

Modelagem matemática como metodologia para o processo de aprendizagem de função exponencial

RESUMO

A Modelagem Matemática na educação Matemática mostra-se uma metodologia de ensino eficiente no âmbito interdisciplinar por ser um processo que alia a teoria e a prática, motivando na procura do entendimento da realidade que cerca o estudante. Dito isso, sua utilização garante ao professor um melhor aproveitamento dos conteúdos explorados pelos alunos fazendo-os relacioná-los com outras áreas de conhecimento. Por essa razão, para este relato de experiência, tal metodologia foi adotada, visando exibir aos alunos as diferentes aplicações da função exponencial fora do campo puramente matemático com o objetivo de torná-la mais visível para eles. Este estudo foi feito com alunos do primeiro ano do Ensino Médio de um colégio público do estado do Paraná no município de Curitiba como parte de um projeto do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). Após a intervenção em sala de aula detalhada neste trabalho, foi feita uma análise com os documentos recolhidos no fim da atividade na perspectiva das fases da modelagem matemática, buscando entender o conhecimento conceitual e de conteúdo dos alunos acerca do tema proposto, além das suas capacidades de reconhecer a função exponencial em suas diferentes formas. As questões presentes na atividade foram elaboradas com a expectativa do que poderia ser respondido pelos alunos e, a partir disso, foi feita uma análise sobre o quanto estas expectativas foram atendidas, seja no sentido de as respostas estarem dentro do esperado, ou de terem sido tomados caminhos totalmente inesperados, mas que mesmo assim não se destoavam do proposto. A tarefa proposta aos alunos trouxe a interdisciplinaridade, uma revisão teórica sobre funções exponenciais e foi necessitado um papel investigativo dos alunos com o objetivo de realizar a interpretação e criação do modelo matemático para a situação problema. Quando analisado em contexto geral, como não há um domínio prévio sobre a teoria, a interpretação foi trabalhosa. Com isso, foi possível observar que os alunos pecavam nos conceitos puramente matemáticos. Entretanto, para o processo mecânico de substituir valores eles obtiveram grande performance.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática. Relato de experiência. Função exponencial.

Hesrron Crysthoffer Porto Santana
hesrron21@gmail.com
orcid.org/0000-0003-1678-9301
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, Paraná, Brasil

Pedro Luiz Gonzalez
pedro.lui@msn.com
<https://orcid.org/0000-0002-9073-4416>
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, Paraná, Brasil

INTRODUÇÃO

O presente trabalho é um relato de experiência acerca de uma atividade desenvolvida no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 sob a perspectiva da metodologia de ensino Modelagem Matemática.

Este relato de experiência exhibe o processo de desenvolvimento de uma atividade do conteúdo de Função Exponencial, tais como as intervenções em sala de aula realizadas em três turmas do 1º ano do Ensino Médio de um colégio estadual do município de Curitiba – PR e os respectivos resultados obtidos.

A atividade em questão foi desenvolvida com o objetivo de apresentar aos alunos a presença da matemática em outras áreas de conhecimento, mais especificamente na Biologia. Dito isso, a metodologia que atendia da melhor maneira os objetivos propostos foi a Modelagem Matemática. Além disso, também buscou-se compreender as noções dos alunos em relação aos conceitos principais da função exponencial, além das suas interpretações de gráficos e tabelas.

Na Educação Básica, o aluno deve compreender que as Funções estão presentes nas diversas áreas do conhecimento e modelam matematicamente situações que, pela resolução de problemas, auxiliam o homem em suas atividades. (PARANÁ, 2008, p. 59)

Ou seja, para que haja uma melhor compreensão do conteúdo, é necessário que os alunos entendam o significado do objeto matemático que está sendo trabalhado. Para isso, fazer a relação da função exponencial com outras áreas do conhecimento dá a possibilidade para que o aluno possa trabalhar matematicamente a fim de modelar o seu problema visando solucioná-lo. Especificamente com a função exponencial, existem áreas específicas onde é possível trabalhá-la, utilizando das suas diversas formas de representação de acordo com o problema que for proposto.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

De acordo com Dominoni (2005 apud IEZZI, 2002), a definição de função exponencial encontrada nos livros didáticos utilizados no Ensino Médio é de que “Chama-se Função Exponencial qualquer função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, em que a é um número real dado, $a > 0$ e $a \neq 1$.”

