

O conhecimento especializado do (futuro) professor manifestado em uma atividade de modelagem matemática

RESUMO

Élida Maiara Velozo de Castro
elidacastro@utfpr.edu.br
orcid.org/0000-0002-2310-1774
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Pato Branco, Paraná, Brasil

Edineia Zarpelon
ezarpelon@utfpr.edu.br
orcid.org/0000-0002-4715-1450
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Pato Branco, Paraná, Brasil

Janecler Aparecida Amorin Colombo
janecler@utfpr.edu.br
orcid.org/0000-0002-7729-9501
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Pato Branco, Paraná, Brasil

Pesquisas têm revelado oportunidades que a modelagem matemática oferece para a aprendizagem, o desenvolvimento de competências e a manifestação de conhecimentos do professor. Neste estudo temos como objetivo investigar o conhecimento especializado do professor manifestado em uma atividade de modelagem matemática. Seguindo uma abordagem qualitativa, a pesquisa empírica resulta da análise de registros escritos, transcrição de áudios e anotações das pesquisadoras. Os sujeitos da coleta de dados são três estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, bolsistas de um projeto de extensão, no contexto do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. A partir da investigação realizada, inferimos que o trabalho em grupo, o contexto real, a simplificação, a resolução matemática de um problema real e a validação da resposta obtida são características da modelagem matemática que mais contribuíram para a manifestação de conhecimentos especializados do professor, tanto o matemático quanto o pedagógico do conteúdo. Ainda, é válido considerar que, ora a atividade de modelagem matemática requer conhecimentos específicos, ora os conhecimentos inferem desdobramentos para a atividade.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de matemática; aprendizagem por modelagem matemática; formação inicial do professor; sistematização do conhecimento.

The specialized knowledge of the (future) teacher manifested in a mathematical modeling activity

ABSTRACT

Research has revealed opportunities that Mathematical Modeling offers for learning, skill development, and the manifestation of teacher knowledge. This study aims to investigate the teacher's specialized knowledge manifested in a mathematical modeling activity. Following a qualitative approach, empirical research results from analyzing written records, audio transcriptions, and the researcher's notes. The subjects of data collection are three students from a Mathematics degree course, scholarship holders of an extension project, in the context of developing a mathematical modeling activity. From the investigation carried out, we infer that group work, the real context, simplification, the mathematical resolution of a real problem, and the validation of the answer obtained are characteristics of the modeling that most contributed to the manifestation of the teacher's specialized knowledge, both the mathematical and the pedagogical content. Furthermore, it is worth considering that, sometimes the modeling activity requires specific knowledge, and sometimes the knowledge infers consequences for the activity.

KEYWORDS: Mathematics teaching; learning through modeling; initial teacher training; systematization of knowledge.

INTRODUÇÃO

A literatura tem apontado como significativo o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem e que essa estratégia tem ganhado importância nos currículos de diversos países. Caracterizada, essencialmente, pelo uso da matemática para resolver problemas reais, a modelagem matemática é um processo que permite um movimento do mundo real para o mundo matemático e de volta para o mundo real.

Esse movimento implica reconhecer, conforme sugerem Almeida, Silva e Vertuan (2012) e Castro e Veronez (2017), que a modelagem matemática envolve a busca por uma solução para um problema, não essencialmente matemático, que pode advir de uma sugestão dos alunos ou do professor, “um conjunto de procedimentos, que viabiliza o envolvimento com estruturas e conceitos matemáticos e uma análise consciente da resposta obtida para tal problema, podendo essa ser reconhecida, ou não, como solução” (Castro & Veronez, 2017, p. 96). Nesse processo, professor e alunos têm a oportunidade de matematizar a situação em estudo e analisar as soluções, numa tentativa de aproximar a matemática da realidade.

Nessa perspectiva, reconhecemos, assim como Almeida et al. (2013), que a modelagem matemática requer um comportamento dinâmico e ativo de professores e alunos, pois há necessidade de ambos buscarem relacionar conhecimento científico com conhecimento escolar, levando em conta as características da situação em estudo sejam elas sociais, econômicas, ambientais, ou de outras áreas.

Portanto, o trabalho com modelagem matemática pressupõe ações diferenciadas de professores e alunos, uma vez que sugere o estudo de problemas diferentes daqueles normalmente encontrados nos livros didáticos (Dias & Almeida, 2004). Neste sentido, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática considera que os “professores estejam preparados para desempenhar um papel ativo na organização, implementação e avaliação das atividades de modelagem matemática com seus alunos” (Dias & Almeida, 2004, p. 6). Em contrapartida, a inserção da modelagem matemática no contexto escolar pode levar os professores a vivenciarem, construírem ou manifestarem diferentes conhecimentos (Ferri, 2018; Wess et al., 2021; Bisognin & Bisognin, 2021).

Villa-Ochoa et al. (2021) sugerem a necessidade de oportunizar espaços de aprendizagem que possibilitem aos professores enfrentarem possíveis limitações em seu conhecimento profissional sobre a natureza da modelagem matemática e, assim, consigam integrá-la efetivamente no processo de ensino e aprendizagem. Os autores enfatizam que o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática bem-sucedidas, nas práticas escolares, exige habilidades e competências pedagógicas complexas, tendo em vista que atividades dessa natureza constituem-se ambientes de aprendizagem abertos e desafiadores. Além disso, salientam a importância não apenas de um domínio sólido de conhecimentos matemáticos e contextuais, mas também de uma familiarização com as atividades de modelagem matemática específicas selecionadas.

Estudos acerca de aspectos relativos à formação (inicial e continuada) dos professores em modelagem matemática já foram realizados por pesquisadores

como Almeida e Dias (2004), no entanto, ainda é reduzido o número de publicações que discutem o conhecimento especializado na perspectiva do MTSK - sigla cujo significado é *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* e traduzido para a língua portuguesa como *Conhecimento especializado do Professor de Matemática* - proposta por Carrillo-Yañez et al. (2018), foco de interesse de nossa investigação.

Entendemos, assim como Padilla-Escorcía et al. (2023), ser possível e necessária a integração de aspectos da modelagem matemática com as categorias de conhecimento propostas no MTSK. De acordo com esses autores, tal integração é possível pois o modelo MTSK aprofunda aspectos disciplinares da matemática e aspectos do tipo didático-pedagógico que, por sua vez, também estão presentes quando se deseja desenvolver processos de modelagem matemática no ensino, em sala de aula. E, além disso, a referida integração é necessária para fornecer *feedback* ao próprio modelo MTSK (Padilla-Escorcía et al., 2023).

