

# O ensino da geometria por meio da otimização linear: proposta de atividades no Ensino Médio

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estabelecer uma relação entre o estudo da geometria plana e espacial com a teoria da otimização linear, por meio dos teoremas de convexidade, a fim de contribuir para a aprendizagem dos conteúdos abordados em sala de aula do Ensino Médio. Para tanto, propõe-se o estudo e a aplicação da otimização linear no processo de corte de embalagens e o estudo da geometria (área e volume) para o dimensionamento dessas embalagens, proporcionando aos alunos uma visão globalizada das possibilidades de aplicação da Matemática em diversos ramos do conhecimento. Assim, busca-se destacar a importância da aplicação da matemática, em particular, da geometria, de uma forma contextualizada, contribuindo para um aprendizado mais significativo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Geometria, Ensino-Aprendizagem, Otimização Linear, Dimensionamento de Embalagens.

**Gláucia Maria Bressan**  
[glauciabressan@utfpr.edu.br](mailto:glauciabressan@utfpr.edu.br)  
[orcid.org/0000-0001-6996-3129](https://orcid.org/0000-0001-6996-3129)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procopio, Paraná, Brasil

**Juliana Conceição Possinelli**  
[julianapossinelli@yahoo.com.br](mailto:julianapossinelli@yahoo.com.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procopio, Paraná, Brasil

**Elenice Weber Stiegelmeier**  
[elenicew@utfpr.edu.br](mailto:elenicew@utfpr.edu.br)  
[orcid.org/0000-0002-8834-4937](https://orcid.org/0000-0002-8834-4937)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procopio, Paraná, Brasil

## INTRODUÇÃO

Um dos grandes desafios dos professores de Matemática é fazer com que o aluno relacione o conteúdo que está sendo apresentado com sua aplicação no cotidiano. Ou ainda, fazer com que o aluno se interesse pelo conteúdo ministrado e, sobretudo, reconheça que o mesmo é e será importante para sua formação acadêmica e também para sua formação como cidadão participante da sociedade (BRASIL, 1997).

Essa relação entre conceito e aplicação prática nem sempre pode ser demonstrada em todo conteúdo do cronograma da disciplina de Matemática, mas é fundamental que o professor mostre ao aluno a importância e a utilização do que está sendo apresentado. Além disso, considerando que os alunos estão inseridos em um cenário no qual a tecnologia tem evoluído numa proporção muito grande em um pequeno espaço de tempo – nem sempre acompanhada pela evolução do processo de ensino-aprendizagem nessa fase de mudanças – deve-se estimular a prática do ensino através de novos instrumentos tecnológicos que auxiliem o professor nessa construção do conhecimento ao aluno e, além disso, colocar o discente frente à situações reais.

Segundo Cardia (2014), várias situações do cotidiano possibilitam o aluno a utilizar a Matemática como ferramenta para solução de seus problemas, no entanto, muitas vezes ele não consegue relacionar que tal situação precisou do conhecimento matemático adquirido para ser resolvida. Por isso, deve-se mostrar a Matemática de forma clara e aplicada. Nesse sentido, pode-se citar o trabalho de Almeida (2016), o qual aborda os conceitos da Otimização Linear, seus teoremas, métodos de solução e sugere aplicação dos conhecimentos da Otimização Linear na Educação Básica desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Atualmente, o ensino de Geometria, assim como os demais conteúdos matemáticos, vem de uma crescente desvalorização e falta de interesse por grande parte dos alunos na Educação Básica. A Geometria, apesar de ser um conteúdo de fácil aplicabilidade, se não for trabalhada com dedicação e apresentada de forma clara e exemplificada ao aluno, seu nível de abstração será igual ou maior em relação aos demais ramos da matemática (DANTE, 2013).

Neste contexto, este trabalho aborda um dos ramos da matemática com ampla aplicação e utilização em várias situações cotidianas: a geometria e o estudo da convexidade por meio da teoria da otimização linear. Esta última, por sua vez, é capaz de analisar matematicamente a solução ótima a diversos problemas envolvendo muitos ramos de atuação, como financeiros, estatísticos, logísticos, entre outros (ARENALES et al, 2015).

Ainda sobre a importância do uso de aplicações no aprendizado, Vendrame (2014, p. 16) afirma que “o aluno aprende problemas resolvendo problemas [...] a matemática torna-se mais significativa ao aluno que tem um amplo contato com diversos tipos de problemas matemáticos com certa frequência”. Neste caso, o aluno estará mais capacitado e seguro para abordar novos problemas.

A relação entre o estudo da geometria e da otimização linear enfatiza a importância da aprendizagem contextualizada, relacionando alguns problemas reais com os conteúdos matemáticos da sala de aula.

Diante deste cenário, o objetivo deste trabalho é estabelecer uma relação entre o estudo da geometria plana e espacial com a teoria da Otimização Linear, por meio dos teoremas de convexidade, a fim de contribuir para a aprendizagem contextualizada de conteúdos de Geometria abordados em sala de aula. Para tanto, propõe-se o estudo e a aplicação da otimização linear no processo de corte de embalagens e o estudo da Geometria (especialmente, o cálculo de áreas e volumes) para o dimensionamento dessas embalagens. Atividades a serem aplicadas no Ensino Médio são propostas.

## CONCEITOS DE OTIMIZAÇÃO LINEAR

Um modelo matemático é uma representação simplificada de uma situação real e deve refletir a essência do problema, representando as grandezas envolvidas por variáveis relacionando-as com as restrições inerentes ou não ao problema, formando assim as expressões matemáticas que melhor definirão a decisão a ser tomada para se obter o sucesso esperado (GOLDBARG; LUNA, 2005).