Essa função possui propriedades específicas que são apresentadas aos alunos no decorrer das aulas. Tais propriedades ajudam na compreensão dos gráficos da função e são ferramentas para o desenvolvimento algébrico da mesma. A função exponencial é utilizada em diversos contextos de outras disciplinas além da Matemática, Química, Física, Biologia, Economia, entre outros. Especificamente na Biologia, que é foco da atividade proposta, a função exponencial é utilizada para representar o crescimento de bactérias em uma colônia. Essa relação que se cria entre disciplinas é extremamente importante no ensino de funções na Educação Básica.

Dominoni (2005, p. 29) aborda a importância de se ensinar funções no Ensino Médio, a relacionando “[...] à busca do homem para explicar os fenômenos naturais e sociais do seu ambiente”, nos quais se procuram certas regularidades

nos fenômenos que permitem a possibilidade de repeti-los quantas vezes forem necessárias. “Podemos então caracterizar função como um instrumento na busca destas regularidades, pois estabelece uma relação entre dois ou mais conjuntos.” (DOMINONI, 2005, p. 29).

Ao longo dos séculos, a definição de função foi ganhando forma de acordo com os conceitos matemáticos conhecidos em determinadas épocas. Além disso, o conceito de função foi moldado através de muitas reformulações, avançando com suas ideias e retornando a conjecturas passadas, criando conceitos e definições. Dessa forma, a linearidade em que se constrói os tipos de funções no Ensino Médio nada mais é do que um recorte simplificado e nem sempre verídico do que realmente foi feito na história da matemática.

A BNCC também dá importância às diferentes representações de um objeto matemático. Neste contexto, a função exponencial tem como diferentes representações seus gráficos, tabelas, os enunciados das atividades e os próprios desenvolvimentos algébricos. Dessa forma, utilizar dessas diferentes representações da função é “[...]necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade” (BRASIL, 2018, p. 529). Além disso, é necessário que os alunos sejam aptos a trabalhar com essas diferentes representações, sendo capazes de modelar seu problema de acordo com as especificidades de cada representação. É importante, então, que os alunos saibam reconhecer a função exponencial, tanto na sua forma gráfica, quanto na algébrica e na linguagem natural (isto é, descrita em palavras no formato de uma situação-problema).

Para que um aluno possa reconhecer a Função Exponencial num registro de linguagem natural, ele precisa ler e interpretar o texto, identificar as variáveis e características da função, assim como o tipo de variação que está ocorrendo, possibilitando não somente representar matematicamente esta situação, como se fosse um sistema de códigos, mas encontrar o significado do conceito Função Exponencial, numa situação problema a resolver. (DOMINONI, 2008, p. 38).

No Ensino Médio, as funções devem ser abordadas de forma que o aluno possa relacioná-la com outras áreas de conhecimento. De acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (DCE-PR),

As abordagens do Conteúdo Funções no Ensino Médio devem ser ampliadas e aprofundadas de modo que o aluno consiga identificar regularidades, estabelecer generalizações e apropriar-se da linguagem matemática para descrever e interpretar fenômenos ligados à Matemática e a outras áreas do conhecimento. O estudo das Funções ganha relevância na leitura e interpretação da linguagem gráfica que favorece a compreensão do significado das variações das grandezas envolvidas. (PARANÁ, 2008, p. 59).