Ademais, nosso interesse se justifica por considerarmos que uma análise sobre os conhecimentos do professor e as relações desses conhecimentos com a sua formação é extremamente relevante. Procuramos, nesse trabalho, debruçar atenção exatamente nesse sentido: discutirmos o conhecimento especializado do professor, na perspectiva do MTSK, enquanto planejam o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática inseridos em um contexto formativo. Nesse encaminhamento assumimos como objetivo neste estudo, investigar o conhecimento especializado do professor manifestado em uma atividade de modelagem matemática.

MODELAGEM MATEMÁTICA: UM OLHAR PARA O CONHECIMENTO DO PROFESSOR

A modelagem matemática pode assumir diferentes concepções e distintas abordagens educacionais (Kaiser; Sriraman, 2006), portanto a implementação de atividades dessa natureza em sala de aula pode ter objetivos diferentes, seja para o professor, seja para os alunos, de acordo com os diferentes níveis de escolaridade. No entanto, Ferri (2018) afirma haver um consenso de que a modelagem matemática pode ser descrita como uma atividade cuja característica essencial está no fato de envolver a transição entre a realidade e a matemática.

No contexto do projeto como também desta investigação, assumimos, assim como Almeida et al. (2013, p. 9), que a modelagem matemática é “uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da matemática, um problema não essencialmente matemático”. Nesse entendimento, o desenvolvimento de uma atividade de modelagem pode ser descrito em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (solução para a problemática) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final (Almeida et al., 2013). Esse processo de transição da situação inicial para a situação final pode ocorrer de forma orientada pelo que os autores denominam de fases da modelagem matemática, sendo elas: inteiração, matematização, resolução e interpretação de resultados e validação.

Na fase inteiração acontece a escolha do tema e a busca por informações a seu respeito. Na matematização, às informações e ao problema associa-se uma linguagem matemática.

Assim, define-se variáveis, faz-se simplificações e define-se hipóteses para escrever matematicamente o problema. Aspectos da fase de matematização conduzem os envolvidos à construção de um modelo matemático capaz de descrever a situação e que possibilite responder ao problema definido. A fase de busca da solução por meio do modelo é denominada resolução. Por fim, é preciso interpretar a resposta obtida e avaliar se é adequada, tanto do ponto de vista da situação quanto da matemática utilizada. Sendo esta fase chamada de interpretação de resultados e validação (Almeida et al., 2021, p. 385).

Ainda que tais fases não necessariamente aconteçam de modo linear, mas impliquem um movimento de idas e vindas (Almeida et al., 2013), caracterizá-las contribui para entender o modo pelo qual os alunos realizam a atividade, além de orientar uma intervenção pertinente por parte do professor. Não obstante, a intervenção do professor, em atividades de modelagem matemática, de modo a orientar os alunos, possibilita que eles construam ou mobilizem conhecimentos da situação em estudo, da matemática ou da relação entre ambos. Para isso, o professor desempenha um papel diferenciado, o que requer conhecimentos diversos.

Em suas assertivas Villa-Ochoa et al. (2021) defendem que a modelagem matemática oferece oportunidades para a aprendizagem, para o desenvolvimento das competências e para a manifestação de conhecimentos de professores envolvidos em atividades dessa natureza.

Para Wess e Grefath (2019) as competências profissionais do professor incluem a capacidade e o conhecimento para: (a) resolver uma tarefa de modelagem de múltiplas maneiras, (b) analisar tarefas de modelagem e (c) desenvolver tarefas de modelação. Além disso, segundo os autores, atividades de modelagem requerem do (futuro) professor a compreensão do potencial pedagógico desse tipo de tarefa, bem como “a capacidade de conceber e utilizar tarefas para estimular cognitivamente os alunos e avaliar o seu desempenho na aprendizagem, bem como a capacidade de analisar o trabalho realizado pelos alunos nessas tarefas” (p. 5).

Os estudos como os de Ferri (2018) e Wess et al. (2021), ressaltam que as competências fundamentais para o ensino eficaz da modelagem matemática incluem o Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK), de forma a contemplar especificidades da modelagem matemática. Essa abordagem integrada de formação pedagógica e conhecimento disciplinar é crucial para capacitar os educadores a implementarem práticas de ensino inovadoras que promovam uma compreensão profunda e aplicada da matemática por meio da modelagem. Isto é, os autores sugerem sublinhar a importância de uma preparação pedagógica robusta e contínua, que habilite os professores a implementar efetivamente a modelagem matemática.

Ainda sob a lente da formação inicial e continuada de professores, Zapata-Jaramillo (2023) afirma que a modelagem matemática pode contribuir para fortalecer o conhecimento do professor ao possibilitar a relação de uma situação do seu contexto social com a matemática. Apoiando-se em outras pesquisas, a autora afirma que a modelagem matemática oportuniza aos docentes a ampliação de seus conhecimentos sobre determinados objetos matemáticos, assim como dos conhecimentos relacionados ao ensino de matemática.

Nesse sentido, Bisognin e Bisognin (2021) investigam indícios da construção de conhecimentos necessários ao professor para ensinar matemática, utilizando a

modelagem matemática. Apoiadas em Matthew David Monfredo Schullman e Debora Ball, as autoras elencam categorias de análise e indicadores para analisar se a modelagem matemática favorece a construção de conhecimentos necessários para o ensino, particularmente, com foco no conhecimento matemático.

Os estudos sobre o conhecimento especializado do professor, em ambiente de modelagem matemática, ainda são incipientes e não o discutem na perspectiva do MTSK, foco da nossa investigação. Esta afirmação está pautada nos resultados apresentados na pesquisa de Vitalino e Teixeira (2022), a qual teve como objetivo apresentar um panorama - considerando o cenário brasileiro - dos artigos científicos permeados pelo MTSK e desenvolvidos a partir de alguma ação formativa. Como conclusão, além de terem identificado apenas um artigo voltado à formação de licenciandos em Matemática, estes autores destacam a ausência de pesquisas que considerem o modelo MTSK e ações de formação docente que estejam pautadas em alguma tendência metodológica como, por exemplo, a resolução de problemas e a modelagem matemática.

Desta forma, buscando ampliar as discussões com esse tema, neste estudo, de modo particular, interessa-nos investigar sobre o conhecimento especializado do professor, em ambiente de modelagem matemática, na perspectiva do MTSK.

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO MTSK

O modelo MTSK é um modelo teórico com fins analíticos cujo pressuposto base é que ao desenvolver a tarefa de ensinar matemática, certos conhecimentos de natureza especializada, úteis e necessários ao professor de matemática e relacionados com o processo de ensino e aprendizagem da matemática, são mobilizados pelo docente (Zapata-Jaramillo, 2023).

Além de contemplar elementos que permeiam e definem a organização e o uso do conhecimento (os quais estão relacionados com as crenças sobre a matemática, assim como sobre seu ensino e aprendizagem), o modelo MTSK está amparado em dois domínios de conhecimento: o conhecimento matemático (MK) e o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK). A cada um dos referidos domínios estão associados três subdomínios os quais seguem descritos na Tabela 1.