A Otimização Linear consiste de modelos matemáticos quantitativos que apresentam uma grande utilidade na solução exata de problemas de otimização. Os modelos são estruturados logicamente com o objetivo de determinar as melhores condições de funcionamento para os sistemas representados. Os modelos matemáticos dos problemas abordados envolvem equações que apresentam um comportamento linear.

Segundo Arenales et al. (2015), na formulação geral do Problema de Programação Linear (PPL) deve-se analisar 3 partes do problema: a função objetivo (1), as restrições (2) e as condições de não-negatividade (3). Para a função objetivo e para cada uma das restrições consideradas, uma equação linear é descrita, relacionando as variáveis de decisão com os coeficientes conhecidos. As variáveis de decisão representam os valores numéricos que se pretende obter após a resolução do problema. Desta forma, um PPL é formulado pelas equações (1) a (3).

$$\text{Min ou Max } c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \quad (\text{função objetivo}) \quad (1)$$

Sujeito a (restrições):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & \text{ [sinal] } b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & \text{ [sinal] } b_2 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n & \text{ [sinal] } b_m \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Condições de não-negatividade: } x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0. \quad (3)$$

Observando as seguintes notações:

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ : são as variáveis de decisão. Depois que o problema for resolvido, por algum método de solução, estes valores são determinados.

- $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ : são os coeficientes (números reais) da função objetivos, cujos valores são conhecidos.
- $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ : são as constantes (números reais) de cada uma das restrições, cujos valores são conhecidos.
- $a_{ij}$ : são os coeficientes (números reais) das restrições, cujos valores são conhecidos.

Uma vez determinada a função objetivo (1) que será otimizada (seja ela minimizada ou maximizada), elenca-se a sequência de restrições (2) a serem consideradas para cada problema, que expressam as limitações e condições de possibilidade da realização do problema. Finalmente destaca-se a condição de não negatividade (3), as quais um problema de programação linear deve se sujeitar considerando que o modelo matemático geralmente abrange situações reais, onde os resultados negativos não podem ser implicados no problema ou não fazem parte do contexto analisado (ARENALES *et al.*, 2015).

A seguir, são enunciados alguns teoremas pertinentes ao estudo de Programação Linear. Estes teoremas fornecem o suporte matemático para a resolução dos problemas de programação linear e estabelecem a relação com a Geometria (GOLDBARG; LUNA, 2005).

*Teorema I* - O conjunto de todas as soluções viáveis de um modelo de Programação Linear é um conjunto convexo.

Demonstração: Seja  $C$ , o conjunto das soluções viáveis, formado pelos pontos  $x$  tais que:

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Se  $C$  é convexo, então, para qualquer conjunto composto por dois pontos distintos  $x_1, x_2$  pertencentes a  $C$ , a combinação linear convexa desses pontos também pertence a  $C$ , o que equivale a dizer:

$$x_1, x_2 \in C \rightarrow \begin{cases} x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Sejam duas soluções viáveis de  $C$ ,  $x_1, x_2$ , tais que  $x_1 \neq x_2$ , então:

$$Ax_1 = b \quad Ax_2 = b$$

e

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

E seja:

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \\ 0 \leq \alpha \leq 1$$

Então:

$$\begin{aligned}
 Ax &= A[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] = \\
 &= \alpha Ax_1 + (1 - \alpha)Ax_2 = \\
 &= \alpha b + (1 - \alpha)b = b
 \end{aligned}$$

E  $x \geq 0$ , uma vez que:

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \text{ e } 0 \leq \alpha \leq 1$$

■

*Teorema II* - Toda solução compatível básica (solução óbvia) do sistema de equações lineares de um modelo de Programação Linear é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, isto é, do conjunto convexo de soluções.

Demonstração: Toda solução básica viável do sistema  $Ax = b$  é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, ou seja, um extremo do conjunto  $C$ . Seja  $C$  o conjunto formado pelos pontos  $x$  tais que:

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Seja, ainda, uma solução viável qualquer  $x$ , de dimensão  $n$ , na qual, sem perda de generalidade, as variáveis básicas são as  $m$  primeiras:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ com todos os componentes } x_i \geq 0.$$

Supõe-se, por absurdo, que  $x$  seja um ponto extremo do conjunto convexo  $C$ , definido anteriormente. Então  $x$  pode ser obtido por uma combinação convexa de outros dois pontos distintos desse mesmo conjunto. Chamando de  $y$  e  $z$  esses dois pontos, temos:

$$\begin{aligned}
 x &= \alpha y + (1 - \alpha)z \\
 0 &\leq \alpha \leq 1
 \end{aligned}$$

Como  $y$  e  $z$  pertencem ao conjunto  $C$ , as seguintes relações de pertinência são válidas:

$$Ay = b \quad Az = b$$

e

$$y \geq 0 \quad z \geq 0$$

A relação  $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ , colocada em termos das coordenadas de cada um dos três vetores, fornece as seguintes relações:

$$x_1 = \alpha y_1 + (1 - \alpha)z_1$$

$$x_2 = \alpha y_2 + (1 - \alpha)z_2$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ x_m &= \alpha y_m + (1 - \alpha)z_m \\ 0 &= \alpha y_{m+1} + (1 - \alpha)z_{m+1} \\ & \vdots \\ 0 &= \alpha y_n + (1 - \alpha)z_n \end{aligned}$$

Devido às relações  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $y \geq 0$  e  $z \geq 0$  as últimas  $(n - m)$  relações do conjunto acima descrito só podem ser satisfeitas em um dos seguintes casos:

1.  $0 \leq \alpha \leq 1$  e  $y_{m+i} = z_{m+i} = 0$ , para  $i = 1, \dots, n - m$ .

