ACTIO: Docência em Ciências
ISSN: 2525-8923

http://periodicos.utfpr.edu.br/actio

O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos ingressantes de um curso de licenciatura em matemática

Ariane da Silva Landgraf
arianelandgraf@hotmail.com
orcid.org/0000-0001-5250-4049
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procópio, Paraná, Brasil

Andresa Maria Justulin
ajustulin@utfpr.edu.br
orcid.org/0000-0003-4107-8464
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procópio, Paraná, Brasil

RESUMO

Este artigo tem como objetivo analisar os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico manifestados por alunos ingressantes do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campus* Cornélio Procópio, por meio da resolução de problemas. A pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa, buscando o entendimento de aspectos relacionados ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos participantes. Para a coleta de dados, elaborou-se um instrumento com sete problemas que envolvem conteúdos de Álgebra, o qual foi aplicado em uma turma 37 alunos ingressantes do curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de Fundamentos da Matemática 1. Para contemplar o objetivo enunciado, são apresentados três dos problemas aplicados. A análise dos dados abarcou as resoluções dos participantes, fazendo uma triangulação com o referencial teórico que trata dos indicadores do desenvolvimento do pensamento algébrico. Os resultados apontaram um índice menor do que 50% em cada indicador analisado, o que revela que o pensamento algébrico dos participantes não é satisfatório.

PALAVRAS-CHAVE: Resolução de Problemas. Álgebra. Pensamento Algébrico.

INTRODUÇÃO

Após estágios e participação do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), ambos realizados na rede pública de uma cidade do Norte do Paraná, surgiu o interesse em estudar as dificuldades apresentadas pelos alunos com relação a matemática, principalmente em conteúdos que envolvem a Álgebra. A percepção inicial foi de que os alunos não compreendiam os conceitos algébricos, bem como os procedimentos para manipular expressões, resolver equações, generalizar situações e também entender problemas algébricos.

Além disso, o interesse no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos mostrou-se relevante pois, muitas vezes, ele acaba sendo deixado de lado, em detrimento do uso do livro didático e diante da preocupação do professor em esgotar um conteúdo de maneira ágil, a fim de conseguir cumprir o cronograma escolar.

O artigo apresenta, primeiramente, um referencial teórico focado na resolução de problemas, destacando: suas concepções para o ensino de matemática, os passos e etapas de Polya, bem como algumas possíveis estratégias de resoluções que podem ser apresentadas pelos alunos. Em seguida, faz-se um retrato sobre a Álgebra, com descrições de seu desenvolvimento histórico e aspectos importantes do seu ensino, bem como um arrazoado sobre o pensamento algébrico. Posteriormente, ressalta-se a metodologia de pesquisa utilizada, os procedimentos metodológicos, a descrição dos participantes e dos instrumentos para coleta de dados. São apresentadas as análises realizadas com relação a resoluções dos alunos a partir do instrumento proposto. Por fim, são tecidas as considerações finais, revelando-se os principais resultados da pesquisa.

Este artigo traz resultados da pesquisa realizada como Trabalho de Conclusão de Curso da primeira autora, sob orientação da segunda, e tem por objetivo analisar os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico manifestados por alunos ingressantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campus* Cornélio Procópio, por meio da resolução de problemas.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O professor que pretende trabalhar a resolução de problemas em suas aulas, precisa compreender, primeiramente, que o que é problema para um aluno pode não ser para outro. Desse modo, cabe a ele realizar a escolha de problemas que estejam no nível adequado da sua turma.

Nesse trabalho, adota-se a definição de Onuchic (1999, p.215), que considera problema como "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver".

Com relação à resolução de problemas, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998),

> Resolução de problemas é um caminho para o ensino de Matemática que vem sendo discutido ao longo dos últimos anos. A história da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de

> terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outros (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados à investigação interna da própria Matemática (BRASIL, 1998, p.32).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta um destaque para a resolução de problemas, com o objetivo de possibilitar que o aluno desenvolva “a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações” (BRASIL, 2018, p. 263).

Um dos autores pioneiros a discutir e alavancar a resolução de problemas, em 1944, foi George Polya. No Brasil, ficou conhecido por meio do seu livro “How to solve it”, traduzido por “A arte de resolver problemas”. Segundo Polya (2006) o professor que possui como foco melhorar o aproveitamento de seus alunos, deve realizar um diagnóstico sobre seus aspectos bons e maus. Desse modo, ele poderá propor problemas conforme o desenvolvimento de cada um.

Polya (2006) apresenta quatro passos que os alunos devem seguir para se tornarem bons resolvedores de problemas: (1) a compreensão do problema, (2) a elaboração de um plano, (3) a execução de um plano e (4) a verificação da resposta. A compreensão do problema é necessária para dar início ao uso das estratégias, pois não é possível responder uma pergunta que não foi compreendida. O próximo passo é a formulação de um plano, a ideia pode surgir de modo repentino, gradativa ou em um momento após tentativas frustradas. Recombinar os dados do problema também é importante a se colocar em prática, desse modo, pode-se chegar a um problema novo e mais fácil. Também é possível recombinar o problema entre manter sua hipótese e mudar a conclusão ou mudar a hipótese e manter a conclusão, como uma tentativa útil de solução. Em seguida, o aluno deve executar aquilo que pensou. Para finalizar as etapas, é necessária a verificação dos resultados, e caso não seja realizada, a resolução pode não corresponder à solução do problema inicial, pois é através dela que o aluno irá analisar se todos os dados do enunciado foram utilizados e se a resposta é coerente ao problema.