Tabela 1

Subdomínios do MTSK e suas respectivas descrições

CONHECIMENTO MATEMÁTICO (MK)	
Refere-se ao conhecimento que o professor tem da matemática como disciplina científica em um contexto escolar, isto é, conhecimento profundo da matemática.	
Subdomínios	Descrição do subdomínio
Conhecimento dos tópicos (KoT)	Associado ao conhecimento do conteúdo da matemática propriamente dito, isto é, dos fundamentos matemáticos, das definições, dos procedimentos, dos fatos, das regras, das propriedades, dos vocabulários adequados, dos teoremas, dos significados, dos diferentes registros de representações e modelos, assim como contextos e problemas.

CONHECIMENTO MATEMÁTICO (MK)

Refere-se ao conhecimento que o professor tem da matemática como disciplina científica em um contexto escolar, isto é, conhecimento profundo da matemática.

Conhecimento da estrutura da matemática (KSM)	Abarca o conhecimento do professor sobre os diferentes tópicos matemáticos enquanto conjuntos de elementos conectados e relacionados, isto é, como sistemas interligados que conectam o assunto e permitem abordar conteúdos mais avançados com um enfoque elementar e vice-versa.
Conhecimento da prática em matemática (KPM)	Conhecimento vinculado ao funcionamento da matemática (definida como qualquer atividade matemática realizada sistematicamente) e às regras que regem como a disciplina gera novos conhecimentos, ou seja, a forma como a matemática progride. Estão inclusos os saberes relacionados com as definições, as justificativas, as diferentes formas de demonstrar, fazer deduções e induções, dar exemplos e entender o papel dos contraexemplos, saber a diferença entre uma prova e uma definição, compreender os critérios de generalização e as diferentes estratégias de resolução de problemas, assim como a lógica que sustenta esses saberes.

CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO (PCK)

Refere-se ao conhecimento que o professor tem de aspectos relacionados com o conteúdo matemático como objeto de ensino-aprendizagem em cada etapa escolar, ou seja, o conhecimento didático do conteúdo.

Subdomínios	Descrição do subdomínio
Conhecimento do ensino de matemática (KMT)	Conhecimento teórico específico do ensino de matemática que leva o docente a identificar as formas mais adequadas de apresentar determinado conteúdo matemático (seja por meio de metáforas, situações ou explicações, ou ainda, incluindo exemplos, tarefas e atividades), assim como avaliar e selecionar com criticidade os diferentes materiais didáticos, os recursos (manipuláveis ou digitais), as estratégias e as técnicas de ensino, reconhecendo as possíveis limitações e potencialidades das escolhas estabelecidas. Tais aspectos levam em consideração a situação e o perfil estudantil no contexto estabelecido.
Conhecimento das características de aprendizagem da matemática (KFLM)	Conhecimento do professor sobre os diferentes aspectos da aprendizagem, mais especificamente do processo de compreensão e de construção do conhecimento pelos alunos ao lidarem com determinado conteúdo matemático. Estão contemplados nesse subdomínio conhecimentos sobre os percursos utilizados pelos seus alunos para entender um conteúdo matemático e as características, levando em conta, seus raciocínios, suas emoções, seus estilos de aprendizagem e seus procedimentos matemáticos. Portanto, esse conhecimento abarca os pontos fortes ou dificuldades que podem ter, os obstáculos associados aos conceitos, erros, equívocos, estratégias potenciais, percepções matemáticas, terminologia e linguagem utilizada para referir-se a conteúdos específicos, os aspectos emocionais na aprendizagem da matemática (motivação, ansiedade matemática) etc. Também estão incluídas o conhecimento de teorias de aprendizagem, sejam elas pessoais ou provenientes de pesquisas em educação

CONHECIMENTO MATEMÁTICO (MK)

Refere-se ao conhecimento que o professor tem da matemática como disciplina científica em um contexto escolar, isto é, conhecimento profundo da matemática.

matemática.

Conhecimento dos padrões de aprendizagem de matemática (KMLS)	Conhecimentos docentes a respeito das normas curriculares e demais documentos oficiais que regem o ensino nos diferentes níveis, assim como das pesquisas na área de educação matemática. Também está incluído neste subdomínio o conhecimento de propostas de sequenciamento para diferentes tópicos matemáticos, ou o conhecimento do nível de desenvolvimento conceitual ou processual que se espera que um aluno tenha.
---	---

Fonte: Elaborado pelas autoras com base em Flores-Medrano et al. (2016), Carrillo-Yañez et al. (2018) e Padilla-Escorcia et al. (2023)

Ao destacar os domínios e subdomínios relevantes, o modelo MTSK apresenta uma estrutura clara e especializada para compreender e aprimorar a prática docente em matemática, o que pode contribuir de forma significativa para o desenvolvimento profissional contínuo dos professores e, conseqüentemente, para a melhoria do ensino e aprendizagem da matemática. Desse modo, o modelo não apenas mapeia o conhecimento matemático do professor, mas também permite uma análise profunda de como esse conhecimento é aplicado na prática educativa.

Em síntese, o modelo MTSK “fornece uma compreensão do que o professor de matemática sabe, como ele sabe, o que esse conhecimento permite e o que ele precisa” (Zapata-Jaramillo, 2023, p. 28).

PERCURSO METODOLÓGICO DO ESTUDO

Na guisa de atender o objetivo ao qual nos propomos, investigar o conhecimento especializado do professor manifestado em uma atividade de modelagem matemática, assumimos para este estudo a abordagem qualitativa de pesquisa, com paradigma interpretativo.

Reportando-nos à Fiorentini e Lorenzato (2012) entendemos que a pesquisa qualitativa em educação matemática deve considerar o caso de estudo como um sistema complexo e interdependente, buscando compreender suas dinâmicas internas e suas relações com o contexto social mais amplo.

Sob a mesma perspectiva, Ferreira (2016) corrobora a asserção dos autores supracitados, ao afirmar que o paradigma interpretativo - ao qual a pesquisa qualitativa se alinha - valoriza a compreensão e a explicação, tendo por pretensão desenvolver e aprofundar o conhecimento de uma dada situação, num dado contexto. Este autor esclarece ainda que, em sua dimensão metodológica, o referido paradigma utiliza uma pluralidade de métodos qualitativos (tais como, estudos de casos, entrevistas, diários, observação participante, grupos focais etc.) para interpretar a realidade e o intercâmbio entre teoria e prática.