Além disso, na área de Números e Álgebra, a Base Curricular Nacional (BNCC) cita como habilidade a ser desenvolvida com o ensino da função exponencial, a interpretação dos seus conceitos relacionando-as com outras áreas de conhecimento:

Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. (BRASIL, 2018, p. 544).

Apesar de usar a Matemática Financeira como exemplo, no contexto do presente relato, a Biologia se enquadra fortemente como uma disciplina que abre possibilidades para se trabalhar com funções exponenciais. Com isso, para o melhor aproveitamento da interdisciplinaridade sugerido pela DCE e a BNCC, a atividade de Função Exponencial desenvolvida foi feita dentro das características da metodologia de Modelagem Matemática.

MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática é uma metodologia de ensino a partir da qual é feita a análise matemática sobre a problematização das situações que nos circundam (PARANÁ, 2008). De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASÍLIA, 2006, p.84) “[...]modelagem matemática, que pode ser entendida como a habilidade de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Também é possível pensar que

Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de Matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. (BIEMBENGUT & HEIN, 2013, p. 12).

Ao utilizar essa metodologia, é exercitado com o aluno a capacidade de “matematização” da circunstância trabalhada, na qual o aluno deve transportar da linguagem natural, em torno da situação problema, para a linguagem matemática. Para isso, é necessário um conhecimento interdisciplinar, uma razoável fundamentação teórica matemática, e a capacidade de interpretação da situação apresentada (ALMEIDA, 2011, p. 16).

O trabalho dessa capacidade de transporte para a linguagem matemática é uma das 4 fases da modelagem matemática, juntamente com inteiração, resolução e interpretação de dados e validação. O processo inicial, chamado de inteiração, é quando o aluno faz a leitura dos textos bases, geralmente sendo conceituados em elementos que nos rodeiam, como a biologia, maré oceânica, radioatividade, população, entre outros contextos.

Essa etapa representa um primeiro contato com uma situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de conhecer as características e especificidades da situação. Implica, portanto, cercar-se de informações sobre essa situação por meio de coleta de dados quantitativos e qualitativos, seja mediante contatos diretos ou indiretos. (ALMEIDA, 2011, p. 15).

A modelagem matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes do ser humano ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões. (BURAK, 1992, p. 62).

A seguinte fase é a “matematização” que já foi citada anteriormente e é, então, o processo de resolução da situação problema, que consiste, de acordo com Almeida (2011, p. 16) “[...] a construção de um modelo matemático com a

finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação”. Na última etapa é contemplada a interpretação dos resultados e validação, que embasa em interpretar a situação-problema e validar respostas e/ou soluções de acordo com o modelo matemático construído anteriormente (ALMEIDA, 2011, p. 16).

Tendo em vista a etapa final, conclui-se que utilizar modelagem matemática significa, essencialmente, utilizar ferramentas matemáticas para representar e criar um modelo para situações do cotidiano, tornando assim os conceitos matemáticos aplicáveis na prática.

A modelagem matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes do ser humano ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões. (BURAK, 1992, p. 62).

Segundo o trabalho de Gonçalves e Menegais (2016), quando utilizado a modelagem matemática, houve dificuldades com as operações exponenciais e problemas com a interpretação das questões. Porém, relevando as dificuldades e dúvidas, os alunos tiveram um resultado positivo, confirmado por Gonçalves e Menegais (2016) “[...] aluno agora podia dizer a seguinte frase: ‘eu sei para que serve a função exponencial e que tipo de fenômeno ou situação ela poderá representar’”.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

A atividade foi feita em um colégio da rede pública no estado do Paraná, no município de Curitiba, em duas turmas de 1º ano do Ensino Médio. As turmas eram compostas por em média 30 alunos e, devido a isso, elas foram divididas em grupos de 4 a 5 alunos para a realização da atividade. Utilizou-se de uma situação-problema a ser explorada por meio de uma modelagem matemática. Essa situação consistiu em analisar a taxa de reprodução de bactérias com modelos matemáticos, sendo assim, foram realizadas pesquisas sobre sua importância biológica e industrial na sociedade, como também sobre o histórico do demasiado uso de antibióticos para combater as doenças e o exame de antibiograma. A intervenção ocorreu através da análise da taxa de reprodução bacteriana utilizando um modelo de função exponencial, sendo descrita no seguinte trecho da atividade desenvolvida para a intervenção:

“Uma paciente com sintomas de infecção urinária, dirigiu-se ao posto de saúde para fazer o exame, e foi coletada uma amostra de urina após 4 horas ($t = -4$) dos primeiros sintomas. Depois de coletada, a urina foi posta na substância ágar-ágar e guardada em estufa para a reprodução bacteriana. Um cientista sabia que a taxa de reprodução dessa bactéria obedecia a seguinte regra $Q(t) = 10 \cdot (3)^{t/2}$, que relaciona a quantidade de bactérias $[Q(t)]$ com o tempo em horas (t).”

A partir dessas informações, foi preenchida uma tabela da relação do número de bactérias pelo tempo, e foram desenvolvidas questões com modelos investigativos sobre a tabela. Questionando, matematicamente, a respeito da reprodução, do limite de reprodução, a quantidade de bactérias e o combate à infecção. Foi introduzido o uso da calculadora e do software GeoGebra nos smartphones pessoais de cada aluno para a representação do gráfico. Dito isso,

era necessário que os alunos apresentassem justificativas matemáticas das conjecturas que haviam feito.

ANÁLISE DA ATIVIDADE

Ao utilizar a Modelagem Matemática para a realização da análise, é necessário apresentar as 4 fases da metodologia. A “inteiração” foi reconhecida no início da tarefa, pois, quando os alunos receberam o texto base, houve a leitura atenta no conteúdo expresso no texto de linguagem normal, interpretando o texto de maneira interdisciplinar.

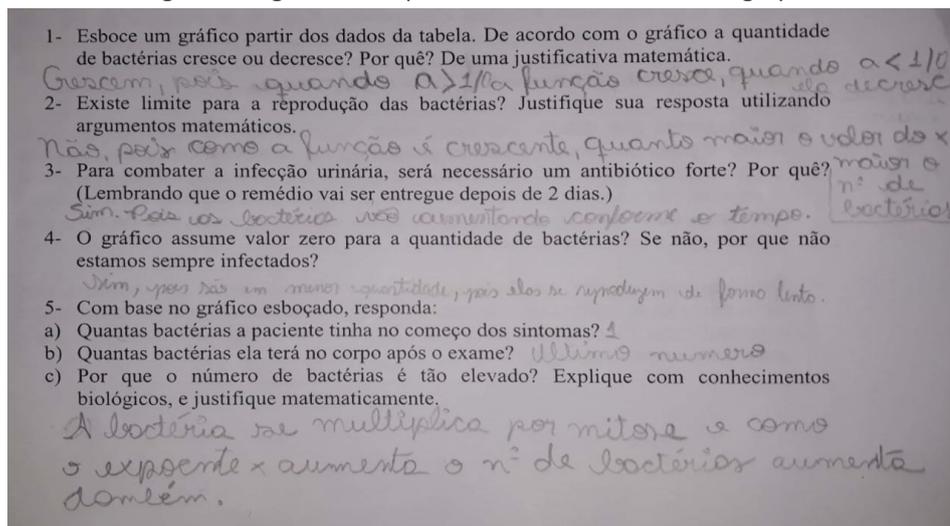
Seguindo o processo, a “matematização” e a “resolução” foram trabalhadas simultaneamente. Houve dificuldades dos alunos em transferir o texto da linguagem natural para a linguagem matemática, talvez por não apresentarem o conhecimento necessário sobre funções exponenciais e matemática elementar. Foram necessárias interrupções da intervenção para elucidar a teoria matemática e para explicar o significado de um argumento matemático, característica apresentada nas questões. Nessas interrupções, foram requisitadas explicações acerca do crescimento e decrescimento do gráfico; da forma geral da função; operações básicas com expoentes e dúvidas gerais em relação ao software utilizado e a calculadora.