No ensino de Matemática, a resolução de problemas ganha evidência com a publicação do documento *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980’s* (Uma agenda para a Ação: recomendações para a Matemática escolar na década de 1980), pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (Conselho Nacional de Professores de Matemática), (NCTM), o qual indica que a Resolução de Problemas deveria ser o foco da Matemática escolar nos anos 1980.

Com isso, os professores passaram a seguir essa orientação, mas os modos de implementar a Resolução de Problemas nas aulas revelam-se distintos. Schroeder e Lester (1989 apud ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), destacam três formas de conceber a resolução de problemas no ensino de Matemática: (1) Ensinar sobre a resolução de problemas, teorizando a resolução como mais um conteúdo a ser ensinado, fazendo uso das etapas de Polya; (2) Ensinar para a resolução de problemas, que se caracteriza pelo ensino focado em resolver os problemas, com o propósito de praticar os conteúdos já aprendidos e (3) ensinar via ou através da resolução de problemas, em que se considera a resolução de problemas como um meio de ensinar matemática, e o problema é ponto de partida para a atividade matemática, o gerador do novo conteúdo a ser construído pelo aluno, que tem o professor como mediador.

Analisando-se a aplicação de problemas em sala de aula, é possível verificar seu uso na introdução, explicação e finalização, de um conteúdo e de acordo com o objetivo traçado pelo professor na preparação de suas aulas. No entanto, Allevato e Onuchic (2014) recomendam seu uso no início, destacando sua potencialidade na construção do conceito matemático. Resolver problemas sempre esteve presente no ambiente escolar e, ao longo do tempo, os professores fazem uso de problemas de formas distintas em sala de aula, revelando suas concepções.

Sobre o ensino através da resolução de problemas, no trabalho de Allevato e Onuchic (2014) tem-se o desenvolvimento de um roteiro elaborado para o professor trabalhar a Metodologia de Ensino- Aprendizagem- Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, com a seguinte configuração: 1. Preparação do Problema; 2.Leitura Individual; 3.Leitura em conjunto; 4. Resolução do problema; 5. Observar e incentivar: O professor deverá observar e incentivar seus alunos; 6.Registro das resoluções na lousa (por um representante de cada grupo); 7. Plenária; 8. Busca do consenso; 9. Formalização do conteúdo e 10.Proposição e resolução de novos problemas.

ÁLGEBRA

A compreensão de álgebra decorre da evolução de concepções ao longo da história, de acordo com o desenvolvimento da Matemática. Ribeiro e Cury (2015) retratam que os babilônios e egípcios trabalhavam a partir das equações, que surgiam de problemas práticos do cotidiano, resolvendo-as de maneira intuitiva. Já os gregos obtinham equações com caráter geométrico e a solução apresentava-se de maneira dedutiva. Dentre esses povos não havia nenhuma preocupação em encontrar soluções que poderiam ser aplicadas de forma geral. No que diz respeito às funções, os babilônios e egípcios possuíam apenas ideias que não eram claramente uma função, pois o foco estava ainda na solução de problemas do cotidiano. Com relação aos gregos, já possuíam uma noção implícita e ligavam-se em casos particulares como as quantidades físicas. Os referidos autores continuam sua pesquisa discorrendo sobre os árabes e hindus, que trabalhavam com equações de ordem práticas, no entanto, as interpretavam e resolviam por meio de manipulações geométricas. Para os europeus as funções eram estudadas como uma variação funcional e com leis algébricas.

Segundo Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) a Álgebra se desenvolve de forma concreta a partir de Diofanto (329-409), uma vez que o mesmo foi o primeiro a usar abreviações para o que hoje se chama de incógnita, e assim, de maneira concisa expressar o pensamento algébrico. Ponte (2006) relembra que o termo álgebra passou a ser utilizado após alguns séculos de Diofanto, e continua dizendo que foi Al- Khwarizmi (790-840) que designou a operação de transposição de termos, bastante utilizada em resoluções de equações.

Em relação ao ensino de Álgebra, Ribeiro e Cury (2015) afirmam que o professor pode partir de um problema com linguagem comum, para que os alunos consigam tentar expressá-los por meio de símbolos e assim, chegar à linguagem algébrica, que por meio da generalização permite utilizar esse mesmo pensamento para outras situações-problema.

Nessa direção, Ponte (2006) afirma que o grande objetivo do estudo da álgebra em sala de aula está atrelado ao desenvolvimento do pensamento algébrico, o qual inclui que a capacidade de manipulação da simbologia vai além de estudos mecanizados de expressões, equações e funções.

PENSAMENTO ALGÉBRICO

O pensamento algébrico, foco de pesquisas em Educação Matemática, apresenta relevância diante do cenário da Educação Básica, da falta de domínio matemático, e para a qual a Álgebra tem uma grande parcela de contribuição. Para Santos e Santos (2010) é possível notar facilmente que o ensino da Matemática, e o caso particular da Álgebra, se encontram desassociados da realidade de alunos e professores.