Assim sendo, no âmbito da abordagem qualitativa, optamos pela pesquisa participante, tendo em vista que nesta modalidade de investigação, “o

pesquisador se integra às atividades, podendo ou não intervir nelas” (Fiorentini e Lorenzato, 2012, p. 224). Destacamos que, uma das pesquisadoras, primeira autora deste artigo, elaborou a atividade de modelagem que sustenta nossas análises e acompanhou o seu desenvolvimento junto à amostra que, por sua vez, foi composta por três professores em formação inicial, alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, no contexto de um projeto de extensão de uma universidade pública.

O projeto de extensão, no qual os professores em formação estão envolvidos, intitulado “Modelagem matemática para o ensino de matemática”, tem como objetivo geral “promover a modelagem matemática como alternativa pedagógica para o ensino de matemática na Educação Básica, a partir do desenvolvimento de ‘dias de modelagem matemática’”. Para isso, uma das atividades dos professores em formação, bolsistas do projeto, se configura no estudo e planejamento de atividades de modelagem matemática para a implementação de “dias de modelagem” em escolas da Educação Básica. Cabe destacar que os bolsistas já haviam realizado estudos teóricos sobre modelagem matemática.

Neste artigo, em particular, trazemos para análise uma atividade com o tema “Relógio da Igreja”, proposta pela professora coordenadora do projeto aos professores em formação.

Como material de análise, utilizamos os registros digitais e gravações de áudio dos professores em formação enquanto desenvolviam a atividade proposta. A partir do material coletado, realizamos a organização dos registros, identificando o processo de resolução traçado e procedemos com as transcrições das falas dos professores em formação, organizados em diálogos.

Os diálogos apresentados são representativos dos momentos em que foram identificadas ações e estratégias expressivas para o desenvolvimento da atividade. Visando manter o anonimato dos professores em formação, os denominamos por PF1, PF2 e PF3. A fala da professora pesquisadora é indicada pela denominação Professora. Os diálogos são numerados em ordem crescente (embora não necessariamente sejam apresentados de forma linear ao desenvolvimento da atividade) e representam recortes que retratam as principais discussões dos professores em formação no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Os dados coletados forneceram subsídios para identificar, classificar e analisar os conhecimentos do professor em formação, decorrentes do seu envolvimento em atividades de modelagem matemática. Além disso, serviram como base para a compreensão de como aspectos intrínsecos ao desenvolvimento de tais atividades conduzem à manifestação de diferentes conhecimentos do professor de matemática e, de modo análogo, como tais conhecimentos influenciam nesse desenvolvimento.

Respalda esse processo, os seis tipos de conhecimento especializado do professor propostos por Carrillo-Yañez et al. (2018), tais sejam: conhecimento de tópicos (KoT), conhecimento da estrutura da matemática (KSM), conhecimento de práticas em matemáticas (KPM), conhecimento das características da aprendizagem matemática (KFLM), conhecimento do ensino da matemática (KMT), conhecimento dos padrões da aprendizagem da matemática (KMLS).

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE DESENVOLVIDA, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A atividade com o tema “Relógio da Igreja”, proposta pela professora-orientadora do projeto e primeira autora deste artigo, tem a configuração apresentada na Figura 1.

Figura 1

Síntese da atividade de modelagem matemática “Relógio da Igreja”

Relógio da Igreja

Situação da realidade

A atual Igreja Matriz São Pedro Apóstolo que foi inaugurada no dia 29 de Junho de 1965 é um dos cartões postais de Pato Branco. Um dos elementos que mais chama atenção é a torre do relógio instalado em 1964. A cada meia hora o relógio toca e o sino avisa as horas inteiras.

Problema

Qual seria a quantidade necessária de material para construir uma moldura para o relógio?

Informação

A torre onde está situado o relógio tem 50 metros de altura e 8 metros de largura, com quatro andares.



Simplificações

S1: Será desconsiderada a espessura do contorno.
S2: Não será considerado a composição do material do contorno.

Hipóteses

H1: A quantidade de material é dada pelo comprimento do contorno do relógio.
H2: A altura mínima será dada pelo limite dos marcadores de 12 e 6, no relógio.

Matematização e resolução

Variáveis:
Medida do relógio na foto (RF)= 3,4 cm
Medida da largura da torre na foto (TF)= 6 cm
Medida da largura real da torre (TR)= 800 cm
Medida real do relógio (RR)= ?

	Tamanho na foto (em cm)	Tamanho real (em cm)
Relógio	3,4	x
Torre	6	800

Resolvendo:
 $6x = 3,4 \cdot 800$
 $x = \frac{2720}{6}$
 $x = 453,33 \text{ cm ou } 4,33 \text{ metros}$

Moldura circular:

$$C = 2\pi r$$

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,26$$

$$C = 14,19 \text{ metros}$$

Moldura quadrada:

$$P = 4 \cdot l$$

$$P = 4 \cdot 4,33$$

$$P = 17,32 \text{ metros}$$

Modelo Matemático

Moldura circular (RF diâmetro)

$$C = 2\pi \left(\frac{RF \cdot TR}{TF} \right)$$

Moldura quadrada (RF diâmetro)

$$P = 4 \cdot \left(\frac{RF}{TF} \cdot TR \right)$$

Interpretação do resultado e validação

Se o relógio recebesse uma moldura circular, o comprimento do material deveria ser de no mínimo 14,19 metros. Caso fosse no formato de quadrado, seria no mínimo 17,32 metros. Ou seja, a moldura circular gastaria menos material. Para ambos formatos não foram considerados a espessura do material utilizado. O resultado foi validado utilizando diferentes imagens do objeto e trabalhando com escalas distintas. A resposta para a situação é satisfatória, considerando as hipóteses e simplificações adotadas.

Fonte: Autoria própria (2024).

A proposta da atividade foi apresentada pela professora coordenadora do projeto, na intenção de desencadear discussões para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática e sobre os elementos característicos de uma atividade de modelagem matemática.

Diálogo 1

PF2: *Eu estava pensando que os alunos iriam propor o problema. Não tinha compreendido que poderia ser nesse formato.*

PF1: *E é uma coisa que eles podem ver, conhecem o lugar. Vai ser interessante.*

PF2: *Mas eles podem escolher o problema, né? Nós vamos propor porque vai ser uma atividade pontual, pouco tempo e não conhecemos bem a turma.*

Quando a PF2 expõe a compreensão inicial que tinha sobre a modelagem matemática para o trabalho em sala de aula, sugere que o **conhecimento do ensino da matemática (KMT)** está em processo, ao passo que, a partir da experiência vivenciada, amplia a visão teórica das possibilidades de design de atividades dessa natureza.

Partindo da proposta, os professores em formação realizam uma leitura conjunta da situação-problema, das informações e do problema, para assim conforme ilustra o Diálogo 2, traçarem as primeiras estratégias de resolução.

Diálogo 2

PF1: Para saber a altura do relógio, precisamos saber o diâmetro.

