. How can teachers build notions of conditional probability and independence? *In:* JONES, G. A. (Ed.), **Exploring probability in school**: challenges for teaching and learning. New York, NY: Springer, 2005. p. 215–238.

THOMPSON, W.; SCHUMANN, E. Interpretation of Statistical Evidence in Criminal Trials: The Prosecutor's Fallacy and the Defense Attorney's Fallacy. **Law and Human Behavior**, v. 11, n. 3, p. 167–187, 1987.

TONETTO, L.; KALIL, L.; MELO, W.; SCHNEIDER, D.; STEIN, L. O papel das heurísticas no julgamento e na tomada de decisão sob incerteza. **Estudos de Psicologia,** Campinas, v. 23, n. 2, p. 181–189, 2006.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Belief in the Law of Small Numbers. **Psychological Bulletin**, v. 76, p. 105–110, 1971

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Availability: A Heuristic for Judging Frequency and Probability. **Cognitive Psychology**, v. 5, n. 2, p. 677–695, 1973.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Causal schemata in judgments under uncertainty. *In:* FISHBEIN, M. (Ed.). **Progress in social psychology**. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 1980.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. **Psychological Review**, v. 90, n.4, p. 293–315, 1983.

WATSON, J.; MORITZ, J. School students' reasoning about conjunction and conditional events. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 33, n. 1, p. 59–84, 2002.

WATSON, J.; KELLY, B. The development of conditional probability reasoning. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 38, n. 2, p. 213–235, 2007.

Recebido: 02 fevereiro 2020.
Aprovado: 24 maio 2021.
DOI: http://dx.doi.org/10.3895/etr.v5n1.13116
Como citar:
SANTOS, C.; DIAS, C. Desafios à intuição: Quatro problemas de probabilidades condicionadas. **Ens. Tecnol. R.**, Londrina, v. 5, n. 1, p. 54-69, jan./jun. 2021. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/etr/article/view/13116. Acesso em: XXX.
Correspondência:
Carla Santos
Instituto Politécnico de Beja. Rua Pedro Soares n. 61551, Apartado, Beja, Portugal.