Segundo Devlin (2002 apud MACHADO, 2010) a matemática sem os seus símbolos algébricos seria pouco desenvolvida. Ou seja, os símbolos e manipulações algébricas são importantes para o desenvolvimento da Álgebra. No entanto, a mera execução de procedimentos isolados não possibilita a construção de conhecimento. Logo desassociados da realidade e dos problemas cotidianos, não contribuem com a formação do pensamento algébrico.

Segundo Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), o pensamento algébrico ocorre em todas as áreas da Matemática, além de outros campos do conhecimento. Machado (2010) destaca que a Álgebra e o pensamento algébrico não se resumem ao trabalho com símbolos, ou seja, limitar a atividade algébrica é reduzir a álgebra em uma de suas facetas. Nesse sentido, aprender álgebra é ser capaz de pensar algebricamente em diversas situações.

O NCTM, em sua publicação *Principles and Standards for school mathematics* (Princípios e Padrões para a matemática escolar), define que o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação. Nessa direção, o aluno deve: Compreender padrões, relações e funções; representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos; usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas e analisar mudança em diversas situações (Estudo da variação) (NCTM, 2000).

Segundo Junior e Bianchini (2015), o objetivo principal do ensino da Álgebra é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Os autores afirmam também que a álgebra escolar tem servido para ensinar procedimentos que os alunos afirmam não possuir nenhuma ligação com outros conhecimentos matemáticos e nem com seu cotidiano. Contudo, a formação do pensamento algébrico dos alunos e a ideia de como solucionar problemas surgem no decorrer da aprendizagem, e assim:

> [...] são considerados dois objetos centrais: o primeiro é permitir que, os alunos sejam capazes de produzir significados para a álgebra, e o segundo é que os alunos desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente. Assim, o desenvolvimento de habilidades e técnicas seria uma consequência, e propõem a articulação de recursos postos em jogo na resolução de problemas ou na condução de uma investigação matemática (LINS; GIMENEZ apud LAIER, 2014, p. 40).

Na tentativa de buscar classificações para o pensamento algébrico, Smith (2008 apud RIBEIRO; CURY, 2015) diferenciam dois tipos de pensamento algébrico: o pensamento representacional e o pensamento simbólico. Os autores explicam que o pensamento simbólico está ligado à forma de usar e compreender o sistema simbólico, já o pensamento representacional relaciona-se aos processos mentais, em que o indivíduo cria significados referenciais para algum sistema representacional.

Silva (2012), ao analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico, construiu 12 indicadores, conforme Quadro 1:

Quadro 1 – Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico

Indicador	A atividade possibilita que o professor conduza os alunos a:
1	Estabelecer relações/comparações entre as expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos
2	Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação- problema
3	Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação problema
4	Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica
5	Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas
6	Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples
7	Desenvolver algum tipo de processo de generalização
8	Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias
9	Perceber o uso de variável como incógnita
10	Perceber o uso de variável como número genérico
11	Perceber o uso de variável como relação funcional
12	Desenvolver a linguagem simbólica a expressar-se matematicamente

Fonte: Silva (2012, p.41).

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho possui abordagem da pesquisa qualitativa, com interesse em analisar indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos ingressantes do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campus* Cornélio Procópio, pois trata-se de uma etapa de escolaridade, situada na transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior.

A opção pela pesquisa qualitativa deu-se por ela auxiliar o pesquisador a identificar as particularidades dos participantes, com foco no processo todo e não apenas no resultado final. Segundo Bogdan e Biklen (1994) a pesquisa qualitativa é descritiva e os dados estão explícitos em palavras ou imagens, e não em números. Além disso, os investigadores qualitativos estão interessados mais no processo da pesquisa, no que somente em seus resultados ou produtos. Nesse sentido, realizar uma pesquisa qualitativa é analisar seus sujeitos de maneira completa dentro de suas complexidades.

Borba e Araújo (2004), os quais afirmam que dificilmente se chega ao novo seguindo caminhos já trilhados. O que dá sentido às disciplinas é sua capacidade de contribuir para o avanço do pensamento novo. A pesquisa qualitativa é o caminho para se escapar da mesmice. Lida e dá atenção às pessoas e as suas ideias.

Os participantes da pesquisa foram 37 alunos ingressantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campus* Cornélio Procópio, matriculados na disciplina de Fundamentos da Matemática 1, e todos estavam no primeiro período do curso e não tinham cursado a disciplina anteriormente. Eles foram previamente convidados a participar da pesquisa, bem como a assinar o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram: (A) uma prova composta por três problemas algébricos, elaborada com o objetivo de explorar os indicadores do pensamento algébrico apresentados no Quadro 1 e (B) um questionário pessoal, em que foram obtidos os seguintes dados:

- 28 alunos são oriundos da rede Pública de ensino;
- 9 (nove) alunos são oriundos da rede Particular de ensino;
- 31 alunos disseram que os conceitos de álgebra (função, equação ...) já foram ensinados a eles no decorrer de sua vida escolar;
- 3 (três) alunos disseram que os conceitos de álgebra (função, equação ...) não foram ensinados a eles em nenhum momento de sua vida escolar;
- 3 (três) alunos não recordam se aprenderam os conceitos algébricos no decorrer da vida escolar.