PF2: Mas o centro do relógio não está no meio da parede? Se descobirmos o raio também podemos resolver o problema.

PF1: Sim. E a parede mede 8 metros de largura.

PF2: Como eu consigo resolver? Tem a informação que a torre mede 50 metros de altura, 8 de largura. Onde eu uso esse 50?

Professora: Para que?

PF2: Para calcular o raio do relógio.

PF1: Eu acho que essa é uma informação sobre a situação, mas não vamos usar na resolução matemática. Só com a informação sobre a largura já é suficiente.

Do contato dos professores em formação com a situação da realidade e com o problema posto, é possível perceber indícios de **conhecimento sobre tópicos (KoT)** sobre um contexto associado ao conceito de circunferência e seus elementos, ou seja, de tal forma que os professores em formação demonstram consciência sobre seus usos e aplicações como na afirmação de que “o diâmetro é a altura do relógio”. O **KoT** ainda pode ser observado na constatação de que “a informação sobre a largura é suficiente”, que a professora em formação (PF1) ao deparar-se com a linguagem natural que a informação se encontra, consegue interpretá-la na linguagem matemática necessária para resolver o problema, estabelecendo assim aplicação do tópico em questão à situação da realidade.

De fato, defendemos que o uso da matemática para resolver problemas reais, que caracteriza uma atividade de modelagem matemática, pode potencializar o **KoT**. Dado que esse conhecimento especializado é fortalecido na medida em que requer, do sujeito envolvido com uma atividade, contextualizar aplicações matemáticas com situações reais e, conseqüentemente, com conteúdos de outras disciplinas, conforme aponta Carrillo-Yañez et al. (2018).

No Diálogo 3, os professores em formação seguem com a resolução, buscando estabelecer simplificações para o problema.

Diálogo 3

PF2: Será que o raio não é a metade da metade da parede? Tipo o diâmetro é a metade da parede e o raio é um quarto?

Professora: Com base em que podemos afirmar isso?

PF1: Acho que não. (Medindo a imagem). Porque a medida do raio passa um pouquinho de um quarto da parede.

Professora: E se os alunos pensarem assim, o que vocês irão argumentar?

PF2: A gente pode pedir para eles medirem, assim como a PF1 fez.

PF1: Vou ampliar a imagem para ficar mais fácil. Vou deixar a medida com 8 cm, porque assim a escala fica 1 por 1 (cm por m). Deu quase 4 cm e meio.

O diálogo empreendido sugere indícios de **conhecimento da estrutura da matemática (KSM)**, tendo em vista que os professores em formação produzem conexões de simplificação da matemática envolvida na situação, como, por

exemplo, assumir a medida do raio como sendo um quarto da medida da parede ou projetando uma escala de 1:1 (cm:m). Ainda, parece haver uma relação entre os conceitos unidade de medida e fração, bem como a noção de proporção unitária, unidades de medida e escala. Nesse caso, a característica intrínseca de uma atividade de modelagem, que é a simplificação, foi o que ocasionou a manifestação do KSM.

A manipulação da escala, realizada pelo professor em formação (PF1), também carrega consigo indícios de **conhecimento do ensino da matemática (KMT)**, que lhe permite trabalhar com a ampliação/redução da foto usando, explorando um recurso tecnológico, pois tratava-se de uma imagem digital.

Ainda, quando a PF1 tira as medidas da imagem, realiza uma prova para testar o valor-verdade da proposição da PF2 (raio ser um quarto da parede), justificando com argumento matemático, fato que denota aspectos do **conhecimento de práticas matemáticas (KPM)**.

Se no diálogo 3 o que se mostra é uma tentativa de simplificação, e dela decorrem a emergência dos conhecimentos KSM e KPM, no diálogo 4 que segue, os professores em formação explicitam ideias que podem conduzir à resolução do problema por um encaminhamento mais complexo.

Diálogo 4

PF2: Só que esta imagem não está muito boa, ela está em perspectiva, um pouco torta. Será que podemos usar outra imagem, fotografia?

Professora: Podem buscar mais informações, se acharem necessário.

PF2: Tem a imagem do Google Maps, na rua de trás da igreja, mas também está em perspectiva.

Professora: Vocês pensam em trabalhar com perspectiva? Em atividades dessa natureza, muitas vezes, precisamos fazer algumas simplificações.

PF3: Como assim em perspectiva?

PF1: Sabem aquelas fotos tipo “pegando o sol na mão” ou a pessoa segurando a outra que está longe?

PF3: Ah, sim. É como se a distância reduzisse o tamanho, logo a distância ou o afastamento precisariam ser considerados no cálculo. Eu acho que nós conseguiríamos, mas os alunos (da Educação Básica) teriam mais dificuldade, porque geralmente trabalhamos com figuras no plano. [...]

PF2: Então vamos desconsiderar a perspectiva.

PF1: Penso que sim. Até porque, vamos ver aqui. Da primeira parte da parede até o meio do relógio mede 3,2 cm, do meio do relógio até a segunda parte da parede mede aproximadamente 3 cm. A diferença não é tão significativa.

PF2: Como você fez?

PF1: Assim óh, estou considerando que o relógio está exatamente no meio da parede, é o ponto médio do segmento da medida da parede, logo, deve ter a mesma medida do meio até ambas as extremidades.

Desse modo, entendemos que ao sugerir trabalhar com o conceito de “perspectiva” evidencia-se o **conhecimento da estrutura matemática (KSM)**, visto que propõem um aumento da complexidade na interpretação e planejamento de resolução, ou seja, o conceito sugerido parece mais avançado, do que inicialmente se esperava pela professora coordenadora. Essa questão do aumento da complexidade, instaurado pelo KSM, pode ser recorrente em modelagem

matemática, dado que, em atividades dessa natureza, embora o professor sugira o tema, o problema e forneça informações, os alunos podem assumir encaminhamentos distintos e diferentes daqueles antevistos pelo professor, conforme sugerem Castro e Veronez (2018).

Para realizar uma explicação, por meio de situações contextuais análogas, ou como Carrillo-Yañez et al. (2018) descrevem como usando uma metáfora (*fotos tipo 'pegando o sol na mão'*) a PF1 denota **conhecimento do ensino da matemática (KMT)**. Enquanto, em consequência disso, o PF3 sinaliza "*logo a distância ou o afastamento precisariam ser considerados no cálculo*" denota o **conhecimento da prática matemática (KPM)**, apresentando uma compreensão da lógica que sustenta seu entendimento sobre o conceito de perspectiva. Ainda nesse sentido, o KPM também se manifesta quando a PF1 argumenta sobre a irrisória influência que a noção de perspectiva exerceria na resolução matemática, ou seja, a professora em formação realiza a validação da ideia matemática, que leva à refutação do uso do conceito. Assim, sendo a validação um elemento inerente a uma atividade de modelagem matemática, pois possibilita a articulação de informações necessárias para confirmar quão razoável é uma resposta ou um resultado matemático para a situação real (Almeida, 2022), entendemos que também nesse momento, o conhecimento do professor, manifestado pelo KPM, foi potencializado por se tratar de uma atividade de modelagem matemática.

Ainda no diálogo 4, manifesta-se o **conhecimento das características da aprendizagem da matemática (KFLM)** quando o PF3 pontua sobre possíveis dificuldades que os seus alunos teriam com o conceito matemático, o que indica que o futuro professor, ao planejar a atividade, passa a considerar como os alunos pensam e constroem conhecimento ao lidar com tarefas matemáticas.

O diálogo 5, recorte das discussões sobre a resolução matemática do problema, traz novos elementos que nos levam a evidenciar o conhecimento especializado do professor e que mostra que tal tarefa potencializa o desenvolvimento destes conhecimentos.

Diálogo 5

Professora: Então vamos pensar. Temos a informação sobre a medida real da largura da torre, e o que mais?

PF1: Da medida dela na foto.

Professora: Certo.

PF2: Não entendi.

PF1: Se na foto ela mede 6 cm e no real ela mede 8 metros, então se o relógio mede 3,4 cm na foto, no real vai medir x.

PF2: Vou registrar aqui. Real, fotografia. Dá para resolver por regra de três? Vou usar a calculadora.

O uso da calculadora, como um recurso para a resolução dos cálculos matemáticos de forma eficiente, sinaliza a manifestação de **conhecimento do ensino da matemática (KMT)**. Enquanto a percepção de relação entre as grandezas e a recorrência à "regra de três" indicam **conhecimento de práticas em matemática (KPM)** por parte dos professores em formação.

Em atividades de modelagem matemática, como já vem sendo apontado na literatura, nem sempre é possível prever os conteúdos que serão necessários para resolver o problema, pois a "matemática a ser usada pode não ser previamente

escolhida, mas ela emerge da matematização da situação; diferentes conteúdos matemáticos podem decorrer da matematização de uma situação” (Almeida, 2022, p. 136). Essa imprevisibilidade decorrente da modelagem matemática revela a manifestação de alguns conhecimentos específicos desse grupo de professores em formação, caso outros professores desenvolvessem essa mesma atividade, o conteúdo e o recurso poderiam ter sido diferentes, bem como talvez, os conhecimentos mobilizados.

Ainda, o contexto que os professores em formação se encontram, podem tê-los levado a opções específicas, pois ao mesmo tempo em que desenvolvem a atividade de modelagem como sujeitos ativos, ponderam em como ela poderá ser desenvolvida nas salas em que realizarão a intervenção de extensão. No diálogo 6, essa ponderação se torna mais evidente.

Diálogo 6

PF1: Para que “série” essa atividade será aplicada? Parece que alguns seria mais fácil deles perceberem a matemática.

Professora: Qual vocês acham mais adequado?

PF2: Nono ano eles trabalham com segmentos proporcionais. Acho que isso está previsto na BNCC.

Professora: É possível resolver esse problema usando apenas ideia segmentos proporcionais?

PF2: Não só esse, nós resolvemos por regra de três. Grandezas diretamente proporcionais.

PF1: Eles precisam saber o conteúdo antes de resolver o problema? Porque regra de três por exemplo, eles podem saber em qualquer nível.

No diálogo 6, parecem ser dominantes aspectos relacionados ao **conhecimento dos padrões de aprendizagem matemática (KMLS)** os quais, conforme descrito no Quadro 1, contemplam aspectos referentes ao conhecimento docente acerca das normas curriculares e dos documentos oficiais que regem o ensino, bem como sobre o sequenciamento dos conteúdos e o nível de desenvolvimento (conceitual e/ou processual) esperado do aluno. Em nossa investigação, tais conhecimentos podem ser observados quando os professores em formação manifestam: preocupação com o estágio da escolaridade dos alunos que desenvolverão a atividade, bem como seu nível de habilidade matemática, orientada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que trata de orientações curriculares.

Dessa forma, ainda que em atividades de modelagem matemática não sejam orientadas por um conteúdo específico, mas por uma situação real e pelo problema que deu origem à atividade, os professores em formação põem em discussão os alunos que a desenvolverão, seus conhecimentos prévios e a matemática que será útil para chegar a uma resposta, uma solução, mas que ainda precisarão aprender. De fato, reflexões como essa podem ser possibilitadas e, na mesma medida, requerer KMLS.

O próximo diálogo tem como base o processo de resolução matemática do problema, o qual segue ilustrado por meio da Figura 2.

Figura 2

Resolução matemática do problema

Relógio da Igreja

Situação da realidade
A atual Igreja Menor São Pedro Apóstolo que foi inaugurada no dia 29 de Junho de 1965 é mais dos carões postais de Porto Branco. Um dos elementos que mais chama atenção é a torre do relógio instalada em 1964. A cada meia hora o relógio toca e o som avisa as horas exatas.

Problema
Qual seria a quantidade necessária de material para construir uma moldura para o relógio?

Informação
A torre onde está situado o relógio tem 50 metros de altura e 8 metros de largura, com quatro andares.

Simplificações
S1: Será desconsiderada a espessura do contorno.
S2: Não será considerado a composição do material do contorno.

Hipóteses
H1: A quantidade de material é dada pelo comprimento do contorno do relógio.
H2: A altura máxima será dada pelo limite dos marcadores de 12 e 6, no relógio.

Matematização e resolução
Variáveis:
Medida do relógio na foto (RF) = 3,4 cm
Medida da largura da torre na foto (TF) = 6 cm
Medida da largura real da torre (TR) = 800 cm
Medida real do relógio (RR) = ?

Tamanho na foto (em cm)	Tamanho real (em cm)
Relógio 3,4	x
Torre 6	800

Resolvendo:
 $6x = 3,4 \cdot 800$
 $x = \frac{2720}{6}$
 $x = 453,33 \text{ cm ou } 4,53 \text{ metros}$

Moldura circular
 $C = 2\pi r$
 $C = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,26$
 $C = 14,19 \text{ metros}$

Moldura quadrada
 $P = 4 \cdot l$
 $P = 4 \cdot 4,33$
 $P = 17,32 \text{ metros}$

Módulo Matemático
Moldura circular (RF diâmetro)
 $C = 2\pi \left(\frac{RF - TR}{2} \right)$
Moldura quadrada (RF diâmetro)
 $P = 4 \left(\frac{RF - TR}{2} \right)$

Interpretação do resultado e validação
Se o relógio necessesse uma moldura circular, o comprimento do material deveria ser de no mínimo 14,19 metros. Caso fosse no formato de quadrado, seria no mínimo 17,32 metros. Ou seja, a moldura circular gastaria menos material. Para ambos formatos não foram considerados a espessura do material utilizado. O resultado foi validado utilizando diferentes imagens do objeto e trabalhando com escalas distintas. A resposta para a situação é satisfatória, considerando as hipóteses e simplificações adotadas.