A situação dispunha de mais de uma forma de representar uma função exponencial: gráfico, tabela, procedimentos algébricos, enunciado. Com isso, foi possível identificar com os alunos qual delas serviu como maior apoio para a resolução dos problemas propostos na atividade. Em relação ao crescimento e o decrescimento da função, foi dito em grande escala que a tabela forneceu a visualização mais facilitada desse fenômeno. Apesar disso, especificamente em uma das turmas observadas, alguns grupos constataram que tiveram maior facilidade de identificar o crescimento da colônia de bactérias observando o gráfico construído no *software* Geogebra. Isso mostra que, mesmo com cada diferente forma que se representa uma função, cada indivíduo pode ter a liberdade de escolher qual é mais adequada para resolver o seu problema, trabalhando com suas particularidades.

Dentro do âmbito conceitual do conteúdo trabalhado, os alunos ainda apresentaram dificuldades na compreensão do significado do objeto matemático estudado. Dessa forma, muito comumente, erros de definição e de utilização de propriedades (mais especificamente propriedades de potência, como multiplicação de potências de mesma base ou números elevados a um número fracionário) ficaram evidentes nos procedimentos algébricos de alguns alunos.

Apesar das dificuldades conceituais que foram observadas durante a intervenção, os alunos obtiveram um bom desempenho na fase de interpretação dos resultados, sendo possível verificar no registro das respostas de um grupo a seguir:

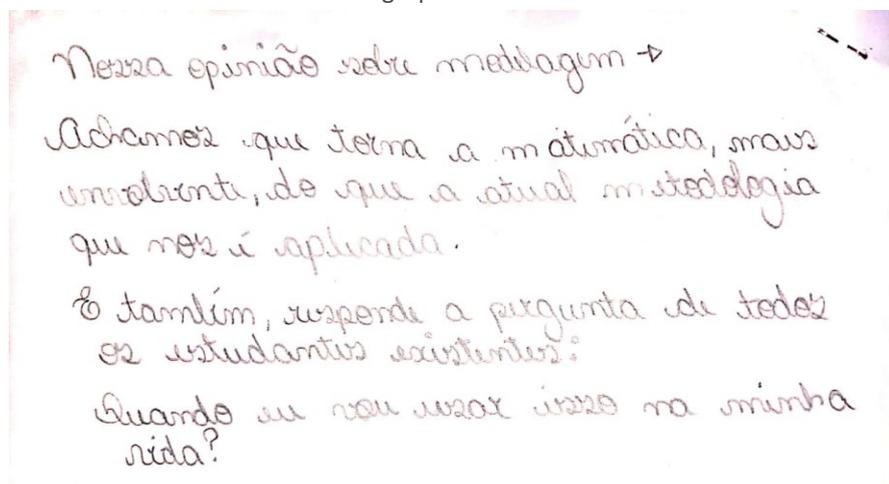
Figura 1: Registro de respostas da atividade de um dos grupos.



Fonte: Autoria própria (2019).

Dentre todas as respostas avaliadas, o grupo da figura acima foi o que respondeu com maior coesão, trazendo o argumento da teoria de função exponencial. O grupo soube como trabalhar com a Biologia juntamente com a Matemática, cumprindo o papel interdisciplinar e investigativo da modelagem. Uma outra equipe anotou a sua opinião no documento:

Figura 2: registro da opinião sobre modelagem matemática de acordo com um dos grupos.



Fonte: Autoria própria (2019).

O *feedback* obtido com a atividade demonstra que a estrutura da situação apresentada serviu de maneira positiva para a compreensão dos alunos do conteúdo trabalhado, fazendo com que eles pudessem visualizar a Matemática aplicada fora da sala de aula.

RESULTADOS E CONCLUSÕES

As conhecidas metodologias de ensino de Matemática muitas vezes trazem consigo um conceito e característica em comum: o caráter investigativo do aluno, isto é, sua autonomia perante a atividade proposta. Ao analisar por essa perspectiva, a situação proposta teve como resultado um excelente retorno. Os alunos, apesar de apresentarem dificuldades acerca dos conceitos, definições, propriedades e notações, encarnaram o papel investigativo exigido pela metodologia da modelagem Matemática.

Além disso, a interdisciplinaridade sobre a qual a metodologia se caracteriza foi trabalhada com êxito. Foi possível perceber que os alunos souberam relacionar os resultados obtidos matematicamente com justificativas ligadas a outra área de conhecimento, neste caso a Biologia. Através de conjecturas e discussões com os colegas, eles foram capazes de chegar às suas conclusões utilizando a matemática como ferramenta para a solução dos problemas propostos.

Por ser uma atividade mais prática, mesmo com as interrupções, foi possível finalizar a tarefa no tempo estipulado. Os exercícios apresentaram um resultado mediano, e ao final da atividade foi realizada uma correção geral. Ao questionar por opiniões e críticas, houve alunos que afirmaram gostar da atividade, pois entenderam o objetivo da metodologia aplicada. Para uma aplicação futura é recomendável fazer revisões teóricas e aulas práticas com os *softwares* trabalhados.

Mathematical modelling as a methodology for the exponential function's process of learning

ABSTRACT

The Mathematical Modelling in Mathematics Education shows itself as an efficient method of teaching in the interdisciplinary field hence it is a process which allies theory and practice, motivating on the search for understanding of reality that surrounds the student. With that said, by using this methodology, the teacher is granted a better use of the contents explored by the students, inducing them to relate these contents with other knowledge fields. Therefore, for this experiment report, the said methodology was adopted, aiming at exhibiting the students the different applications of exponential function outside the purely mathematical field, with the purpose of turning it more evident. This study was made with public school's students at Curitiba in the state of Paraná as part of a project from PIBID, Institutional Scholarship Program for Introduction to Teaching. After the class intervention detailed in this article, an analysis was made with the received papers at the end of the task in the perspective of the phases from the mathematical modelling, seeking to understand the student's conceptual and content knowledge on the designated activity, in addition to comprehend their capacities to recognize the exponential function on its various forms. The questions presented in the task were elaborated with the expectation on what it may have been the answers and, from that, a review was made on how much these expectations were met, either in the sense of the answers being as expected or it being made in a thoroughly unexpected way yet not disagreeing with what was proposed, nonetheless. The suggested task brought the interdisciplinarity, a theoretical review regarding exponential functions, and for it was needed an investigative role from the students in order to interpret and create a mathematical model to a giving problem. When generally analyzed, since there was not a previous mastering sequence on theory, the interpretation was difficult. Saying so, it was possible to observe that the students lacked the purely mathematical conceptual knowledge. Notwithstanding, for the mechanical process of substituting values they have achieved higher performances.

KEYWORDS: Mathematical Modelling. Experiment report. Exponential function.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1 ed. São Paulo: Editora Contexto, 2013.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5 ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BRASÍLIA. Ministério da Educação. Secretaria da Educação. **Orientações curriculares para o ensino médio**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 19 set. 2019.

BURAK, D. **Modelagem Matemática**: ações e inteirações no processos ensino-aprendizagem. 1992. Disponível em: <http://repositório.unicamp.br/handle/REPOSIP/252996>. Tese (Doutorado em Psicologia Educacional) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Acesso em: 19 set. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 17 set. 2019.

DOMINONI, Nilcéia Regina Ferreira. **Utilização de Diferentes Registros de Representação**: um estudo envolvendo Funções Exponenciais. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

PARANÁ. Governo do Paraná. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Matemática. 2008. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em: 17 set. 2019.