Os problemas foram resolvidos anteriormente à aplicação pela pesquisadora, e realizou-se uma análise individual de cada um, em que foram identificados indicadores do desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme Quadro 1, que esperavam ser contemplados ao longo da resolução dos participantes, conforme tabela 1.

Tabela 1 – Indicadores do pensamento algébrico correspondente a cada problema

Problemas	Indicadores
1	2, 5 e 6
2	2, 7, 8 e 12
3	5

Fonte: Autoria própria (2020).

Após a coleta dos dados, a fim de preservar a identidade dos participantes, cada protocolo recebeu a letra A e um número de 1 a 37. Ao longo do trabalho serão mencionados por A1, A2, A3 e assim por diante. Em seguida, cada problema foi analisado individualmente. Foram identificados em cada um deles os indicadores do desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme Quadro 1, e, especificamente, os destacados na tabela 1.

ANÁLISE DE DADOS

Apresentam-se nessa seção as análises realizadas dos três problemas, com o objetivo de analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos participantes, conforme Quadro 1 e Tabela 1.

> PROBLEMA 1: (MUNDO DA EDUCAÇÃO) Tumba de Diofanto
>
> "Aqui jaz o matemático que passou um sexto da sua vida como menino. Um doze avos da sua vida passou como rapaz. Depois viveu um sétimo da sua vida antes de se casar. Cinco anos após nasceu seu filho, com quem conviveu metade da sua vida. Depois da morte de seu filho, sofreu mais 4 anos antes de morrer". De acordo com esse enigma Diofanto teria quantos anos?

Nesse primeiro problema, os participantes deveriam descobrir a idade de Diofanto a partir de dados que expressam partes de sua vida. Assim, cada fração apresentada no enigma refere-se a uma parte de um todo (a idade final de Diofanto) como também a Números Inteiros e, desse modo, devem considerar esse fato ao resolver o problema.

O problema 1 contempla três dos indicadores do pensamento algébrico apresentados no Quadro 1: (2) Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema; (5) Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas;(6) Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples.

No indicador (2) esperava-se que, para conseguir alcançá-lo, o participante resolvesse o problema utilizando recursos baseados na aritmética ou na aritmética e na Álgebra. Já no indicador (5) o aluno deveria identificar que, para resolver o problema, é necessário que a soma das partes da idade de Diofanto seja igualada ao número "X" procurado, que é a idade total de Diofanto e as frações definidas são partes desse todo. O indicador (6) observa se o aluno dividiu o problema em pequenas partes, com resoluções mais simples e lhe ajudando a chegar ao valor final.

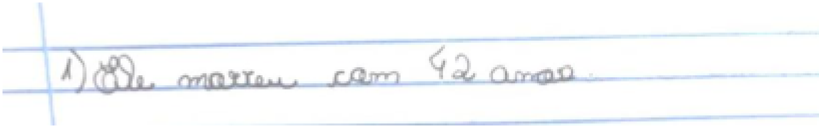
Nesse sentido, percebeu-se que:

- 16 alunos contemplaram o indicador (2);
- 2 (dois) alunos contemplaram o indicador (5);
- 3 (três) alunos contemplaram o indicador (6);
- 19 alunos não contemplaram nenhum dos indicadores;
- Nenhum aluno conseguiu alcançar todos os indicadores e nem apresentar os cálculos necessários corretamente;
- 16 alunos não indicaram nenhuma resposta definida ou sinalizada.

Os três participantes que conseguiram chegar à idade final de Diofanto que corresponde a 84 anos, não realizaram cálculos corretos ou não apresentaram nenhum tipo de resolução, o que pode ser considerado resoluções por "tentativa e erro".

Percebe-se na Figura 1, que o A8 não realizou nenhum tipo de cálculo na folha de resoluções, apenas admitiu que Diofanto morreu com 42 anos de idade. Respostas como essas não possibilitaram a tomada de nenhuma decisão quanto aos indicadores do quadro 2 selecionados para questão, como também não foi possível realizar uma análise aprofundada. Desse modo, pode-se considerar como uma "tentativa e erro" de resposta, que, de algum modo, o aluno pensou que estaria correta.

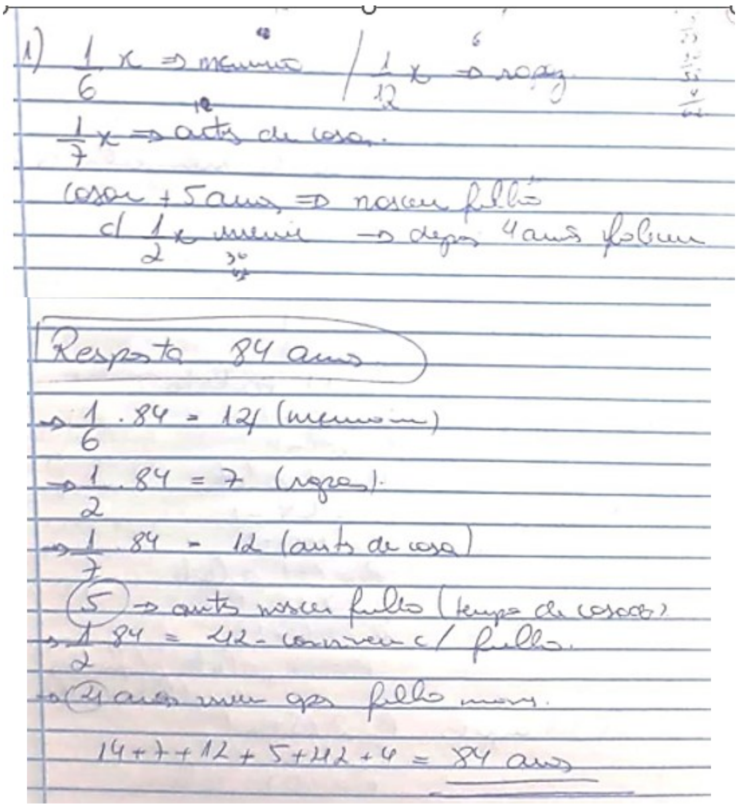
Figura 1- Resolução do problema 1, pelo A8