Fonte: Autoria própria (2024).

O referido diálogo, isto é, o diálogo 7, apresenta uma dinâmica quando olhamos para os conhecimentos manifestados.

Diálogo 7

PF1: *Aqui na minha deu 4,33.*

PF2: *Na minha deu 4,20.*

PF3: *Um pouco mais alto que a sala.*

Professora: *Certo, encontramos o que?*

PF3: *A medida do diâmetro.*

Professora: *Isso responde o problema?*

PF1: *Não, porque precisamos responder o comprimento da moldura.*

PF3: *Uma circunferência? Normalmente os relógios são redondos.*

PF2: *Mas pode ser quadrado também. Os alunos podem pensar nisso.*

PF1: *Então podemos fazer dos dois.*

PF2: *Mas temos o raio, conseguimos pensar no quadrado?*

PF1: *Sim, porque o diâmetro é o mínimo que vai precisar para traçar uma moldura no limite dos números do relógio.*

A estratégia do PF3 de comparar o tamanho obtido, usando o exemplo da altura da sala para entender o diâmetro do relógio, indica **conhecimento do ensino da matemática (KMT)**. O **conhecimento dos tópicos (KoT)** manifesta-se quando os futuros professores associam o conteúdo matemático e suas propriedades ao contexto real (relógio circular ou quadrado, diâmetro é o limite dos números do relógio). Por outro lado, quando a PF2 se mostra preocupada em como os alunos podem pensar para resolver o problema, sugere indícios de **conhecimento dos recursos de aprendizagem (KFLM)**.

Logo, a partir dessas interpretações, percebemos que conhecimento matemático e conhecimento pedagógico do conteúdo podem, por vezes, coocorrer. Outrossim, as considerações dos professores em formação sobre a

definição do raio representaram a base para prosseguir na construção do modelo, conforme revela o diálogo 8.

Diálogo 8

PF2: *Não sei se entendi direito, mas esses modelos matemáticos, então seriam que: para a moldura circular a expressão que mostra ali é duas vezes o pi vezes raio, que daria o comprimento do relógio, para saber qual seria o comprimento da moldura. E na moldura quadrada a expressão ali é que o l é de lados, que seria o diâmetro, duas vezes o raio, aí as vezes 4 é para saber os quantos metros precisa ter essa moldura quadrada.*

PF3: *Também entendi assim.*

O modelo obtido pelos professores em formação, que sustenta o diálogo 8, segue ilustrado por meio da Figura 3.

Figura 3

Modelo matemático obtido para o comprimento da moldura do relógio

Relógio da Igreja

Situação da realidade
A atual Igreja Matriz São Pedro Apóstolo que foi inaugurada no dia 29 de Junho de 1965 é um dos cascos-povoados de Puro Branco. Um dos elementos que mais chama atenção é a torre do relógio instalada em 1964. A cada manhã há o relógio toca e o sino toca na hora santa.

Problema
Qual seria a quantidade necessária de material para construir uma moldura para o relógio?

Tabela

Tamanho na foto (em cm)	Tamanho real (em cm)
Relógio: 3,4	x
Torre: 6	300

Resolução
 $6x = 24 \cdot 300$
 $x = 2720$
 $x = 453,33 \text{ cm ou } 4,533 \text{ metros}$

Interpretação do resultado e validação
 Se o relógio recebesse uma moldura circular, o comprimento do material deveria ser de no mínimo 14,18 metros. Caso fosse no formato de quadrado, seria no mínimo 17,32 metros. Ou seja, a moldura circular gastaria pouco material. Para evitar formato de torre, consideramos a espessura do material utilizado. O resultado foi validado utilizando diferentes imagens do objeto e trabalhando com escalas distintas. A resposta para a situação é satisfatória, considerando as hipóteses e simplificações adotadas.

Fonte: Autoria própria (2024).

Na construção do modelo, apesar da linguagem coloquial utilizada pela PF2, o **conhecimento dos tópicos (KoT)** é revelado, dado que, a interpretação que ela faz dos modelos matemáticos retrata, também, o conhecimento dos fundamentos e de propriedades matemáticas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do objetivo desta investigação de investigar o conhecimento especializado do professor, manifestados em uma atividade de modelagem matemática, inferimos alguns resultados importantes.

O trabalho em grupo colaborativo, conforme aponta Almeida (2022), como sendo inerente a uma atividade de modelagem matemática, na atividade analisada parece potencializar a manifestação de conhecimento do professor, na medida em que, em muitos momentos, o conhecimento só é explicitado/acessível/externalizado a partir da interação entre os componentes do grupo. Por exemplo, no diálogo 2, ainda que os indícios de KoT tenham sido identificados na fala da PF1, ao acompanhar o diálogo, parece que eles foram provocados, principalmente, pelas indagações da PF2. Logo, a manifestação desse

conhecimento relaciona-se também aos fatores que levam o professor a externalizá-lo e, assim, são acessíveis à interpretação do pesquisador.

Mesmo diante das interações com o grupo, pode ocorrer de alguns conhecimentos acontecerem de forma própria, particular do sujeito, como ocorre no diálogo 7, em que cada professor em formação manifesta um determinado conhecimento não diretamente decorrente de influências de outros. Por exemplo, o PF3 estabelece a comparação do tamanho da sala, sem que haja uma pergunta ou afirmação anterior que conduza a essa ponderação.

Das análises, ainda é possível inferir que parece haver uma inter-relação entre os conhecimentos, como, por exemplo, no diálogo 3, quando a intenção de simplificação – raio sendo um quarto da parede – (KSM), conduz à verificação da proposição – teste das medidas – (KPM) que, por sua vez, desencadeia uma nova simplificação – manipulando a escala – (KSM).

Comumente, parece ser possível relacionar determinado conhecimento às características ou elementos específicos da modelagem matemática. De fato, o KoT é um conhecimento privilegiado pela característica da modelagem matemática de requerer que o problema advenha de um contexto real. Logo, a necessidade de compreensão e relação contexto real-aplicação da matemática, privilegia o KoT. De igual modo, à validação associa-se ao KPM, levando em consideração que a validação em modelagem requer testar/provar resultados matemáticos em função da situação real que se deseja responder, o que vai ao encontro do entendimento de KPM adotado. Seguindo nessa linha, a simplificação prenuncia a manifestação de KSM, o qual é normalmente associado a conexões de simplificação ou complexidade da situação e especialmente da matemática envolvida.