Neste caso teríamos  $x = y = z$ , pois tanto  $y$  quanto  $z$  são soluções básicas do sistema em análise, calculados com as mesmas variáveis básicas.

2.  $\alpha = 0$  e  $z_{m+i} = 0$ ;  $i = 1, \dots, n - m$ .

Por raciocínio análogo ao caso anterior, deduz-se que  $x = z$ . Além disso, como  $\alpha = 0$ , segue que  $x = y = z$ .

3.  $\alpha = 1$  e  $y_{m+i} = 0$ ;  $i = 1, \dots, n - m$ .

Por razões análogas, conclui-se que  $x = y = z$ . ■

Desta forma, demonstra-se que não existem soluções viáveis  $y$  e  $z$ , distintas das soluções básicas  $x$  que satisfaçam a relação  $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ . Por contradição com a hipótese inicial, demonstra-se, então, que  $x$  é um ponto extremo do conjunto convexo  $C$ .

*Teorema III* - Se uma função objetivo possui um único ponto ótimo finito, então este é um ponto extremo do conjunto convexo de soluções viáveis.

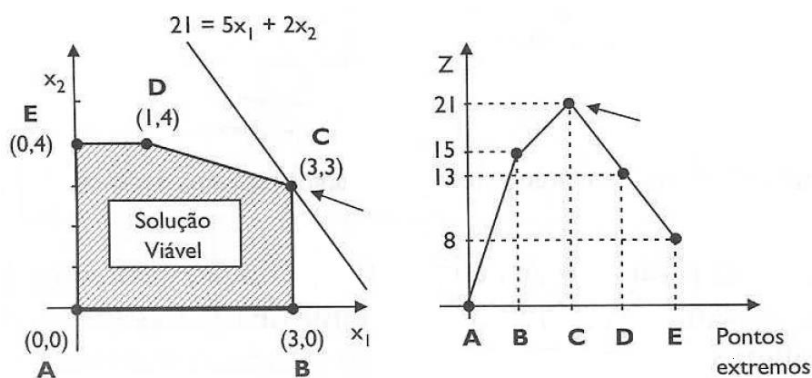
A demonstração encontra-se em Hillier e Lieberman (2006).

*Teorema IV* - Se a função objetivo assume o valor ótimo em mais de um ponto do conjunto de soluções viáveis (soluções múltiplas), então ela assume este valor para pelo menos dois pontos extremos do conjunto convexo e para qualquer combinação convexa desses pontos extremos, isto é, todos os pontos do segmento de reta que unem estes dois extremos, ou seja, a aresta do polígono que contém estes extremos.

A demonstração encontra-se em Hillier e Lieberman (2006).

De acordo com os teoremas, uma maneira prática de resolver pequenos problemas de duas variáveis é indicar os valores da função objetivo nos pontos extremos do polígono de soluções viáveis, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Polígonos ótimos.



Fonte: Lachtermacher (2009).

No caso de um problema com mais de duas variáveis de decisão, o método Simplex pode ser aplicado, que é uma generalização do método gráfico. O algoritmo deste método pode ser visto em Arenales *et al.* (2015) e Goldberg e Luna (2005).

Para resolver um problema graficamente, o primeiro passo é estabelecer os dois eixos que irão representar as variáveis  $x_1$  e  $x_2$ . Em seguida, deve-se encontrar o conjunto de soluções viáveis ao sistema representando graficamente as restrições (retas) do problema, criando assim a subárea do espaço  $x_1 \times x_2$  a qual estará contida a solução ótima. Em seguida, inserindo a função objetivo no plano, observa-se que esta função determina um conjunto de retas, todas paralelas entre si, onde cada reta determina um valor diferente para o resultado da função objetivo. O maior valor dentre todos os possíveis (para problemas de maximização) ou o menor deles (para problemas de minimização) será a solução ótima. O ponto ótimo sempre será um dos vértices do polígono determinado pelo espaço solução de acordo com os teoremas de convexidade apresentados anteriormente.

### ATIVIDADES PROPOSTAS PARA O ENSINO MÉDIO

Nesta seção, são propostas algumas atividades para aplicação em sala de aula com alunos do Ensino Médio, envolvendo os conceitos de geometria e otimização, desenvolvidos nesse trabalho. Essas atividades abordam, primeiramente, conceitos diversos de geometria plana e espacial. Nas atividades envolvendo a otimização linear, é apresentada a oportunidade de relacionar os conteúdos de geometria com as soluções ótimas determinadas pelos teoremas de convexidade. Além disso, pode-se ainda vincular tal atividade com os conteúdos de geometria analítica, quando tratar-se do método da resolução gráfica.

### Atividade 1: Embalagens de Leite Longa Vida com Formato de Paralelepípedo

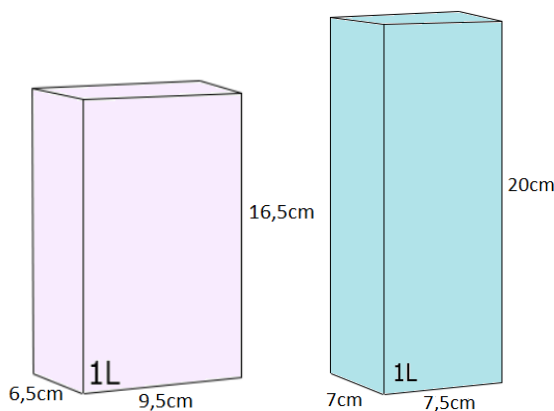
Esta atividade tem por objetivo utilizar os conceitos da geometria, de área e volume, para minimizar o custo da embalagem de produtos, otimizando o uso de material (papel) para a confecção de embalagens. Questões como determinar qual tipo de embalagem utiliza menos papel ou matéria prima em sua confecção, minimizar o custo de produção, bem como as análises destas situações e a tomada de decisão são as principais motivadoras da Otimização linear.