1) Ele morreu com 42 anos

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Em outro caso, o aluno A3 acertou a idade em que Diofanto morreu, correspondente a 84 anos. No entanto, não mostrou como chegou a esse valor antes de realizar os cálculos correspondentes. Ele partiu de um valor final e, posteriormente, teve a confirmação da resposta por meio do retrospecto do problema, o que demonstra que, de alguma maneira, o aluno já sabia a resposta final do problema e somente a comprovou, conforme figura 2.

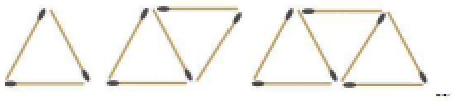
Figura 2 - Resolução do problema 1, pelo A3


1) $\frac{1}{6}x$ => menino | $\frac{1}{12}x$ => rapaz
$\frac{1}{7}x$ => antes de casar.
casar + 5 anos => nasceu filho
c/ $\frac{1}{2}x$ menino -> depois 4 anos faleceu

Resposta 84 anos
-> $\frac{1}{6} . 84 = 14$ (menino)
-> $\frac{1}{12} . 84 = 7$ (rapaz).
-> $\frac{1}{7} . 84 = 12$ (antes de casar)
5 -> antes nascer filho (tempo de casado)
-> $\frac{1}{2}$ 84 = 42 - conviveu c/ filho.
-> 4 anos viveu após filho morrer.
$14+7+12+5+42+4 = 84$ anos

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

De modo geral, os alunos não conseguiram resolver a questão corretamente como se esperava. Houve algumas respostas corretas, mas que não foram obtidas através de recursos aritméticos ou algébricos. Nota-se que os alunos apresentaram grandes dificuldades para compreender e resolver o problema proposto.

> Problema 2: (TINOCO, 2011, p.33) Palitos de fósforos
>
> a) Com palitos de fósforo, construa um triângulo. Quantos palitos você usou?
>
> b) Continue a formar outros triângulos como na figura:
>
> 
>
> Note quantos palitos foram utilizados para formar três triângulos. E se formar cinco? E se você formar dez? e se você formar 65?
>
> c) Se alguém quiser saber quantos palitos serão utilizados para formar um número n qualquer de triângulos, você saberia escrever uma expressão para ajudá-lo? Teste sua expressão e verifique se dá o número de palitos que você usou para fazer 5 triângulos.

Nesse problema o participante deveria analisar como o crescimento do número de palitos ocorre em relação à formação de triângulos. Desse modo, no “item a” pede-se para que se desenhe apenas um triângulo e conte a quantidade de palitos utilizados; no “item b” o aluno deve analisar a formação de três triângulos, já apresentados na ilustração do problema e, em seguida, que ele verifique a quantidade de palitos necessária para formar dez triângulos.

Há possibilidade de utilizar como estratégia rápida a continuação do desenho. Mas, logo após, solicita-se que se apresente a quantidade de palitos utilizados para formar 65 triângulos, ou seja, a possibilidade de desenho já pode ser praticamente descartada, principalmente pela falta de tempo. Desse modo, o aluno deverá ser capaz de identificar como o aumento do número de palitos acontece com relação ao número de triângulos e, assim, formular uma expressão que favoreça a descoberta quando se trata de números grandes. No “item c” pede-se que o participante transforme essa expressão em um caso genérico, para “n” triângulos, que seria $2n + 1$, em que n é a quantidade de triângulos.

Esse problema contempla 4 (quatro) dos indicadores do desenvolvimento do pensamento algébrico apresentados no Quadro 1: (2) Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema; (7) Desenvolver algum tipo de processo de generalização; (8) Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias; (12) Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente.