Ainda que alguns conhecimentos não sejam tão diretamente dependentes da modelagem matemática, dado que poderiam ocorrer em qualquer contexto que não envolvendo esse tipo de atividade, numa visão holística eles são resultado do processo como um todo. Um exemplo disso é a preocupação do professor em formação sobre trabalhar o conteúdo de acordo com as orientações curriculares (diálogo 6), embora tal preocupação possa ser recorrente em práticas cotidianas do professor, nesse contexto específico ela se manifesta, pois, o problema de modelagem matemática não foi pensado para atender a um conteúdo, ao contrário, este surgiu da necessidade de responder o problema.

A partir das análises realizadas, ainda que em um panorama inicial, é possível inferir que, ora a atividade de modelagem matemática requer conhecimentos específicos, ora os conhecimentos inferem desdobramentos para a atividade. Por exemplo, no diálogo 2 é o problema real, essência da modelagem matemática, que traz à tona o KoT, por outro lado, o KFLM manifestado pelo PF3 é que os leva a decidir pela simplificação (desconsiderando a noção de perspectiva) necessária em atividades de modelagem matemática.

Uma limitação do estudo é que o conhecimento dos professores em formação foi analisado no eixo “aprender por meio” (Omodei & Almeida, 2022), ou seja, a partir do desenvolvimento das atividades, em um contexto inicial de aprendizagem e planejamento, e traz indícios do que Wess e Greefath (2019) denominam capacidade e conhecimento para desenvolver tarefas de modelação. Em estudos futuros podemos analisar o conhecimento especializado dos professores em

situações de implementação das atividades em sala de aula, no eixo “ensinar usando”, as quais poderão fornecer descrições mais diferenciadas da atuação do professor enquanto lida com os encaminhamentos dos alunos.

REFERÊNCIAS

- Almeida, L. M. W. (2022). Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. *VIDYA*, 42(2), 121-145.
<https://doi.org/10.37781/vidya.v42i2.4236>.
- Almeida, L. M. W., Castro, É. M. V., & Silva, M. H. S. (2021). Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto on-line. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 14(2), 383-406.
<https://doi.org/10.5007/1982-5153.2021.e77227>.
- Almeida, L. W., Silva, K. P., & Vertuan, R. E. (2013). *Modelagem Matemática na Educação Básica*. São Paulo, SP: Contexto.
- Almeida, L. M. W., & Dias, M. R. (2004). Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, 17(22), 19-35.
<https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10529/6935>.
- Bisogin, E., & Bisognin, V. (2021). Modelagem Matemática: uma análise do conhecimento matemático para o ensino. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 12(2), 1-19. <https://doi.org/10.26843/rencima.v12n2a06>.
- Castro, E. M. V., & Veronez, M. R. D. (2018). Diferentes encaminhamentos para um mesmo tema em atividades de modelagem matemática. *ACTIO: Docência em Ciências*, 3(3), 471-488.
<https://doi.org/10.3895/actio.v3n3.7782>.
- Castro, E. V., & Veronez, M. D. (2017). Procedimentos manifestos por alunos do Ensino Fundamental em uma atividade de modelagem matemática. *Ensino & Pesquisa*, 15(1), 287-319.
<https://doi.org/10.33871/23594381.2017.15.1.1288>.
- Castro, E. M. (2022). *Metacognição em atividades de modelagem matemática*. [Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática], Universidade Estadual de Londrina. Repositório Institucional da UEL.
<https://repositorio.uel.br/items/38ea4442-ff63-4268-933d-a0dd3ffbfb39/ful>.
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.
<https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>.

- Dias, M. R., & Almeida, L. M. W. D. (2004). Formação de professores e Modelagem Matemática. In *Anais do 8 Encontro Nacional de Educação Matemática*, Recife, PE. <https://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/10/CC02045371930.pdf>.
- Ferreira, C. R. (2016). *A modelagem matemática na educação matemática como eixo metodológico da prática do professor de matemática*. [Tese de Doutorado em Educação], Universidade Estadual de Ponta Grossa. Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações. https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UEPG_7a15f5199cedca7422bb9274d787db01.
- Fiorentini, D. & Lorenzato, S. (2012). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas, SP: Autores Associados.
- Flores-Medrano, E., Montes, M. A., Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M. & Liñán, M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema*, 30, 204-221. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10>.
- Ferri, R. B. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education* (pp. 121-133). New York: Springer International Publishing.
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38, 302-310. <https://doi.org/10.1007/BF02652813>.
- Omodei, L. B. C., & de Almeida, L. M. W. (2022). Formação do professor em modelagem matemática: da aprendizagem para o ensino. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 1-24. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2022.e82597>.
- Padilla-Escorcia, I, A., Acevedo-Rincón, J. P., & Montes, M. A. (2023). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas para enseñar a través de la modelación utilizando las TIC. *Acta Scientiae*, 25(1), 160-195. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7363>.
- Villa-Ochoa, J. A., Sánchez-Cardona, J., & Rendón-Mesa, P. A. (2021). Formative assessment of pre-service teachers' knowledge on mathematical modeling. *Mathematics*, 9(8), 851. <https://doi.org/10.3390/math9080851>.
- Vitalino, G. da S. O. & Teixeira, B. R. (2022). Conhecimento especializado do professor de Matemática manifestado a partir de ações formativas: um levantamento bibliográfico. *Perspectivas da Educação Matemática*, 15(37), 1-20. <https://doi.org/10.46312/pem.v15i37.13078>.
- Wess, R., Klock, H., Siller, H. S., & Greefrath, G. (2021). *Measuring professional competence for the teaching of mathematical modelling: a test instrument*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-78071-5_3.

Wess, R., & Greefrath, G. (2019). Professional competencies for teaching mathematical modelling—supporting the modelling-specific task competency of prospective teachers in the teaching laboratory. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Utrecht University, Utrecht, Netherlands. <https://hal.science/hal-02409039>.

Zapata-Jaramillo, M. M. (2023). *Conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de las matemáticas en educación primaria a través de la modelación matemática*. (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Repositorio Institucional Universidad de Antioquia. <https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/35660>.

Recebido: 10 jul. 2024

Aprovado: 28 nov. 2024

DOI: <https://doi.org/10.3895/actio.v9n3.18820>

Como citar:

Castro, E. M. V. de, Zarpelon, E., & Colombo, J. A. A. (2024). O conhecimento especializado do (futuro) professor manifestado em uma atividade de modelagem matemática. *ACTIO*, 9(3), 1-20.

<https://doi.org/10.3895/actio.v9n3.18820>

Correspondência:

Élida Maiara Velozo de Castro

Via do Conhecimento, s/n, - KM 01, - Fraron, Pato Branco - PR, 85503-390, Brasil.

Direito autoral: Este artigo está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.