Desta forma, esta atividade visa comparar os volumes e áreas das duas embalagens e verificar qual a embalagem com maior custo para a empresa.

Uma empresa de laticínio disponibiliza dois tipos de embalagens para acondicionar seu produto, conforme a Figura 2, cujas caixas apresentam dimensões de embalagens reais atualmente comercializadas.

**1º questionamento:** Qual é a área em  $cm^2$  que as duas embalagens apresentam? Considerando que quanto maior a quantidade de papel utilizado maior será o custo da embalagem para a empresa. Desta forma, determine qual embalagem gera mais despesa para a empresa. Calculando as áreas das laterais das caixas:

Figura 2 – Embalagem 1 (E1) e embalagem 2 (E2).



Fonte: autoria própria

Como todas as áreas laterais são retangulares tem-se:

$$A = b \cdot h, \text{ ou seja, base } \times \text{ altura}$$

$$\begin{aligned} \text{Área das laterais } E1 &= 2 \cdot (6,5 \times 16,5) + 2 \cdot (9,5 \times 16,5) + 2 \cdot (6,5 \times 9,5) \\ &= 651,5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Área das laterais } E2 = 2 \cdot (7 \times 20) + 2 \cdot (7,5 \times 20) + 2 \cdot (7,5 \times 7) = 685 \text{ cm}^2$$

A embalagem 2 (E2) necessita de maior área de papel para sua confecção em relação a embalagem 1 (E1).



**2º questionamento:** Calculando os volumes, as duas embalagens apresentadas na Figura 2 possuem capacidade para acondicionar 1 litro de leite?

Como ambas embalagens são paralelepípedos, utiliza-se a equação a seguir para o cálculo de seus respectivos volumes:

$$V = (Ab \cdot h) = \text{Área da base } (b \cdot h) \times \text{altura do paralelepípedo } (h)$$

Volume da embalagem 1 (E1):

$$V = Ab \cdot h = (9,5 \times 6,5) \times 16,5 = 1018,87 \text{ cm}^3$$

Volume da embalagem 2 (E2):

$$V = Ab \cdot h = (7,5 \times 7) \times 20 = 1050 \text{ cm}^3$$

Fazendo a conversão das unidades de medidas temos:

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$$

$$1000 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ ml} = 1 \text{ litro}$$

Desta forma conclui-se que ambas as embalagens possuem capacidade de armazenamento de 1 litro conforme verificado.

**Conteúdos aplicados nesta atividade:** Área do retângulo, Área do total do paralelepípedo, Definição de volume e capacidade, Volume do paralelepípedo e Conversão entre unidades de medida

**Conclusão:** As duas embalagens podem acondicionar 1 litro de leite, e a embalagem dois tem um custo mais elevado que a embalagem 1 por utilizar mais papel.

## Atividade 2: Embalagem Longa Vida Formato Tetraédrico

A introdução histórica da atividade é de grande importância didática e pedagógica para aguçar a curiosidade dos alunos e desta forma fomentar o interesse pelo conteúdo apresentado. A Primeira Guerra Mundial foi o ponto de partida da origem da embalagem individual, que surgiu pela necessidade de distribuir produtos aos exércitos em pequenos pacotes, Tetra Pak (2017). Na Europa, nesse interim, mais especificamente na Suécia no início da década de 40, com o quase pós-guerra, nascia a ideia das embalagens cartonadas.

Segundo o site da empresa Tetra Pak® (2017), o trabalho de desenvolvimento de embalagens cartonadas teve início em 1943 com a elaboração do projeto de uma embalagem de leite que exigia o mínimo de material e oferecesse máxima limpeza e higiene no consumo, assim no ano de 1951 era inaugurada na Suécia a empresa Tetra Pak® com sua embalagem cartonada, revestida de plástico e mais tarde de alumínio, desenvolvida pelo Dr. Ruben Rausing.

As primeiras embalagens tinham formato de um tetraedro conforme a Figura 3 a seguir, daí o sugestivo nome dado para a empresa. Era triangular e o primeiro produto industrializado a ser embalado foi o creme de leite, em seguida, o leite.

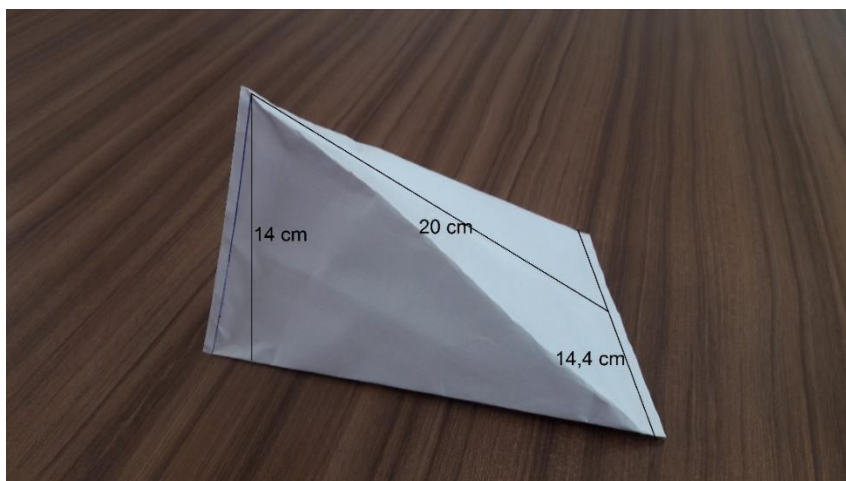
Dinâmica da montagem da embalagem tetraédrica: disponibilizando uma folha de papel sulfite A4 com medidas padronizadas em 29,7 cm por 21 cm e utilizando o mesmo sistema de fechamento da embalagem criada pela empresa Tetra Pak®, mais precisamente por seu fundador Sr. Ruben Rausing, conforme mostra a Figura 3, cria-se um tetraedro com todas as faces triangulares medindo 14,5 cm de comprimento da base do triângulo por 20 cm de altura do triângulo da face, além da altura do tetraedro de 14 cm, que pode ser visualizada na Figura 4.

**Figura 3** – Embalagem tetraédrica da empresa Tetra Pak®



Fonte: Desenvolvimento gráfico: Embalagens da Tetra Pak® (DESENVOLVIMENTO GRÁFICO..., 2013).

**Figura 4** – Fotografia da embalagem produzida pela autora.



Fonte: Autoria Própria (2019).

**1º questionamento:** Qual a área da folha de papel utilizada na produção do tetraedro construído na figura 28, considerando a perda de 1 cm utilizado para a colagem da embalagem?

$$\text{Área da Folha de papel} = 28,5 \times 20 = 570 \text{ cm}^2$$

**2º questionamento:** Qual o volume deste tetraedro?

Utiliza-se a fórmula do volume da pirâmide, considerando que o tetraedro é uma pirâmide de base triangular. Assim tem-se:

$$V = \frac{\text{Área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

e

$$V = \frac{\left(\frac{14,4 \cdot 20}{2}\right) \cdot 14}{3} = 672 \text{ cm}^3$$

Convertendo as unidades de medidas tem-se que:

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$$

$$1000 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ ml} = 1 \text{ litro}$$

Assim,  $672 \text{ cm}^3 = 672 \text{ ml}$  de capacidade.

No laboratório de informática, esses dados serão inseridos numa planilha de dados, usando o *software* Excel, para projetar as medidas da embalagem que contem 1 litro de capacidade de armazenamento, de acordo com a Tabela 1.

**Tabela 1** - Inserção dos dados na planilha

MEDIDAS DA EMBALAGEM	
Base do triângulo (base)	14,4
Altura do triângulo (base)	20
Altura do tetraedro	14
Fórmula do Volume	672

Usando na célula do volume a seguinte fórmula  $=(((K20 \cdot K21)/2) \cdot k22)/3$ , em que K20, K21 e K22, são as respectivas medidas do tetraedro aplicadas na fórmula da pirâmide de base triangular.

Agora na mesma planilha deve-se encontrar um fator de proporcionalidade para aumentar todas as medidas da caixa tetraédrica na mesma proporção, para a realização desta atividade foram realizados testes aleatórios alterando o valor das constantes de proporcionalidade até alcançar as medidas de uma embalagem cujo volume tenha capacidade de armazenamento de 1 litro, como pode ser visto na Tabela 2.

**Tabela 2** - Continuação da inserção dos dados na planilha

MEDIDAS DA EMBALAGEM		Nova medida	Constante
Base do triângulo (base)	14,4	16,56	1,15
Altura do triângulo (base)	20	23	
Altura do tetraedro	14	16,1	
Fórmula do Volume	672	1022,028	

A fórmula utilizada na célula das novas medidas é  $=K20*\$N\$20$ , ou seja, multiplicaram-se todas as medidas desenvolvidas no sólido de papel pela constante 1,15, originando um aumento de 15% em todas as medidas do tetraedro.

Agora verifica-se que a nova área de papel utilizada para produzir esta embalagem será desenvolvida utilizando as novas medidas, comprimento igual  $16,56 \times 2 = 33,12$  cm pela altura de 23 cm, o que resultará em:

$$\text{Área da nova folha de papel} = 33,12 \times 23 = 761,76 \text{ cm}^2.$$

**Análises pós atividades 1 e 2:** Trazer para sala de aula questionamentos para que os alunos desenvolvam a capacidade de análise de situações diversas como:

Qual a embalagem utiliza a menor quantidade de papel em sua fabricação?

Qual embalagem é a mais viável para o envase de produtos, considerando outros fatores como: custo de produção, transporte e facilidade de manuseio?

Essa análise de situações e tomada de decisão são as precursoras da Otimização Linear.

### Atividade 3: Método Gráfico para Problemas de Otimização Linear

Considere o seguinte problema (LINS; CALÔBA, 2006): Uma manufatura produz mesas e bancos, sendo capaz de vender toda a sua produção no período. O único recurso restrito é a mão de obra, cuja produtividade, juntamente com os lucros, é dada na Tabela 3.

**Tabela 3** - Problema Manufatura de mesas e bancos.

Produto	Homens hora por unidade produzida		
	Lucro unitário	Montagem	Acabamento
Mesas	R\$20	3	4
Bancos	R\$24	6	2
Homens/h		60	32

Fonte: Lins e Calôba (2006).

As variáveis de decisão são as quantidades de mesas e bancos a serem produzidos,  $x_1$  e  $x_2$ . A função objetivo é  $Max 20x_1 + 24x_2$ .

As restrições do problema são homens/hora disponíveis nos departamentos de montagem e acabamento:

$$3x_1 + 6x_2 \leq 60, \text{ restrição de montagem;}$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 32, \text{ restrição de acabamento.}$$

Representando as restrições na igualdade temos as seguintes funções:

$$\text{Max: } 20x_1 + 24x_2$$

$$3x_1 + 6x_2 = 60$$

$$4x_1 + 2x_2 = 32$$

Com  $x_1, x_2 \geq 0$ , restrição de não negatividade.

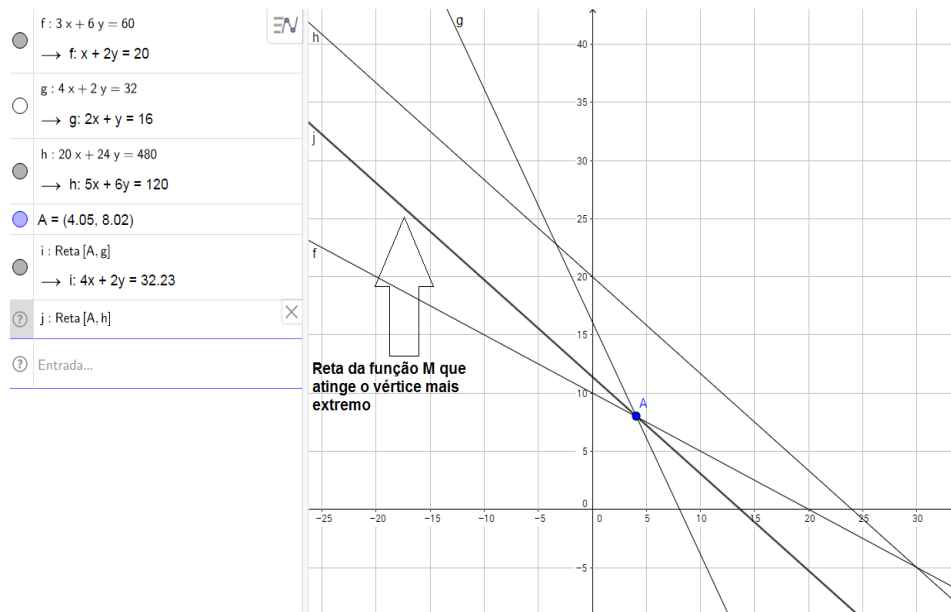
Assim serão representadas as restrições no plano cartesiano definido pelas duas variáveis  $x_1$  e  $x_2$ . Onde o polígono que contém a solução ótima estará no primeiro quadrante em observação às restrições de não negatividade.

Observa-se que as equações  $3x_1 + 6x_2 = 60$  e  $4x_1 + 2x_2 = 32$  representam as restrições do problema, que na igualdade descrita serão ilustradas com suas respectivas retas determinadas por cada equação, conforme Figura 5.

Neste caso, tomaram-se os pontos (24,0) e (0,20) convenientemente, obteve-se  $M = 480$ . Para obter o ponto ótimo traça-se a paralela mais alta ou mais baixa possível que coincida com o vértice mais extremo do polígono, respeitando a inclinação da reta determinada pela função objetivo  $M$ .

O ponto ótimo ter sido um dos vértices do polígono solução não é mera coincidência. O ponto ótimo sempre será um dos vértices do polígono determinado pelo espaço solução. As retas que representam as restrições na igualdade, juntamente com a reta paralela a função  $M$  (função objetivo) determinam o ponto ótimo A, conforme Figura 6.

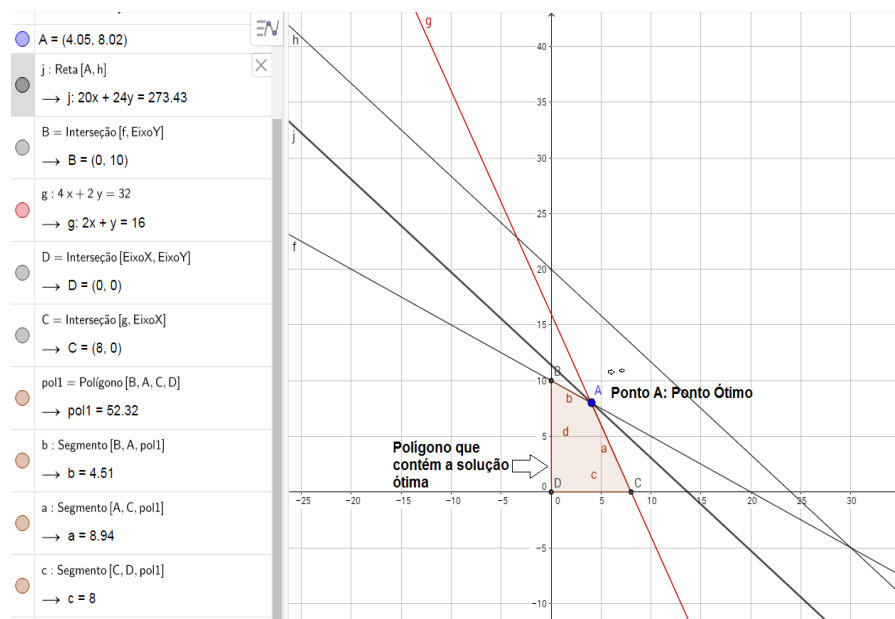
**Figura 5** – As retas que determinam o polígono que contém a solução ótima em um dos seus vértices e o vértice ótimo.



Fonte: Autoria Própria (2019).

O vértice ótimo encontrado, conforme a Figura 6, é originário da intersecção das retas  $f$  e  $g$  que representam as restrições na igualdade. Além deste vértice conter a reta paralela à reta da função  $M$ .

**Figura 6** – Polígono que determina o espaço solução com auxílio do software Geogebra.



Fonte: Autoria Própria (2019).

O vértice ótimo encontrado, é originário da intersecção das retas  $f$  e  $g$  que representam as restrições na igualdade. Além deste vértice conter a reta paralela

à reta da função M. Calculando as coordenadas deste ponto A, tendo as equações  $f: 3x_1 + 6x_2 = 60$  e  $g: 4x_1 + 2x_2 = 32$ , resolve-se o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 60 \\ 4x_1 + 2x_2 = 32 \end{cases}$$

Concluindo que o ponto A (ótimo), possui coordenadas  $x_1 = 4$  e  $x_2 = 8$ . Logo, para a obtenção do lucro máximo devem ser fabricados 4 mesas e 8 bancos. Substituindo na função lucro  $M=20x_1 + 24x_2$ , temos que o lucro máximo será de R\$ 272,00.

Esta atividade é uma ótima oportunidade para explorar a geometria através do *software* matemático Geogebra que possui acesso livre e possui uma versão no formato de aplicativo para celulares.

#### Atividade 4: Problema da Mistura – Otimização Linear no *Software Microsoft Excel*.

Dentre as ferramentas disponíveis para a agilidade dos cálculos das iterações do Método Simplex, as planilhas eletrônicas são recomendadas pois, além da facilidade de utilização, estão geralmente presentes na maioria dos computadores de uso geral. No Brasil, o Excel é a mais popularmente conhecida. A ferramenta utilizada para execução do Método Simplex no Excel é chamada de “Solver”. Se esta opção não estiver prontamente disponível, basta instalar por meio da ferramenta “suplementos”.

O Solver executa o método Primal-Simplex (ARENALES et.al, 2015) e, em virtude da preparação da planilha para execução das iterações e obtenção da solução, o Excel é recomendado para problemas de pequeno porte, com poucas variáveis de decisão. O problema a ser resolvido utilizando a ferramenta “Solver” do Excel foi retirado de Lachtermacher (2009).

PROBLEMA: Uma padaria produz dois tipos de produtos: pão (P1) e massa de pizza (P2). Quatro diferentes matérias primas são utilizadas para a fabricação destes produtos: farinha (M1), fermento (M2), ovos (M3) e manteiga (M4), em que temos em estoque, respectivamente, 60 unidades, 38 unidades, 18 unidades e 55 unidades. Para produzir 1 kg de pão são necessárias 1 unidade de farinha, 2 unidades de fermento e 3 unidades de manteiga. E para produzir 1 kg de massa de pizza são necessárias 3 unidades de farinha, 1 unidade de ovo e 1 unidade de manteiga. O pão e massa de pizza são, respectivamente, pelos valores de R\$ 22/Kg e R\$20/Kg. Deseja-se determinar a quantidade de cada produto a ser fabricada que maximize o valor das vendas e respeite as restrições de estoque.

Matéria prima	Produto		Estoque
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	
Farinha	1	3	60
Fermento	2	0	30
Ovos	0	1	18
Manteiga	3	1	55
Preço (R\$/kg)	22	20	

Neste caso, definindo as Variáveis de decisão, temos:  $x_1$  = quantidade produzida de pão em quilogramas e  $x_2$  = quantidade produzida de pizza em quilogramas. Obtemos:

$$\text{Max } f(x_1, x_2) = 22x_1 + 20x_2$$

s.a.

$$1x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$2x_1 + 0x_2 \leq 30$$

$$0x_1 + 1x_2 \leq 18$$

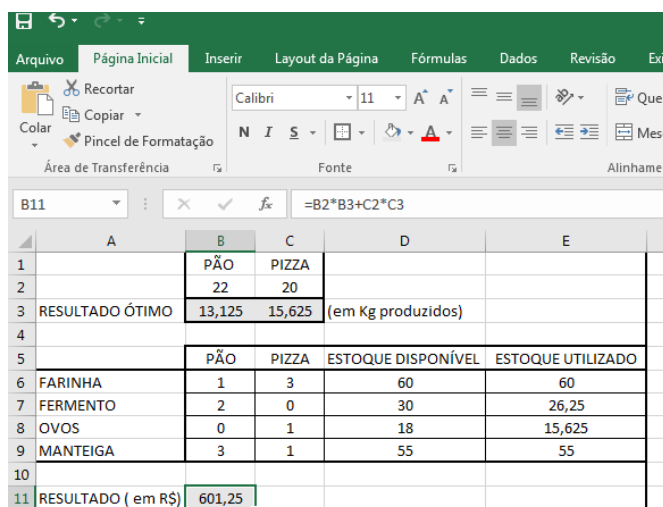
$$3x_1 + 1x_2 \leq 55$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

A Figura 7 exemplifica o formato da planilha do Excel para aplicação do SOLVER.

Figura 7 – Imagem da planilha do Excel.



	A	B	C	D	E
1		PÃO	PIZZA		
2		22	20		
3	RESULTADO ÓTIMO	13,125	15,625	(em Kg produzidos)	
4					
5		PÃO	PIZZA	ESTOQUE DISPONÍVEL	ESTOQUE UTILIZADO
6	FARINHA	1	3	60	60
7	FERMENTO	2	0	30	26,25
8	OVOS	0	1	18	15,625
9	MANTEIGA	3	1	55	55
10					
11	RESULTADO ( em R\$)	601,25			

Fonte: Autoria Própria (2017).

Fórmulas utilizadas em cada célula são:

$$B12: =B2*B3+C2*C3$$

$$E6: =B6*\$B\$3+C6*\$C\$3$$

$$E7: =B7*\$B\$3+C7*\$C\$3$$

$$E8: =B8*\$B\$3+C8*\$C\$3$$

$$E9: =B9*\$B\$3+C9*\$C\$3$$



Utilizando o programa Excel, clicar no menu “Dados”, e em seguida na ferramenta “solver”. Preencher as janelas necessárias e, no final, clicar em “Resolver”.

Resultados: Devem ser produzidos 13,125 Kg de massa de pão e 15,625 Kg de massa de pizza para a empresa obter a receita máxima de R\$ 601,25 reais.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Geometria é um dos campos da Matemática que apresenta uma grande possibilidade de conexão com outros conteúdos, como a álgebra, a aritmética e a programação matemática, por meio da teoria da convexidade que define a região de soluções (ARENALES, 2015). Por ser um conteúdo em que se consegue visualizar e manipular objetos, a aprendizagem pode ocorrer de maneira significativa por meio do conhecimento de situações concretas.

Neste sentido, este trabalho apresentou a geometria de forma contextualizada para oportunizar aos alunos uma aprendizagem baseada em uma situação concreta, condizendo com as situações reais do cotidiano em que estão inseridos, utilizando atividades dirigidas ao ensino de Geometria no Ensino Médio, juntamente com a Otimização Linear.

O estudo dos processos de otimização, além de contribuir para o aprendizado da geometria, proporcionam o planejamento dos processos de produção no sentido de minimizar o desperdício de matéria-prima no processo de corte. A decisão sobre a disposição das peças, embalagens ou objetos a serem cortados em uma placa maior garantem a otimização do processo de produção. Conseqüentemente, minimiza os custos globais de produção e o desperdício de material, o que também contribui para a redução do impacto ambiental, uma vez que o descarte de papéis, metais, plásticos e outros tipos de material é reduzido.

No Ensino Médio, problemas de otimização com duas variáveis podem ser facilmente utilizados pelos professores, uma vez que o método gráfico para a obtenção da região de soluções de um problema de otimização proposto e de apoio computacional, o aluno tem conhecimento de situações reais, visualiza a região de possíveis soluções e a determina, quando esta existir. Encontrando a solução, o aprendizado da geometria é construído, tornando-o mais sólido e agregando os conhecimentos de geometria e de otimização linear. Portanto, esse trabalho visa melhorar o planejamento docente e também mostrar que o uso de atividades práticas, presentes no dia-a-dia do aluno, podem contribuir para o seu aprendizado e para sua formação social.

# The teaching of geometry through linear optimization: proposal of activities in high school

## ABSTRACT

The goal of this work is to determine a relationship between the study of plane and space geometry with the linear optimization theory, through the convexity theorems, in order to contribute to the learning of contents taught in class, with a focus for the final years of High School. For that, the study and application of linear optimization in the cutting process of packaging and the study of geometry (area and volume) for the sizing of these packages are proposed, providing students a global vision of possibilities for mathematics applications in various knowledge areas. Thus, this work highlights the importance of applying mathematics, in particular, geometry, in a contextualized way, contributing to a more meaningful learning.

**KEYWORDS:** Geometry. Teaching-Learning. Linear Optimization. Pack Sizing.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Mario Hivanildo. **Otimização Linear como ferramenta metodológica**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.
- ARENALES, Marcos; ARMENTANO, Vinicius; MORABITO, Reinaldo; YANASSE, Horácio. **Pesquisa operacional para cursos de engenharia**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Editora Campus, 2015.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.
- CARDIA, Lynk dos Santos. **Uma abordagem do ensino de geometria espacial**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, Rio de Janeiro, 2014.
- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações – Ensino Médio**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. v. 2.
- DESENVOLVIMENTO GRÁFICO: Embalagens da Tetra Pak®. Site Desenvolvimento Gráfico, 2013. Disponível em: <http://desenvolvimentografico.com.br/embalagens/6>. Acesso em: 17 nov. 2017.
- GOLDBARG, Marco Cesar; LUNA, Henrique Pacca L. **Otimização Combinatória e Programação Linear**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.
- HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo, SP: McGraw-Hill, 2006.
- LACHTERMACHER, Gerson. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**. 4. ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2009.
- LINS, Marcos Pereira Estellita; CALÔBA, Guilherme Marques. **Programação Linear: com aplicações em teoria dos jogos e avaliação de desempenho**. Rio de Janeiro, RJ: Interciência, 2006.
- TETRA PAK. História da Tetra Pak: Nossa História desde 1940 até os dias de hoje. Disponível em: <http://www.tetrapak.com/br/about/history>. Acesso em: 15 fev. 2017.
- VENDRAME, Geni Viana do Carmo. **Área da superfície e volume de prismas e cilindros**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2014.

**Recebido:** 01 nov. 2019.

**Aprovado:** 12 jun. 2020.

**DOI:** <http://dx.doi.org/10.3895/etr.v4n1.11035>.

**Como citar:**

BRESSAN, G. M.; POSSINELLI, J. C.; STIEGELMEIER, E. W. O ensino da geometria por meio da otimização linear: proposta de atividades no Ensino Médio. **Ens. Tecnol. R.**, Londrina, v. 4, n. 1, p. 48-67, jan./jun. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/etr/article/view/11035>. Acesso em: XXX.

**Correspondência:**

Gláucia Maria Bressan

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Av. Alberto Carazzai, 1640, Cornélio Procopio, Paraná, Brasil.

**Direito autoral:**

Este artigo está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.