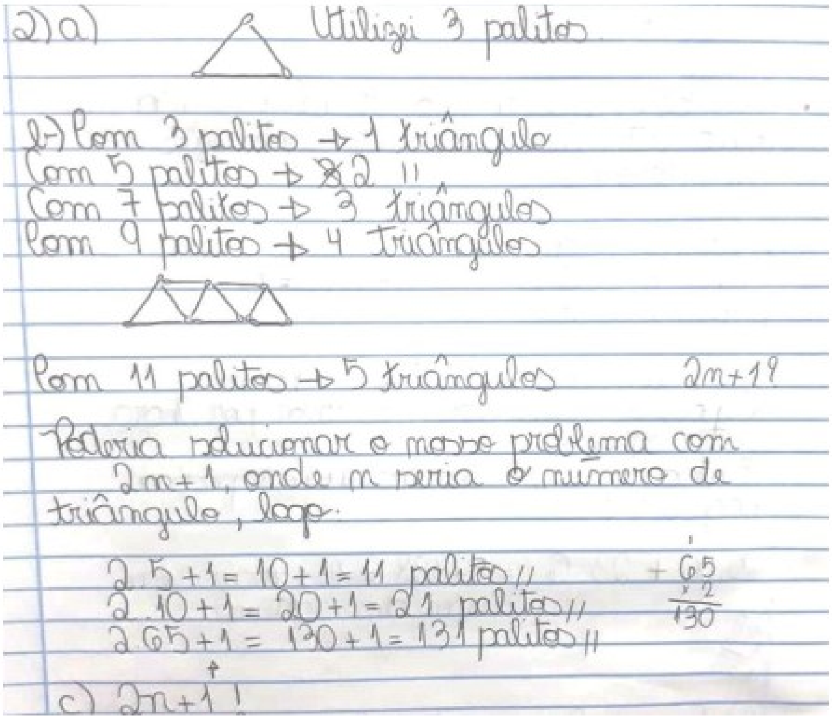
Referente ao indicador (2), esperava-se que o aluno fosse capaz de tentar resolver o problema apresentado e de expressá-lo matematicamente, tanto algébrica como aritmeticamente. Já para o indicador (7) o aluno deveria perceber que no problema há a possibilidade de se encontrar uma expressão para calcular qualquer quantidade de palitos em função da quantidade de triângulos. O processo para se encontrar tal expressão necessita da generalização da situação. Para contemplar o indicador (8) o aluno precisaria perceber que o aumento da quantidade de palitos ocorre regularmente e de maneira uniforme e, por último, para o indicador (12) o aluno deveria conseguir expressar-se matematicamente ao resolver as questões do problema, e assim apresentar tudo o que foi solicitado, obtendo a expressão final $2n + 1$. Nota-se, após realizar as análises dos itens do problema, que:

- 29 alunos contemplaram o indicador (2).
- 21 alunos contemplaram o indicador (7).
- 16 alunos contemplaram o indicador (8).
- 16 alunos contemplaram o indicador (12).
- alunos não contemplaram nenhum dos indicadores acima.
- 22 alunos utilizaram, ao menos no primeiro item, a estratégia do desenho;
- Apenas uma vez o “item a” e o “item c” ficaram em branco.
- Apenas 9 (nove) alunos conseguiram contemplar os quatro indicadores ao resolverem o problema 2.

Nota-se que os alunos sentiram algumas dificuldades para resolver o problema, principalmente na formulação da expressão geral. No entanto, os primeiros itens do problema foram solucionados com um pouco mais de facilidade.

Pode-se analisar na Figura 3, que o A2 respondeu corretamente todos os itens da questão, e foi bastante claro e organizado em suas resoluções. Ele apresentou pequenos cálculos, quando necessário, por já ter descoberto a expressão.

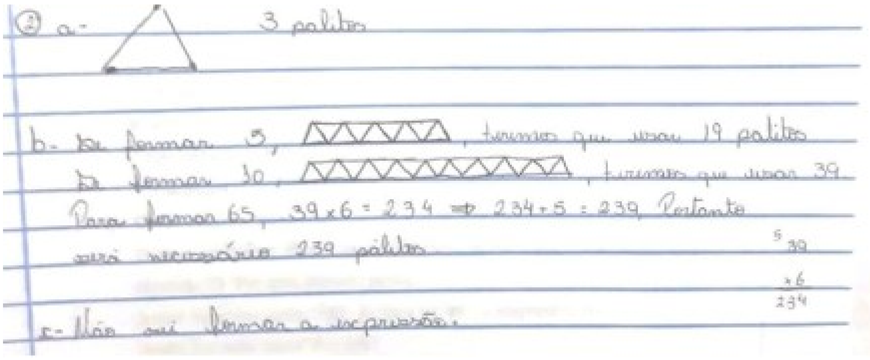
Figura 3 - Resolução do problema 2, pelo A2



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Ainda é possível notar na resolução apresentada na Figura 4 feita pelo A9, que o mesmo não considerou o desenho formado pelos “triângulos acima” dos que possuem uma face virada para baixo, ou seja, nesse caso pode ser um problema relacionado à falta de domínio espacial ou geométrico, já que o aluno apresenta ter compreendido o que a questão pedia em relação à contagem de palitos e em relação à formação de triângulos.

Figura 4 - Resolução do problema 2, pelo A9



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Nos registros dos participantes são percebidas diversas tentativas de resoluções, alguns alunos conseguiram chegar ao esperado e, outros, tiveram dificuldades de interpretação ou não possuíam domínio do conteúdo o suficiente para resolver o problema. Outro fator importante para resolver um problema é o uso de estratégias adequadas, Musser e Saughnessy (1997) retratam que muitas vezes as estratégias são deixadas de lado, e na execução de um plano de resolução os alunos precisam utilizar caminhos e conteúdo para chegar no resultado correto.

Os alunos em geral apresentaram pouca variedade de estratégias para resolver os problemas. No “item a”, 15 alunos utilizaram a estratégia do desenho para calcular quantos palitos eram necessários para formar um triângulo. Já no “item b”, 9 (nove) alunos utilizaram desenhos para mostrar a quantidade de palitos necessária para formar 5 (cinco) triângulos; para 10 e 65 triângulos. Os participantes que acertaram o resultado não utilizaram a estratégia de desenho, que não ajudaria nos cálculos de quantidades maiores de triângulos, mas encontraram a expressão solicitada no “item c”.

> Problema 3: (TINOCO, 2011, 22) Onde está o erro?
>
> Dado o problema: Pensei em um número, dividi-o por 2 e somei 3 ao resultado, obtendo 23. Em qual número pensei?
>
> André resolveu assim: “23 − 3 = 20x2 = 40”, e respondeu 40.
>
> André fez tudo certo? Por quê?

Nesse problema o aluno deveria pensar sobre os dados apresentados e analisar se os cálculos realizados por André estavam corretos. Além disso, deveria justificar o caso de a resposta ser afirmativa. O aluno deveria notar que as igualdades apresentadas por André, não são válidas e que não podem ser escritas da maneira como foi proposta no problema, pois “’23 − 3 ≠ 20x2”.

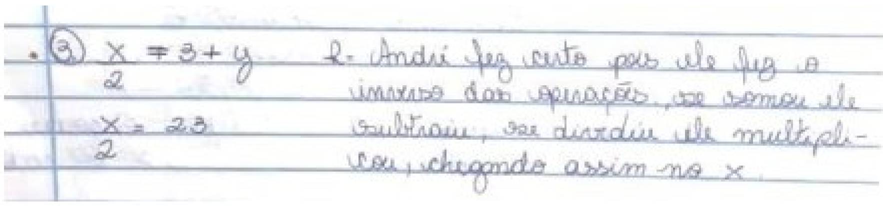
O indicador de desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme Quadro 1, do problema 3 seria: (5) Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas. Esperava-se, então, que para contemplar tal indicador o aluno encontrasse os erros na igualdade do problema.

Após a realizar as análises dos registros dos participantes, chegou-se que:

- 3 (três) alunos contemplaram o indicador (5).
- 33 alunos não contemplaram o indicador (5).
- 1 (um) aluno deixou a questão em branco.

Muitos alunos disseram que fariam como André para descobrir o número pedido, mas não identificaram o erro na igualdade. Portanto, tais participantes também foram considerados nas análises como alunos que não contemplaram o indicador (5). Além disso, 13 alunos disseram que concordavam com André, pois o mesmo apenas fez o processo inverso das operações do enunciado, como na Figura 5. No entanto, na resolução apresentada o aluno obteria o valor 46 ao invés de 40, conforme dado do problema. Outros alunos apenas disseram que fariam o mesmo ou que a resposta estava correta.

Figura 5 - Resolução do problema 2, pelo A9


(3) $\frac{x}{2} = 3 + y$

$\frac{x}{2} = 23$

R- André fez certo pois ele fez o inverso das operações, se somou ele subtraiu, se dividiu ele multiplicou, chegando assim no x.

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Nota-se que alunos que concluíram de modo semelhante ao aluno A6 estiveram atentos em encontrar o número 40 como resposta, e comprovar que a resposta final de André estava correta. No entanto, por falta de percepção ou domínio do conteúdo não identificaram o erro da igualdade apresentada na resolução do problema.

Nas tabelas de 2 a 4, são apresentados o problema e a quantidade de alunos que conseguiu contemplar cada indicador individualmente.

Tabela 2 – Quantidade de alunos que contemplaram os indicadores do problema 1

Indicador	Quantidade de alunos
2	16
5	2
6	3
nenhum	19

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Tabela 3 – Quantidade de alunos que contemplaram os indicadores do problema 2

Indicador	Quantidade de alunos
2	29
7	21
8	16
12	16
nenhum	6

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Tabela 4 – Quantidade de alunos que contemplaram os indicadores do problema 3

Indicador	Quantidade de alunos
5	3
nenhum	33

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo do desenvolvimento do pensamento algébrico na transição escolar do Ensino Médio para o Ensino Superior, em um curso de formação de professores de Matemática, mostra-se como uma oportunidade para auxiliar no processo de constituição do aluno e do futuro professor.

Nesse sentido, a presente pesquisa possui como objetivo analisar os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico manifestados por alunos ingressantes do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *Campus* Cornélio Procópio, por meio de resolução de problemas. Buscando-se responder à pergunta diretriz da pesquisa "Que indicadores do pensamento algébrico os alunos ingressantes do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *Campus* Cornélio Procópio, manifestam ao resolverem problemas matemáticos?" serão apresentados os principais resultados obtidos.

A análise dos instrumentos revelou que os participantes apresentaram maior percentual de desempenho no indicador (2) "Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema" com índice de 60,81%, já o indicador (7) "Desenvolver algum tipo de processo de generalização" apresenta o índice de 56,75%. Com relação aos indicadores (8) "Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias" o de e (12) Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente, tiveram índices abaixo de 50%. E os demais, indicadores (5) "Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas", (6) "Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples", apresentaram índices abaixo de 10%. Em alguns problemas selecionados, como o problema 1 os participantes não obtiveram a resposta correta. No máximo, conseguiram apresentar parcialmente a resolução.

É preocupante o fato de que grande parte dos participantes é proveniente de cidades vizinhas, ou de outros estados. Nota-se, então, que os resultados insatisfatórios quanto ao desenvolvimento do pensamento algébrico, não se referem ao ensino obtido na cidade de Cornélio Procópio, mas revelam um problema mais geral, apresentado por grande parte dos alunos.

De acordo com as resoluções e respostas fornecidas pelos alunos, eles não utilizaram estratégias diferenciadas e não se importaram em validar suas respostas, ou seja, fazer um retrospecto do problema. De acordo com Polya (2006), um bom resolvedor de problemas deveria compreender o problema, elaborar um plano, executá-lo e avaliar sua resposta.

Nesse sentido, alguns participantes ao resolver problemas referentes à álgebra da Educação Básica mostraram-se inseguros e muitas vezes confundiram a resolução como sendo uma demonstração. As dificuldades reveladas estão relacionadas à transição dos Ensinos Médio e Superior. “A passagem do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado envolve a transição: do descrever para o definir, do convencer para o provar de uma maneira lógica com base nas definições” (TALL, 2002, p.20).

The development of algebraic thinking in incoming students of a degree course in mathematics

ABSTRACT

This paper aims to analyze the indicators of development of algebraic thinking manifested by incoming students of the Bachelor's course of Federal Technological University of Paraná, Cornélio Procópio campus, through the resolution of problems. The research followed a qualitative approach, seeking the understanding of aspects related to the development of the participants' algebraic thinking. For data collection, was elaborated an instrument with seven problems involving algebraic contents, applied to a group of 37 incoming students of the Mathematics Undergraduate course in the subject Fundamentals of Mathematics 1. This paper presents three of the applied problems to contemplate the objective. The data analysis covered the participants' resolutions, developing a triangulation with the theoretical framework that deals with indicators of the development of algebraic thinking. The results showed a rate of less than 50% in each indicator analyzed, revealing that the participants' algebraic thinking is unsatisfactory.

KEYWORDS: Problem solving. Algebra. Algebraic thinking.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs). **Resolução de problemas:** teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**: Uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto, 1994.

BORBA, M.C.; ARAUJO, J.L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. BH: Autentica, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (5ª a 8ª séries). Brasília, DF, 1998.

DEVLIN, K. **Matemática:** A ciência dos padrões. Porto: Porto Editora, 2002.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. A., MIGUEL, A. Contribuição para um repensar a Educação Algébrica Elementar. **Pro-posições**. Campinas: Cortez Editora, v.4, n.1, 78-91, 1993.

JUNIOR, S.; BIANCHINI, B. L. Pensamento Algébrico e o currículo enculturador evidenciado por professores. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, n. 14. 2015. Chiapas. **Anais...** Chiapas: CIAEM-IACME, 2015. Disponível em: http://xiv.ciaemredumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/353/178>.Acesso: 11 de mar.2021.

LAIER, S.S.S. **Álgebra e Aspectos do Pensamento Algébrico:** Um estudo com Resolução de Problemas na licenciatura em Ciências Naturais e Matemática UFMT/SINOP. 2014. 158 f. Dissertação (Mestrado em Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2014.

MACHADO, S. O papel da Notação algébrica no desenvolvimento do Pensamento Algébrico. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10. 2010. Salvador. **Anais...** Salvador: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010.

MUSSER, G. L., SHAUGHNESSY, J. Estratégias de resolução de problemas na matemática escolar. In: KRULIK, S. e REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar.** São Paulo: Atual, 1997. p.188 – 201.

NCTM. Principles and Standards for School mathematics. Reston VA: NCTM, 2000.

ONUCHIC, L. de L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções & Perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999

POLYA, G. **Arte de resolver problemas**. 2. Ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. In: VALE, I.; PIMENTEL, A.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P.(Eds). Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores – **Anais... XIV EIEM** (p. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE, 2006. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4525/1/06-Ponte%28Caminha%29.pdf>. Acesso: 17 de abr. 2021.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H.N. **Álgebra para a formação do professor**: Explorando os conceitos de equação e função. Belo horizonte: Autêntica, 2015.

SANTOS, L. G.; SANTOS, V.M. Introdução do Pensamento Algébrico. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, n 10. 2010. Salvador. **Anais...** Salvador: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in maathematics via problem solving. In: Trafton, P. R.; Shulte, A. P. (Org.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

SILVA, A. Z. **Pensamento algébrico e equações no Ensino Fundamental:** uma contribuição para o Caderno do Professor de Matemática do oitavo ano. 2012. 105p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

SMITH, E. Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics, 2008.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, David. (Org.), **Advanced mathematical thinking**, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2002, p.20.

TINOCO, L de A. (Coord). **Construindo o conceito de função**. 5. ed. Rio de Janeiro: UFRJ Projeto Fundão,2004.

Recebido: 25 jun. 2021
Aprovado: 22 nov. 2021
DOI: 10.3895/actio.v6n3.14459
Como citar:
LANDGRAF, A. S.; JUSTULIN, A. M. O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos ingressantes de um curso de licenciatura em matemática. **ACTIO**, Curitiba, v. 6, n. 3, p. 1-218, ago./dez. 2021. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio>. Acesso em: XXX
Correspondência:
Ariane da Silva Landgraf
Rua Floriano Landgraf, n. 270, Vila Popular, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil.