

PRECIFICAÇÃO DE DERIVATIVOS CAMBIAIS COM ÁRVORE DE MARKOV

MARKOV-TREE PRICING OF EXCHANGE RATE DERIVATIVES

SILVA, Allan Jonathan^{1,2}; ALVAREZ, Fabini H. Bargas³

¹ Laboratório Nacional de Computação Científica

²CEFET/RJ

³ Universidade Católica de Petrópolis

Resumo

Este trabalho apresenta o desenvolvimento da fórmula de Black-Scholes para opções em moedas através de medidas de probabilidades martingale, igualando o resultado já obtido por Garman e Kohlhagen. Após estudar os retornos do câmbio Real/Dólar num certo intervalo de tempo e concluir que estes não são independentes e identicamente distribuídos e, portanto violam as premissas do modelo mostrado, foi adaptado um modelo computacional discreto, construído a partir de uma árvore de Markov, para precificar este derivativo. É mostrado que a distribuição da Árvore de Markov é aproximada por uma distribuição mista de duas normais, passando o modelo para o contínuo. Comparando os modelos, são identificadas disparidades nos preços de Opções com strikes distantes do preço do ativo subjacente. Os modelos com árvore de Markov para Opções cambiais obtiveram melhores estimativas para este tipo de situação, conhecido como “smile” na literatura financeira, como ocorre com o modelo para Opções em ações, onde exatamente falha a equação de Black-Scholes.

Palavras-Chave: Opções cambiais; Derivativos Financeiros; Árvore de Markov.

1 Introdução

As flutuações das principais variáveis da economia, como taxa de juros, câmbio e preço das commodities, afetam tanto o ambiente corporativo e financeiro, como os cidadãos comuns não envolvidos no ambiente de negócios.

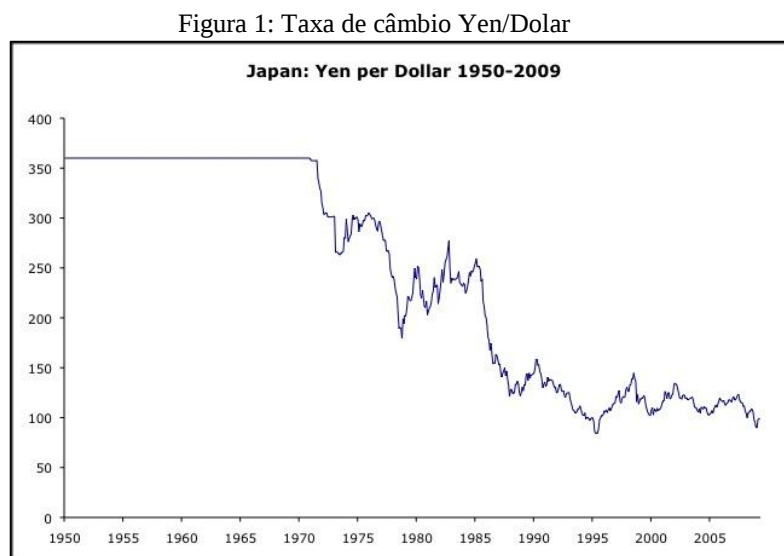
Instrumentos derivativos financeiros vêm sendo usados cada vez mais pelas corporações para gerenciamento da exposição ao risco que a variabilidade dessas variáveis a fazem incorrer. Uma empresa financiada à taxa de juros flutuante ou compradora de insumos agrícolas ou minerais, investidores com portfólios expostos à determinadas ações, corporações com atividades comerciais ou financeiras internacionais, independente do mercado, todas elas estão expostas ao risco.

Risco, segundo Zhang (1998), bem como energia, não se elimina se transfere de uma forma para outra. Instituições têm deslocado grandes esforços em pesquisas para identificação e mensuração de riscos. Hedge é o nome que se dá para operações de transferência de risco para aqueles com menos aversão ou com mais instrumentos para gerenciá-lo.

Sabe-se que as relações comerciais entre nações fazem parte de um processo econômico existente há séculos. A integração político-social e econômica mundial, a chamada globalização, incentiva internacionalmente o comércio e a transferência de capitais de investimento. Por usarem meios de troca diferentes, empresas que exportam ou que importam bens de outros países, bancos, especuladores e investidores, precisam precificar e trocar sua moeda local pela moeda estrangeira para efetuar suas transações. Para isso, é preciso existir um ambiente onde esse processo é realizado.

O mercado onde são negociadas as moedas é o FOREX. É o maior e mais importante mercado financeiro do mundo, sem o qual não teríamos chegado a tal nível de globalização comercial e financeira, ou ela sequer teria acontecido (HENDERSON, 2002, p. 1).

Após a quebra do acordo de Bretton Woods, que vigorou de 1944 até o período de 1971-1973, as divisas começaram a operar em regime flutuante e todos os preços da economia se tornaram mais voláteis. Veja o gráfico a seguir da paridade Yen/Dólar:



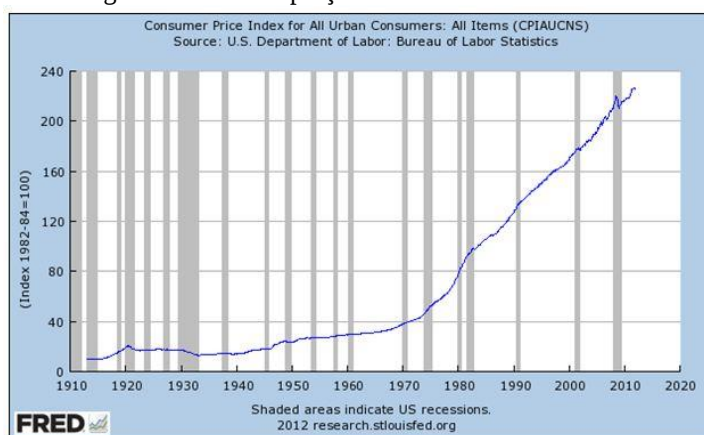
Fonte: Huffington Post

Segundo Marshal e Bansal (1993, p. 23-24), o aumento da volatilidade nos mercados se deu por um produto das políticas inflacionárias, da globalização dos mercados, da rápida industrialização dos países subdesenvolvidos e do advento da era da informática, fazendo com que a aquisição e o

processamento das informações se tornassem mais velozes. As políticas inflacionárias se deram pelo financiamento dos débitos governamentais através da livre emissão monetária por parte dos bancos centrais, os quais agora podiam aumentar a oferta de sua moeda, e conseqüentemente a influência do estado na economia, o quanto desejarem, sem a necessidade de lastreá-las a alguma *commodity*.

Desde então, o mundo experiencia períodos de grande inflação, veja Figura 2, precedidos por altas taxas de crescimento devido aos estímulos monetários, como previsto na Teoria dos Ciclos de F.A. Hayek, mostrada por Iorio (2011, p. 149-173).

Figura 2: Índice de preços do consumidor americano.



Fonte: Fourwinds10.net

Esse combinado de fatores resultou em muito desenvolvimento científico na área de derivativos financeiros nos últimos 40 anos, proporcionando mais segurança aos negócios globais. À medida que as variáveis econômicas (taxas de juros, preços de commodities, taxas de câmbio, etc...) se tornam mais incertas, esse setor adquire cada vez mais importância e responsabilidade nas instituições financeiras. Os *Quants*, como são conhecidos os profissionais de engenharia financeira, possuem ferramentas que quantificam, monitoram e limitam os riscos incorridos nas mais diversas operações.

É sabido que sem os derivativos financeiros, praticamente não haveria comércio internacional. O empreendedor que ousasse exportar algum bem para receber em moeda estrangeira seria muito mais um especulador, tentando adivinhar o que o banco central de tal país iria fazer com sua moeda nesse período, do que um comerciante propriamente dito. Hoje, existe a possibilidade muito difundida de transferir o risco para uma terceira parte, que está disposta a monitorá-lo, e comercializar normalmente. Nesse contexto, torna-se necessário avaliar de forma acurada o preço do derivativo, de modo que possa ser usado corretamente na estratégia de gestão em questão.

2 Teoria da arbitragem

2.1 Introdução

Os principais, se não todos os métodos de precificação de derivativos, são baseados na noção de arbitragem. Esses preços são calculados de forma que, ao menos evitem que haja oportunidades de arbitragem, ou seja, oportunidades de operações simultâneas em diferentes mercados que ofereçam lucro, sem risco e em geral sem custo, acima dos juros de mercado.

Esse conceito é usado para encontrar um “preço justo” para um instrumento derivativo. Qualquer desvio desse valor indica oportunidades de arbitragem.

Segundo Neftci (2000, p.14), há pelo menos quatro utilidades dos preços livres de arbitragem:

- quando é preciso criar-se um produto financeiro;
- para realizar testes de stress em portfólios;
- marcação a mercado dos ativos da carteira;
- finalmente, preços livres de arbitragem de ativos líquidos podem ser usados em estratégias de

algorithmic trading (algoritmos desenvolvidos buscar oportunidades de lucro, realizando compras e vendas de ativos rapidamente).

2.2 Paridade put-call

A Paridade Put-Call é uma importante relação que deve ser observada. Chama-se de *Call Option* uma opção de compra, que é o direito de comprar um determinado ativo, por um preço e em uma data previamente estabelecidos. *Put Option* é o direito de vender esse ativo nas mesmas condições. Se estes derivativos não respeitarem a seguinte igualdade, segundo Hull (2008, p. 208):

$$S + P(t, K) = C(t, K) + Ke^{-rt} \quad (1)$$

então há oportunidades de arbitragem. Onde:

S = o valor negociado atual do ativo subjacente às opções;

P = o preço negociado da opção de venda do ativo S, com preço de exercício K e com t anos para expirar;

C = o preço negociado da opção de compra do mesmo ativo S, com preço de exercício K e com t anos para expirar;

r = taxa de juros de mercado livre de risco.

2.3 Precificação neutra ao risco

O preço de uma Opção de compra é dado pelo valor esperado do *payoff* (diferença do preço do ativo subjacente e o preço de exercício) da Opção com relação à alguma medida de probabilidade $\mathbb{P}$, descontado a valor presente:

$$C = e^{-rt} E^{\mathbb{P}} [\max(S_t - K, 0)] \quad (2)$$

onde S_t é o preço do ativo subjacente na data do vencimento da Opção.

Sabe-se que em geral, um ativo de risco descontado a valor presente, usando a taxa de juros de mercado, terá um preço superior ao seu valor atual:

$$S(t) < e^{-rt} E^{\mathbb{P}}[S(t + 1)] \quad (3)$$

E também que:

$$C(t) < e^{-rt} E^{\mathbb{P}}[C(t + 1)] \quad (4)$$

Isto é, o valor esperado de um ativo de risco descontado a valor presente (usando uma taxa livre de risco) é maior que seu atual valor, porque investidores cobram um prêmio de risco para comprá-los. Assim, para calcular um valor “justo” exato para o ativo, deve-se conhecer seu prêmio de risco cobrado. Assim obtém-se a igualdade:

$$S(t) = e^{-rt} E^{\mathbb{P}}[S(t + 1)] + \text{prêmio} \quad (5)$$

Dada a complexidade de se calcular o prêmio de risco de um ativo variável, e de lidar com sua taxa μ de crescimento estocástica, só resta trocar a medida de valor esperado na Eq. 5 para encontrar o preço “justo” atual do ativo.

Teorema fundamental de Finanças - Neftci (2000, p.23)

Se valer a hipótese de não arbitragem, então existe uma medida de probabilidade sintética $\mathbb{Q}$, chamada de Probabilidade neutra ao risco, equivalente a medida de probabilidade real $\mathbb{P}$, que satisfaz:

$$S(t) = e^{-rt} E^{\mathbb{Q}}[S(t + 1)] \quad (6)$$

$$C(t) = e^{-rt} E^{\mathbb{Q}}[C(t + 1)] \quad (7)$$

Percebe-se a conveniência de usar esta relação, de modo que a medida $\mathbb{Q}$ internaliza qualquer prêmio de risco embutido nos preços, sem a necessidade de estimá-lo.

3 Medidas martingale

3.1 Introdução

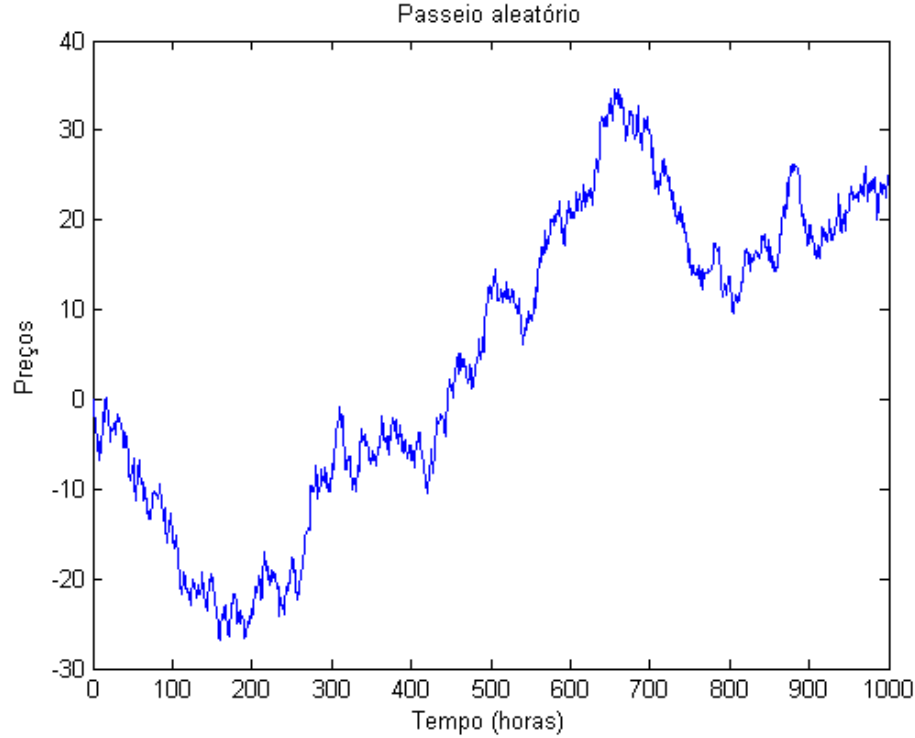
Em Teoria da Probabilidade, um martingale é um processo estocástico tal que seu valor esperado em um tempo $(t + s)$, dadas todas as observações e informações necessárias até o tempo t , é igual a observação no tempo t , em relação à medida $\mathbb{P}$. (NEFTCI, 2000, p. 24).

$$E^{\mathbb{P}}[X_{t+s}|I_t] = X_t, \quad \forall s > 0 \quad (8)$$

Em geral, se tratando de ativos financeiros de risco, espera-se que o preço futuro descontado do ativo seja maior que o preço atual e tem-se um processo chamado submartingale em relação à medida $\mathbb{P}$:

$$E^{\mathbb{P}}[X_{t+s}|I_t] > X_t, \quad \forall s > 0 \quad (9)$$

Figura 3: Simulação de passeio aleatório de preços



Fonte: o autor

É possível transformar um processo que é submartingale sob a probabilidade real $\mathbb{P}$, em martingale utilizando a medida equivalente $\mathbb{Q}$, como discutido anteriormente, e assim utilizar todo o ferramental desta teoria para encontrar os preços “justos” dos ativos, explorando a igualdade:

$$E^{\mathbb{Q}}[X_{t+s}|I_t] = X_t, \quad \forall s > 0 \quad (10)$$

A Teoria martingale classifica as séries temporais observadas de acordo com as suas tendências. Um processo estocástico se comporta como um martingale, se sua trajetória se comporta sem periodicidades e tendências perceptíveis. Já um processo que, em média, cresce como na Fig. 3, é chamado de submartingale.

Seja $I_t, t \in [0, T]$, representando toda informação disponível até o tempo t , e sabendo que toda a informação passada está contida nele:

$$I_s \subseteq I_t \subseteq I_T, \quad s < t < T \quad (11)$$

Considerando o processo aleatório dos preços, conhece-se S_t dada a informação I_t .

$$E[S_T|I_t] = S_t, \quad \forall t < T \quad (12)$$

De acordo com as definições, martingales são variáveis aleatórias que têm suas variações futuras completamente imprevisíveis dadas as atuais informações. Por exemplo, supondo que S_t é um martingale, e considerando a previsão de uma mudança em S_t num intervalo de tempo u , tem-se:

$$E[S_{t+u} - S_t] = E[S_{t+u}] - E[S_t] = 0 \quad (13)$$

Segundo Norris (1997, p.129), a relação anterior é a propriedade forte, que mostra que a melhor previsão para S_t , sob um intervalo arbitrário de tempo $u > 0$, é zero, e que S_{t+u} é um martingale, para todo $u > 0$. Considera-se assim, que direção do movimento futuro dos preços são completamente imprevisíveis. Esta é a característica fundamental de processos que se comportam como martingales.

3.2 Precificação de ativos

De acordo com as definições da seção anterior, S_t é um processo martingale se seus movimentos futuros são completamente imprevisíveis. Mas, é sabido que os preços de títulos descontados crescem com o tempo, e em geral o mesmo é válido para ações. Para moedas também é possível observar uma tendência, ou prevê-la de acordo com alguns estudos macroeconômicos.

Para um ativo arriscado S_t , pode-se considerar um retorno esperado positivo, que não é um martingale:

$$E[S_{t+\Delta} - S_t] \cong \mu\Delta \quad (14)$$

onde μ é a taxa de retorno esperada, e Δ é um curto espaço de tempo.

Embora talvez nenhum ativo financeiro, de risco ou não, se comporta como um processo martingale, pode-se convertê-los encontrando uma medida de probabilidade equivalente. Deste modo, seu preço descontado a valor presente pela taxa de juros livre de risco, torna-se um processo martingale. Feito isso, a igualdade:

$$E^{\mathbb{Q}}[e^{-r\Delta}S_{t+\Delta}] = S_t, \quad \Delta > 0 \quad (15)$$

torna-se muito útil na precificação de derivativos.

Há dois métodos para transformar um processo em martingale. O primeiro, e mais intuitivo é subtrair a tendência esperada do processo de $e^{-r\Delta}S_t$. No entanto, tornar-se-ia necessário conhecer, ou prever, essa tendência esperada para um tempo arbitrário, e assumi-la constante. O segundo método, que será usado no desenvolvimento da fórmula de Black-Scholes, trata-se de transformar a distribuição de probabilidade do processo, de modo que se há,

$$E^{\mathbb{P}}[e^{-r\Delta}S_{t+\Delta}] > S_t, \quad \forall \Delta > 0 \quad (16)$$

onde $E^{\mathbb{P}}[\cdot]$ é a esperança condicional calculada usando a distribuição de probabilidade $\mathbb{P}$, deve-se encontrar uma medida de probabilidade equivalente $\mathbb{Q}$, que faça com que,

$$E^{\mathbb{Q}}[e^{-r\Delta}S_{t+\Delta}] = S_t, \quad \forall \Delta > 0 \quad (17)$$

e $e^{-r\Delta}S_t$ torna-se um martingale.

Com isto, tem-se uma maneira prática de obter analítica ou numericamente, o preço C_t de uma Opção de compra europeia (que só pode ser exercida no vencimento T) de um ativo S_t , com preço de exercício K, chamado strike, e com taxa de juros livre de risco r :

$$C_t = E^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}[\max(S_t - K, 0)]] \quad (18)$$

Simplemente descontando o valor esperado (em relação agora a probabilidade $\mathbb{Q}$) do *payoff* a valor presente.

Segue abaixo o desenvolvimento de algumas ferramentas necessárias para encontrarmos o preço da Opção com a Eq. 18.

3.3 Função geratriz de momentos

Seja Y_t um processo estocástico a tempo contínuo,

$$Y_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t) \quad (19)$$

com Y_0 dado. Define-se S_t como um processo geométrico com S_0 dado,

$$S_t = S_0 e^{Y_t} \quad (20)$$

A função geratriz de momentos $M(\lambda)$ é uma esperança estatística específica envolvendo Y_t .

$$M(\lambda) = E[e^{Y_t \lambda}] \quad (21)$$

onde λ é um parâmetro arbitrário.

Utilizando a distribuição da Eq. 20, a Eq. 21, segundo Meyer (1983, p.249), pode ser calculada explicitamente da forma:

$$E[e^{Y_t \lambda}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Y_t \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1(Y_t - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dY_t \quad (22)$$

Agrupando os termos e multiplicando por:

$$e^{-(\lambda \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t \lambda^2)} e^{(\lambda \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t \lambda^2)} = 1 \quad (23)$$

tem-se:

$$E[e^{Y_t \lambda}] = e^{(\lambda \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t \lambda^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1(Y_t - (\mu t + \sigma^2 t \lambda))^2}{2\sigma^2 t}} dY_t \quad (24)$$

Sabendo que a integral acima é a área sob a função densidade de probabilidade normal, e que seu valor é igual à unidade, obtêm-se:

$$M(\lambda) = e^{(\lambda \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t \lambda^2)} \quad (25)$$

Tomando derivadas de primeira e segunda ordem em relação à λ e igualando-as a zero, obtemos o primeiro e o segundo momento, iguais a μt e a $\sigma^2 t$, respectivamente.

3.4 Esperança condicional de processos geométricos

Usando processos martingales para precificar derivativos, é preciso avaliar a esperança condicional $E[S_t|S_u, u < t]$, onde S_t é um processo geométrico. Por definição de processos de Wiener, Neftci (2000, p. 176), é sempre verdade que:

$$Y_t = Y_s + \int_s^t dY_u \quad (26)$$

onde Y_x é um processo estocástico definido pela Eq. 19, e portanto:

$$\Delta Y_t = \int_s^t dY_u \quad (27)$$

Nota-se que pela definição de Processos de Wiener generalizados,

$$\Delta Y_t \sim N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s)) \quad (28)$$

De acordo com os cálculos da seção 3.3, a função geratriz de momentos deste processo é dada por:

$$M(\lambda) = e^{(\lambda\mu(t-s) + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2(t-s))} \quad (29)$$

Com a Eq. 29, torna-se possível calcular a esperança condicional do movimento browniano geométrico.

$$E\left[\frac{S_t}{S_u} | S_u, u < t\right] = E[e^{\Delta Y_t} | S_u] \quad (30)$$

Se os incrementos de Y_t são independentes (como são por definição), e que S_u é não aleatório, então:

$$E[e^{\Delta Y_t} | S_u] = E[e^{\Delta Y_t}] \quad (31)$$

Mas, $E[e^{\Delta Y_t}]$ é a função geratriz de momentos da Eq. 29 com $\lambda = 1$,

$$E[e^{\Delta Y_t}] = e^{(\mu(t-s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-s))} = E\left[\frac{S_t}{S_u} | S_u\right] \quad (32)$$

Multiplicando ambos os lados por S_u , tem-se a esperança condicional de um processo geométrico, e que será amplamente utilizado nas próximas seções:

$$S_u e^{(\mu(t-s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-s))} = E[S_t | S_u, u < t] \quad (33)$$

3.5 Conversão de preços de ativos de risco em martingales e a escolha da medida equivalente $\mathbb{Q}$.

Supondo novamente o processo geométrico:

$$S_t = S_0 e^{Y_t}, \quad t \in [0, \infty) \quad (34)$$

onde Y_t é um processo de Wiener com distribuição denotada por $\mathbb{P}$. Como anteriormente, $\mathbb{P}$ é a medida de probabilidade real que governa o processo aleatório que impacta S_t . Como discutido no Cap. 2, pode não ser conveniente, ou até mesmo não ser possível trabalhar com a medida $\mathbb{P}$, de modo que se torna necessário encontrar uma medida martingale equivalente $\mathbb{Q}$.

A distribuição real de S_t é determinada pela distribuição de Y_t . Consequentemente a medida de probabilidade $\mathbb{P}$ é dada por:

$$Y_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t) \quad (35)$$

Sejam S_t o preço do ativo subjacente ao derivativo em um tempo $t > u$, e S_u o preço observado em u . Sendo S uma taxa de câmbio, então, segundo Marshall e Bansal (1993, p. 210) as taxas de juros externa e doméstica são utilizadas e relacionadas segundo a paridade das taxas de juros, $F(T) = S_t \frac{e^{rt}}{e^{rft}}$. Sabe-se que se S_t é um ativo de risco, ele não pode ser um martingale, e portanto:

$$E^{\mathbb{P}}[e^{-(r-rf)t} S_t | S_u] > e^{-(r-rf)u} S_u \quad (36)$$

Sob certas condições, deverá ser possível encontrar uma medida de probabilidade $\mathbb{Q}$, tal que a inequação acima, se transforme nesta seguinte igualdade,

$$E^{\mathbb{Q}}[e^{-(r-rf)t} S_t | S_u] = e^{-(r-rf)u} S_u \quad (37)$$

Define-se a nova probabilidade $\mathbb{Q}$ por,

$$N(\rho t, \sigma^2 t) \quad (38)$$

onde ρ é um parâmetro arbitrário para a tendência ou média da distribuição, e que é a única diferença das medidas $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{P}$. Usando a distribuição da Eq. 38, e a fórmula da esperança condicional dada pela Eq. 33, obtém-se:

$$E^{\mathbb{Q}}[e^{-(r-rf)(t-u)} S_t | S_u, u < t] = S_u e^{-(r-rf)(t-u)} e^{(\rho(t-u) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-u))} \quad (39)$$

Com a troca de medidas de probabilidade, o resultado da expressão acima não depende mais da estimativa do retorno esperado μ , mas de um parâmetro arbitrário ρ , o qual pode ser selecionado de tal maneira que a medida $\mathbb{Q}$ satisfaça as condições martingale:

$$E^{\mathbb{Q}}[e^{-(r-rf)(t-u)} S_t | S_u, u < t] = S_u \quad (40)$$

Para isto, basta encontrar um valor de ρ que faça o expoente da Eq. 39 igual a zero. Sendo assim, descobre-se que,

$$\rho = r - rf - \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (41)$$

anula o expoente do lado direito da Eq. 39.

O parâmetro arbitrário ρ , está agora definido em termos da volatilidade do ativo subjacente, neste caso as taxas de câmbio, e das taxas de juros livres de risco, tanto nacionais quanto estrangeiras. E agora $S_t e^{-(r-rf)(t-u)}$ tornou-se um processo martingale sob $\mathbb{Q}$.

Após isto, conhece-se a distribuição do processo sob $\mathbb{Q}$, que não depende mais de μ :

$$N((r - rf - \frac{1}{2} \sigma^2)t, \sigma^2 t) \quad (42)$$

e é equivalente a probabilidade real $\mathbb{P}$, diferindo apenas na sua média.

4 A fórmula de Black-Scholes

4.1 Introdução

Em 1973, Fischer Black e Myron Scholes publicaram “*The pricing of options and corporate liabilities*”, artigo que continha um modelo matemático, que hoje leva seus nomes, que se tornou o padrão para a precificação dos mais diversos derivativos, e que lançou uma área de atuação conhecida como Engenharia Financeira.

A fórmula de Black-Scholes calcula o preço de uma Opção de compra através de uma Equação Diferencial Parcial (EDP), quando se aplica as seguintes condições:

- A taxa de juros livre de risco é constante e conhecida;
- O ativo subjacente não paga dividendos antes de a Opção expirar;
- A Opção é do tipo europeia, isto é, não pode ser exercida antes da data de vencimento;
- O preço segue Movimento Geométrico Browniano, com tendência e volatilidade constantes e proporcionais ao preço;
- Não há custos de transação, e o ativo subjacente é infinitamente divisível.

A partir daqui, a segunda condição terá uma modificação, dado que se quer calcular o preço de uma Opção Cambial. O dividendo será pago, e pago de forma contínua, e é igual à taxa de juros livre de risco da moeda estrangeira. Portanto, a fórmula final deverá ser a adaptação que Mark Garman e Steven Kohlhagen fizeram na fórmula de Black-Scholes para Opções cambiais, porém através da Teoria martingale, e não com solução de EDP's.

4.2 Desenvolvimento através de medidas martingales

Sabe-se que o payoff no vencimento de uma Opção se $S_T > K$, é $S_T - K$, o que permite escrever uma equação com essa condição de contorno e a propriedade martingale, como está sendo feito:

$$C_t = E^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} \max(S_T - K, 0)] \quad (43)$$

Recordando as relações 22 e 42, podemos calcular diretamente a Eq. 43 usando:

$$d\mathbb{Q} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(Y_T - (r-rf - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2}{\sigma^2 T}} dY_T \quad (44)$$

que fazendo $t = 0$ na Eq 43, pode ser escrito como:

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} \max[S_T - K, 0] d\mathbb{Q} \quad (45)$$

Substituindo as equações 34 e 44 em 45,

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} \max[S_0 e^{Y_T} - K, 0] \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(Y_T - (r-rf - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2}{\sigma^2 T}} dY_T \quad (46)$$

Para eliminar a função *Max* de dentro da integral, é necessário fazer uma mudança nos limites de integração. Sabendo que a Opção de compra só tem valor caso o preço do ativo no vencimento for maior que o preço *strike*, faz-se:

$$K \leq S_0 e^{Y_T} \quad (47)$$

Aplicando logaritmo natural, tem-se:

$$Y_T \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) \quad (48)$$

Ou seja, $\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)$ passa a ser o menor valor tomado por Y_T . Substituindo na Eq. 46:

$$C_0 = \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} e^{-rT} (S_0 e^{Y_T} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(Y_T - (r-rf - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2}{\sigma^2 T}} dY_T \quad (49)$$

Usando a propriedade de soma de integrais, podemos separar a integral acima em uma soma de duas integrais, e usando a substituição de variáveis:

$$Z = \frac{Y_T - \left(r-rf - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (50)$$

pode-se resolver a segunda integral usando a nova variável Z . Assim de:

$$K e^{-rT} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T} (Y_T - (r-rf - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T \quad (51)$$

tem-se:

$$K e^{-rT} \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r-rf - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} Z^2} dZ \quad (52)$$

Chamando o limite inferior de d_2 , como na fórmula original de Black-Scholes:

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r-rf - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (53)$$

Agora pode ser usada uma das propriedades de simetria da distribuição normal padrão:

$$K e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} Z^2} dZ = K e^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} Z^2} dZ \quad (54)$$

que é igual ao segundo termo da fórmula de Black-Scholes e Garman-Kohlhagen (1983):

$$Ke^{-rT} N(d_2) \quad (55)$$

onde $N(\cdot)$, é a notação usual para a distribuição normal padrão acumulada.

Resolvendo agora o primeiro termo da soma das integrais da Eq. 49,

$$\int_{\ln(\frac{K}{S_0})}^{\infty} e^{-rT} S_0 e^{Y_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(Y_T - (r-rf - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2}{\sigma^2 T}} dY_T \quad (56)$$

Após utilizar a mesma substituição com a variável Z definida na Eq. 50 e manipular os termos, tem-se:

$$e^{-rT} e^{(r-rf - \frac{1}{2}\sigma^2)T} S_0 \int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma Z \sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ \quad (57)$$

usando novamente a propriedade de simetria da distribuição normal padrão e agrupando os termos da função exponencial do integrando,

$$e^{-rT} e^{(r-rf - \frac{1}{2}\sigma^2)T} S_0 \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2} + \sigma Z \sqrt{T}} dZ \quad (58)$$

e completando o quadrado somando e subtraindo $\frac{1}{2}\sigma^2 T$, obtém-se:

$$e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} e^{-rT} e^{(r-rf - \frac{1}{2}\sigma^2)T} S_0 \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(Z + \sigma\sqrt{T})^2} dZ \quad (59)$$

Finalmente, faz-se a última substituição $H = Z + \sigma\sqrt{T}$, para obter o primeiro da Equação de Garman-Kohlhagen:

$$S_0 e^{-rfT} \int_{-\infty}^{d_2 + \sigma\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}H^2} dH = S_0 e^{-rfT} N(d_1) \quad (60)$$

onde $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$.

Está derivada a Equação de Black-Scholes que foi adaptada por Garman e Kohlhagen para Opções cambiais. Nota-se que nenhuma equação diferencial parcial estocástica foi usada no desenvolvimento, tampouco o Lema de Itô (WILMOTT, 2006, p. 94). Apenas foi usada uma esperança condicional tomada em relação a uma medida martingale equivalente, e a equação final é como segue:

$$C_0 = S_0 e^{-rfT} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (61)$$

onde:

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r-rf - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (62)$$

5 Hedge com a fórmula de Black-Scholes

5.1 Introdução

Empresas e investidores que mantêm algum tipo de negociação em moeda estrangeira estão expostos às variações da taxa de câmbio, e necessitam de estratégias que minimizem o risco de suas operações. Como já falado anteriormente, com o uso de Opções financeiras é possível limitar possíveis perdas.

No entanto, as instituições financeiras que oferecem este produto aos seus clientes precisam fazer Hedge de suas posições, isto é, realizar operações de proteção do seu portfólio contra variações das variáveis que afetam o preço do produto derivativo vendido. A isso se dá o nome de Gerenciamento de risco.

Analisando a Eq. 61, nota-se que o preço de uma Opção cambial C_0 é sensível à variação de seis variáveis, que são:

- o preço à vista da taxa de câmbio S_0 ;
- a variação da taxa de juros livre de risco paga em moeda nacional, r ;
- a variação da taxa de juros livre de risco paga em moeda estrangeira, rf ;
- a volatilidade de S_0 , denotada por σ ;
- o preço de exercício, K ;
- o tempo, T .

Já conhecida uma fórmula para o preço da Opção, pode-se tomar derivadas parciais do preço da Opção e criar operações de hedge.

5.2 Delta hedge

A taxa de variação do preço de uma Opção com relação ao preço do ativo subjacente é conhecida como Δ (Delta),

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \quad (63)$$

Conhecendo as seguintes relações, Haug (200-?, p. 91):

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad (64)$$

$$\frac{\partial N(x)}{\partial x} = n(x) \quad (65)$$

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (66)$$

é possível derivar uma equação para o Delta.

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = e^{-rfT} N(d_1) + S_0 e^{-rfT} \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} - K e^{-rT} \frac{\partial N(d_2)}{\partial S}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial C}{\partial S} = e^{-rfT} N(d_1) + S_0 e^{-rfT} \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial S} - K e^{-rT} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial S} \\
&= \frac{\partial C}{\partial S} = e^{-rfT} N(d_1) + S_0 e^{-rfT} n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - K e^{-rT} n(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S}
\end{aligned}$$

Vendo que:

$$\frac{\partial N d_2}{\partial S} = \frac{S_0 e^{-rfT}}{K \frac{\partial d_1}{\partial S}}$$

Obtém-se:

$$\Delta = e^{-rfT} N(d_1), \quad 0 \leq \Delta \leq 1 \quad (67)$$

A equação acima indica qual será a variação no preço da Opção, dada uma pequena variação no preço do ativo subjacente. Como em geral a taxa de juros é positiva, o valor de delta nunca excede a unidade, e indica o quanto de moeda estrangeira deve compor o portfólio naquele dado momento.

Os gestores monitoram o delta periodicamente, de modo a manter um portfólio imunizado contra pequenas mudanças no preço do ativo subjacente, chamado portfólio delta-neutro, e que na data de exercício da Opção, tenha-se a quantidade total da moeda estrangeira em carteira para ser entregue (em caso de ter sido vendida uma Opção de compra e ela ser exercida), ou não tenha nenhuma quantidade em caso de a Opção expirar com preço do câmbio abaixo do strike.

Segue abaixo a realização de uma simulação de delta hedge, em que a operação é de venda de uma Opção de compra de USD1.000, com o preço de exercício de 1,70 BRL/USD e com prazo de 12 dias. A volatilidade apostada para o período é de 30%, as taxas de juros brasileira e americana são 10% a.a. e 1.25% a.a. respectivamente. A taxa de câmbio foi simulada segundo o movimento browniano.

O preço recebido pela venda desta Opção foi de R\$47,89, calculado com a fórmula de Black-Scholes.

Tabela 1: Simulação de Delta-hedge com Opções em câmbio (BRL/USD)

Dias para o vencimento	Tempo para o vencimento (anos)	Câmbio (BRL/USD)	Delta	Black Scholes	Dólares para delta-hedge	Dólares comprados	Custo dos dólares	Custo da estratégia, incluindo juros
12	0,04762	R\$ 1,700	53,8%	R\$ 0,04789	\$ 538,07	\$ 538,07	R\$ 914,72	R\$ 914,72
11	0,04365	R\$ 1,713	58,5%	R\$ 0,05318	\$ 585,42	\$ 47,35	R\$ 81,13	R\$ 996,20
10	0,03968	R\$ 1,749	71,2%	R\$ 0,07394	\$ 712,11	\$ 126,69	R\$ 221,53	R\$ 1.218,11
9	0,03571	R\$ 1,738	68,1%	R\$ 0,06408	\$ 681,01	\$ -31,11	-R\$ 54,06	R\$ 1.164,51
8	0,03175	R\$ 1,777	81,7%	R\$ 0,09117	\$ 817,03	\$ 136,03	R\$ 241,69	R\$ 1.406,65
7	0,02778	R\$ 1,828	93,7%	R\$ 0,13512	\$ 936,79	\$ 119,75	R\$ 218,97	R\$ 1.626,15
6	0,02381	R\$ 1,810	92,1%	R\$ 0,11602	\$ 921,43	\$ -15,36	-R\$ 27,79	R\$ 1.598,98
5	0,01984	R\$ 1,777	86,6%	R\$ 0,08490	\$ 865,82	\$ -55,61	-R\$ 98,81	R\$ 1.500,77
4	0,01587	R\$ 1,768	86,4%	R\$ 0,07550	\$ 864,34	\$ -1,48	-R\$ 2,62	R\$ 1.498,72
3	0,01190	R\$ 1,749	82,1%	R\$ 0,05651	\$ 820,58	\$ -43,75	-R\$ 76,53	R\$ 1.422,76
2	0,00794	R\$ 1,776	95,3%	R\$ 0,07829	\$ 953,43	\$ 132,84	R\$ 235,95	R\$ 1.659,25
1	0,00397	R\$ 1,779	99,2%	R\$ 0,07967	\$ 992,43	\$ 39,00	R\$ 69,39	R\$ 1.729,26
0	0,00000	R\$ 1,744	100,0%	R\$ 0,04440	\$ 1.000,00	\$ 7,57	R\$ 13,20	R\$ 1.743,12

Fonte: o autor

Vê-se que a opção foi exercida, pois $1,744 > \text{strike}$, e a medida que o câmbio foi apreciando o lançador da Opção foi comprando mais dólares, com dinheiro financiado à taxa de juros doméstica, de modo que na data final a carteira continha os USD1.000 para serem entregues. O delta representa o percentual dos dólares a serem entregues no futuro que o gestor deve ter na carteira. Em caso de a Opção expirar *fora-do-dinheiro*, o delta expiraria com valor igual a zero. Este monitoramento, como nota-se, foi realizado uma vez a cada dia.

Foi recebido no início do contrato R\$47,89, e a estratégia de hedge custou no total R\$1.743,12. O lançador da Opção obteve um lucro de R\$4,99. No entanto, isso ocorreu pelo fato de a volatilidade realizada no período ter sido de 26,96%, abaixo do valor o qual a Opção foi vendida, 30%. Num caso oposto, o lançador teria incorrido em prejuízo.

No entanto, para ter uma melhor estratégia de hedge, é preciso conhecer com que velocidade o delta muda, dada uma mudança na taxa de câmbio. O monitoramento necessário para prevenir que não haja grandes choques no portfólio e que auxilia na escolha da periodicidade das operações de compra e venda do ativo subjacente, é a taxa de variação conhecida como Gamma Γ .

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{n(d_1)e^{-rfT}}{S\sigma\sqrt{T}} \quad 0 \leq \Gamma \quad (68)$$

Haug (200-?, p. 42), sugere que se use uma medida percentual em relação ao ativo subjacente para gamma,

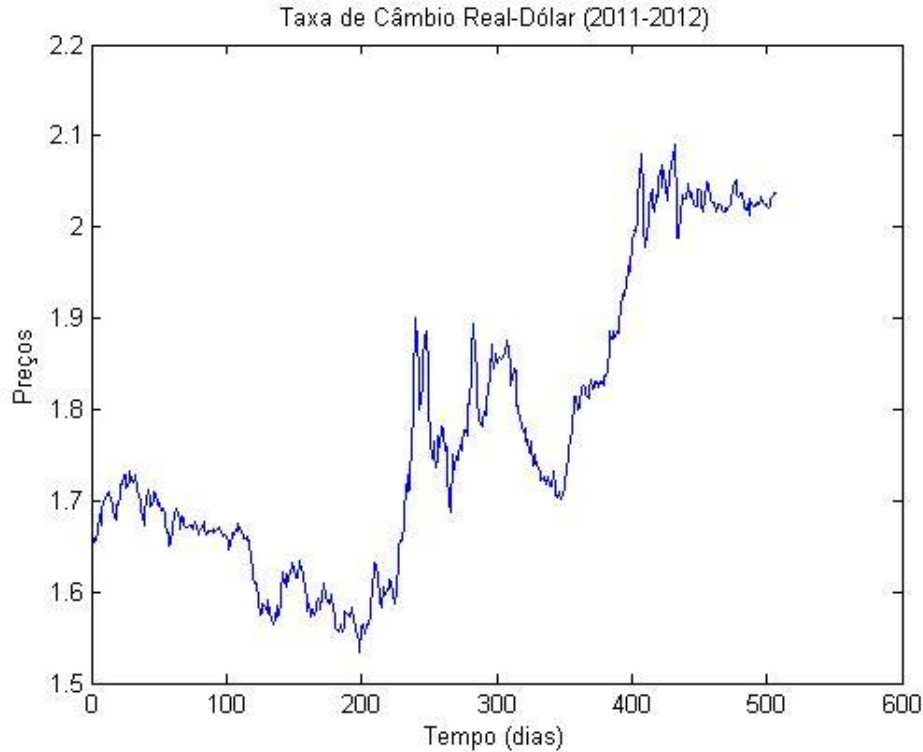
$$\Gamma_p = \frac{n(d_1)e^{-rfT}}{100\sigma\sqrt{T}} \quad 0 \leq \Gamma \quad (69)$$

pois o gamma como definido na Eq. 68 traz consigo resultados ilusórios em casos extremos, como a venda de uma Opção de compra com strike muito acima do preço atual do ativo subjacente e com prazo longo. Em casos como esse, em que o risco é pequeno de a Opção ser exercida, o gamma teria valores muito altos e acima do normal para esse tipo de situação. Isso se dá pelo fato de o gamma ser definido como a variação em delta, dada uma pequena variação no preço do ativo. Uma pequena variação no preço do ativo representa um valor alto percentualmente em relação ao seu preço.

6 Análise da distribuição dos retornos da paridade cambial real-dólar

É possível, e bastante provável que o retorno de ativos financeiros não sejam normalmente distribuídos. Estudos empíricos mostram que ativos financeiros em geral apresentam assimetria e caudas pesadas. Isso se dá pelo fato de que retornos negativos extremos serem mais frequentes que retornos positivos extremos.

Figura 4: Taxas de câmbio (BRL/USD)



Fonte: <http://www4.bcb.gov.br>

Neste sentido, será feita uma inferência estatística dos retornos da taxa de câmbio Real-Dólar, para verificar se a distribuição deste ativo financeiro é normal, obtendo assim uma conclusão sobre a utilidade da fórmula de Black-Scholes para modelar um derivativo com este ativo subjacente à ele.

Para isto, serão feitos dois testes, o teste Qui-quadrado e o teste Jarque-Bera.

6.1 Teste qui-quadrado

O teste Qui-quadrado, denotado por χ^2 , é um teste de hipótese não-paramétrico, pois não depende da estimação de momentos, que objetiva calcular a dispersão entre duas variáveis nominais. Seu princípio básico é encontrar divergências entre as frequências esperadas e observadas de um evento. (MEYER, 1983, p. 385).

A fórmula para calcular as discrepâncias entre as frequências esperadas e observadas é a seguinte:

$$\chi^2_{calc} = \sum_{i=0}^n \left(\frac{Fe_i - Fo_i}{Fe_i} \right)^2 \quad (83)$$

onde Fe_i são as frequências esperadas, e Fo_i as observadas.

Deve-se encontrar o Qui-quadrado tabelado χ^2_{crit} com K-1 graus de liberdade, onde K é o número de classes, e com nível de significância α .

Enunciam-se as hipóteses nula e alternativa. A hipótese nula é de que há indícios de que as frequências observadas não sejam diferentes das frequências esperadas e, portanto pode-se assumir com $(1 - \alpha)\%$ de confiança que as distribuições são as mesmas, e a hipótese alternativa vice-versa. Por fim, compara-se o χ^2_{crit} com χ^2_{calc} . Em caso de o segundo ser maior que o primeiro, a hipótese nula deve ser aceita.

6.2 Teste de normalidade jarque-bera

O teste de Jarque-Bera foi desenvolvido especialmente para verificar se determinada amostra tem distribuição normal, que é a hipótese nula do teste. Calculando a assimetria e a curtose residuais, realiza-se o seguinte teste:

$$JB = \frac{S^2}{6} + \frac{(C-3)^2}{24} \quad (84)$$

onde, S é a assimetria e C é a curtose das observações, que são calculados da seguinte forma, respectivamente:

$$S = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{(\sigma^2)^{3/2}} \quad (85)$$

$$C = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{(\sigma^2)^2} \quad (86)$$

Distribuições normais possuem assimetria $S = 0$, e curtose $C = 3$.

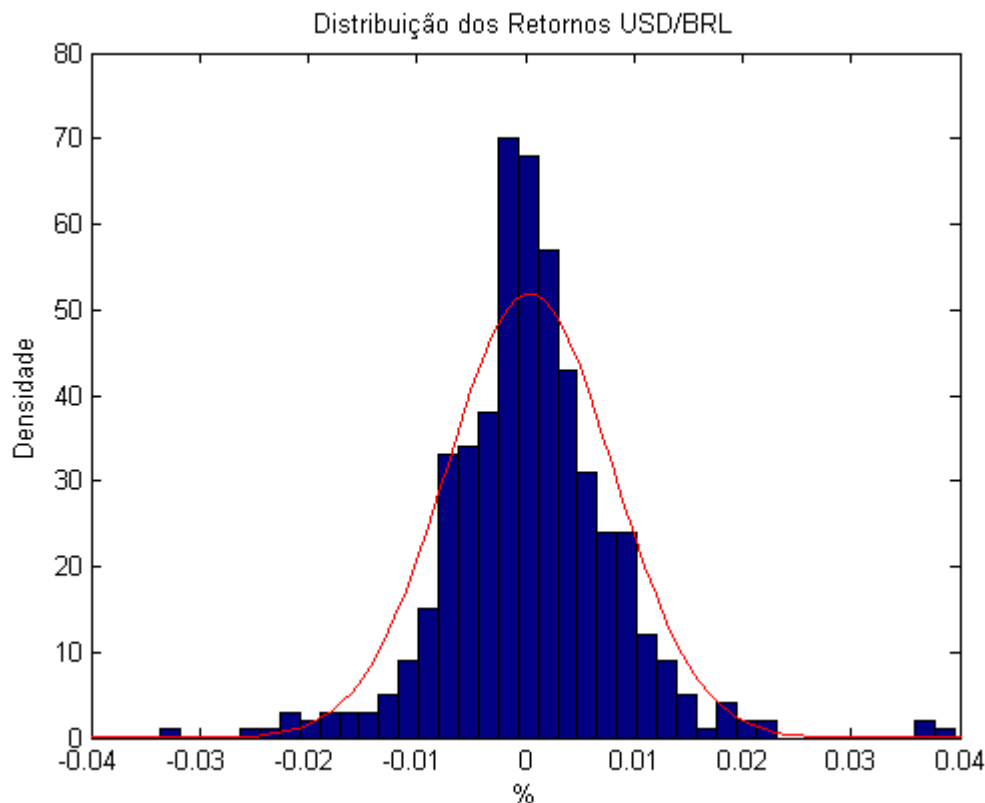
A estatística JB é assintoticamente Qui-quadrado com dois graus de liberdade, e o teste é finalizado de forma análoga à seção anterior. Segundo Jondeau et al. (2008, p. 18), as duas desvantagens deste teste, é que sua distribuição assintótica só vale para amostras grandes e que os cálculos da assimetria e curtose necessitam de uma estimativa prévia da média e da variância, que são sujeitas a erros.

6.3 Análise de dados

Como pode ser notado na Fig. 5, a distribuição dos retornos da taxa de câmbio Real-Dólar não possui um comportamento perfeito de uma distribuição gaussiana.

Para esta análise, foram coletados dados de 01/10/2010 até 11/10/2012 da página web do Banco Central brasileiro. O tamanho da amostra é de 506 dias de negócio.

Figura 5: Distribuição dos retornos (BRL/USD)



Fonte: o autor

Uma população com distribuição normal é perfeitamente simétrica, seu coeficiente de assimetria é igual à zero, e possui curtose, que é uma medida de dispersão que caracteriza o pico ou achatamento, igual a três.

Os dados do presente estudo apresentam:

- Coeficiente de assimetria = 0,3539;
- Curtose = 6,9473

Como se pode notar no gráfico, os dados têm comportamento leptocúrticos, ou seja, a curtose residual é maior que zero. Portanto, há fortes indícios de que os dados não sejam normalmente distribuídos.

O teste Qui-Quadrado, realizado com 3 graus de liberdade e a nível de significância de 5%, sugere que se rejeite a hipótese nula, isto é, que os dados testados não são normalmente distribuídos.

De fato, o $\chi^2_{calc} = 29,007$ é maior que o $\chi^2_{crit} = 7,815$.

O teste Jarque-Bera apresentou resultados ainda mais fortes. O $\chi^2_{calc} = 339,06$ é substancialmente maior que o $\chi^2_{crit} = 5,859$, sugerindo também que seja rejeitada a hipótese nula.

O valor-p ou nível descritivo de teste, que pode ser interpretado como o menor valor do nível de significância para o qual ainda rejeita-se a hipótese nula, também fornece fortes evidências de que os retornos do câmbio Real-Dólar não sejam normalmente distribuídos.

O valor-p do teste Qui-quadrado é $2,26 \times 10^{-6}$, e o valor-p do teste Jarque-Bera é 10^{-3} .

Conclui-se, portanto que a distribuição dos retornos dos dados analisados não é normal.

7 Precificação de opções com árvore de markov

7.1 Introdução

Duas das mais importantes suposições por trás do modelo de Black-Scholes são que os retornos dos ativos financeiros são independentes e são normalmente distribuídos.

A segunda hipótese não se aplica aos dados utilizados neste estudo, como visto no capítulo anterior. Já a independência dos retornos pode ser verificada empiricamente, observando as frequências relativas dos movimentos de subida e descida dos retornos, dado o movimento anterior.

Embora esta abordagem não sirva de prova científica de que os retornos não sejam independentes, para isto deveria ser utilizado Inferência Bayesiana, é possível aceitar que pelo menos para esta amostra de 506 dias, os retornos do câmbio Real-Dólar não são independentes, pois como ilustrado na Fig. 6:

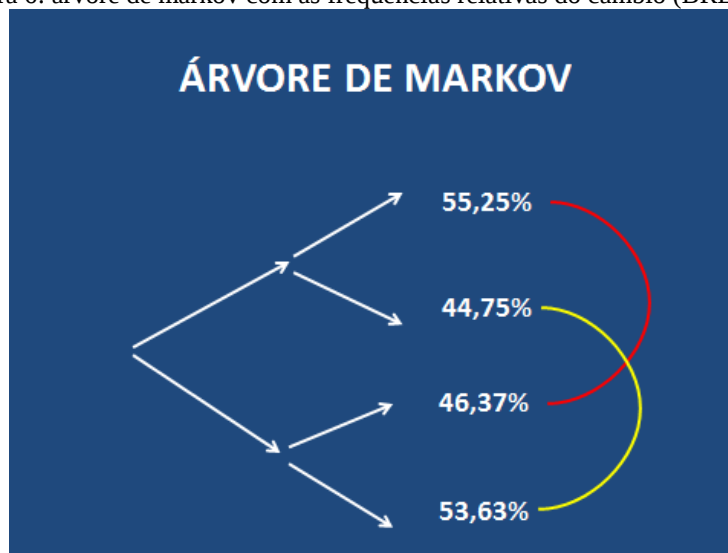
- a frequência relativa de movimentos de subida, dado que o movimento anterior também o foi, é de 55,25%;

- a frequência relativa de movimentos de descida, dado que o movimento anterior foi de subida, é de 44,75%;

- a frequência relativa de movimentos de descida, dado que o movimento anterior também o foi, é de 53,63%;

- a frequência relativa de movimentos de subida, dado que o movimento anterior foi de descida, é de 46,37%.

Figura 6: árvore de markov com as frequências relativas do câmbio (BRL/USD)



Fonte: o autor

Como será visto mais abaixo, as frequências apresentadas anteriormente não são usadas como parâmetros estimados no modelo, e sim as respectivas volatilidades de movimentos de alta e de baixa do ativo.

No modelo Binomial tradicional, usaríamos apenas a volatilidade de toda a série de dados disponível, que é igual a 12,20%. Porém, agrega-se mais informação com a Árvore de Markov, incluindo a volatilidade dos movimentos de alta e de baixa, 9,23% e 8,1% respectivamente.

Há na literatura uma extensa lista de estudos que buscam, com diferentes distribuições de probabilidade, modelar um determinado ativo ou mercado em particular. A maioria deles, relaxam algumas das condições restritivas do modelo de Black-Scholes, e em geral obtêm preços mais próximos dos preços de mercado.

É geralmente aceito que, os desvios dos preços do modelo Black-Scholes em relação aos preços de mercado são devidos ao comportamento estocástico das taxas de juros e ao efeito “*smile*” da volatilidade estocástica.

Para Bhat e Kumar (2010), essa discrepância é também devida ao conhecimento dos agentes de mercado de que, os atuais retornos dos ativos alteram a distribuição dos retornos futuros. E diferentemente dos modelos tradicionalmente utilizados para precificar Opções, o modelo de Árvore de Markov leva essa dependência em conta.

O modelo de Árvore de Markov (MT – Markov Tree), leva em consideração uma dependência de primeira ordem de Markov, isto é, a distribuição do movimento seguinte só depende do passo imediatamente anterior.

Assim como o conhecido modelo da Árvore Binomial de Cox-Ross-Rubinstein, o modelo MT vai construindo a árvore a partir da data inicial, aquela que se quer conhecer o preço da Opção, até a data do vencimento do contrato. Essa construção é feita conhecendo as probabilidades e o destino final de cada passo.

7.2 Parâmetros do modelo

O primeiro passo, em $n = 0$, é feito como no modelo binomial padrão,

$$P(S_1 = uS_0) = q \quad (87)$$

$$P(S_1 = dS_0) = 1 - q \quad (88)$$

onde S_x é o preço do ativo no passo x .

Para $n \geq 1$ sejam,

$$S_n^+ = \{S_n \geq S_{n-1}\} \quad (89)$$

$$S_n^- = \{S_n < S_{n-1}\} \quad (90)$$

isto é, a Eq. 77 indica que o preço do ativo no passo n é maior que no passo anterior, e o inverso é indicado na Eq. 78. Assim,

$$P(S_{n+1} = vS_n | S_n^+) = q^+ \quad (91)$$

$$P(S_{n+1} = wS_n | S_n^+) = 1 - q^+ \quad (92)$$

$$P(S_{n+1} = xS_n | S_n^-) = q^- \quad (93)$$

$$P(S_{n+1} = yS_n | S_n^-) = 1 - q^- \quad (94)$$

Neste ponto, foram introduzidas as letras u , d , v , w , x e y , que representam os diferentes fatores pelos quais os preços mudam a cada passo. Assim, de acordo com este modelo, o preço de um ativo no passo $n+1$, dado que veio de um movimento para cima S_n^+ , pode ser vS_n com probabilidade q^+ , ou wS_n com probabilidade $1 - q^+$. Enfatizando que q^+ , q^- e q , são probabilidades neutras ao risco, e serão definidas mais adiante.

Para o cálculo dos fatores, é preciso estimar três tipos de volatilidade da série de dados estudada. Sabendo que a volatilidade é o desvio-padrão anualizado, dividem-se os dados em uma série de retornos positivos e outra série de retornos negativos. Com isso, tem-se:

$$\sigma_{\pm} = \hat{\sigma}_{\pm} \sqrt{l_{\pm}} \quad (95)$$

$$\sigma = \hat{\sigma} \sqrt{252} \quad (96)$$

onde $\hat{\sigma}_{\pm}$ é o desvio-padrão da série de tamanho $l_{\pm}$, $\hat{\sigma}$ é o desvio-padrão da série completa e $\sigma_{\pm}$ são as volatilidades. Agora, segundo Bhat e Kumar (2010), é possível calcular os fatores:

$$u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}} \quad (97)$$

$$v = e^{\sigma_+ \sqrt{\Delta t}} \quad (98)$$

$$x = e^{\sigma_- \sqrt{\Delta t}} \quad (99)$$

onde Δt é o tempo de cada passo da árvore. Assumindo que todos os movimentos são simétricos em relação à unidade, tem-se que, $d = 1/u$, $w = 1/v$ e $y = 1/x$.

7.3 Propriedade martingale

Definindo as probabilidades como,

$$q = \frac{e^{(r-rf)\Delta t} - d}{u - d} \quad (100)$$

$$q^+ = \frac{e^{(r-rf)\Delta t} - w}{v - w} \quad (101)$$

$$q^- = \frac{e^{(r-rf)\Delta t} - y}{x - y} \quad (102)$$

sendo r a taxa de juros livre de risco doméstica e rf a taxa estrangeira, pode-se adaptar o modelo de Bhat e Kumar (2010) para Opções cambiais, e mostrar que o modelo não admite arbitragem, dado que possui a propriedade martingale:

$$\begin{aligned} E[S_1 | S_0] &= uS_0q + dS_0(1 - q) \\ &= uS_0 \frac{e^{(r-rf)\Delta t} - d}{u - d} + dS_0 \left[1 - \frac{e^{(r-rf)\Delta t} - d}{u - d} \right] \\ &= S_0 \left\{ u \frac{e^{(r-rf)\Delta t} - d}{u - d} + d \left[1 - \frac{e^{(r-rf)\Delta t} - d}{u - d} \right] \right\} \\ &= S_0 e^{(r-rf)\Delta t} \end{aligned} \quad (103)$$

e para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} E[S_{n+1} | S_n, \dots, S_0] &= E[S_{n+1} | S_n, \dots, S_0, S_n^+]P(S_n^+) + E[S_{n+1} | S_n, \dots, S_0, S_n^-]P(S_n^-) \\ &= [vS_nq^+ + wS_n(1 - q^+)]P(S_n^+) + [xS_nq^- + yS_n(1 - q^-)]P(S_n^-) \\ &= S_n e^{(r-rf)\Delta t} P(S_n^+) + S_n e^{(r-rf)\Delta t} P(S_n^-) \\ &= S_n e^{(r-rf)\Delta t} \end{aligned} \quad (104)$$

7.4 Precificação neutra ao risco

Para calcular o preço de uma Opção de compra cambial com o modelo MT, basta lembrar que:

$$C_t = e^{-rT} E[(S_T - K, 0)] \quad (105)$$

e que neste caso,

$$E[(S_T - K, 0)] = \sum_{\sigma \in J_n} I_{\sigma > K} (\sigma - K) P(\sigma) \quad (106)$$

J_n é o vetor de todos os n possíveis estados σ no último passo da árvore, ou seja, são todos os preços que o ativo pode atingir partindo de S_0 . $P(\sigma)$ é a probabilidade do ativo atingir este preço σ . $I_{\sigma > K}$ é uma função indicadora que tem valor um, se σ for maior que o strike K , e zero caso contrário.

O preço da Opção é então calculado conforme a Eq. 92, descontando a valor presente pela taxa de juros doméstica livre de risco, todos os possíveis preços acima do preço de exercício multiplicados por suas respectivas probabilidades.

Como a quantidade de estados depende da profundidade da árvore, e pode haver diferentes trajetórias que resultem no mesmo estado, o problema que suscita neste momento é, como calcular quantos diferentes caminhos são possíveis para atingir certo estado S_n , dado que se partiu de S_0 .

O modelo de Árvore Binomial tradicional possui n^2 possíveis estados no último passo, o que não pode valer para o modelo MT, dado que há estados que se repetem. E também é preciso saber quais estados se repetem, e quantas vezes. Bhat e Kumar (2012) demonstraram que o número de estados possíveis em uma árvore de profundidade n , é $n^2 - n + 2$, e apresentaram um eficiente algoritmo para se obter a função massa de probabilidade associada à Árvore de Markov.

7.5 Função massa de probabilidade

É chamada de Função Massa de Probabilidade, a distribuição de variáveis aleatórias discretas.

Sendo S_0 o preço inicial, nota-se que no passo 3 da árvore, $S_3 \in J_3$, onde,

$$J_3 = \{S_0 uv^2, S_0 uvw, S_0 uwx, S_0 uwy, S_0 dxv, S_0 dxw, S_0 dyx, S_0 dy^2\} \quad (107)$$

Daí, conhecendo todas as diferentes trajetórias de se atingir S_n partindo de S_0 , pode-se calcular:

$$P(S_n = S_0 + s \times v) = \#(v)q^v \quad (108)$$

onde:

$$q = (q, 1 - q, q^+, 1 - q^+, q^-, 1 - q^-) \quad (109)$$

e,

$$q^v = \prod_{j=1}^6 q_j^{v_j} \quad (110)$$

e o símbolo $\#$ denota a cardinalidade.

Agora se torna necessário enumerar todos os possíveis v 's de uma árvore com profundidade n . Bhat e Kumar (2012) sugeriram um algoritmo com esta finalidade.

8 Aproximação da árvore de markov com função contínua

8.1 Introdução

Pode-se ver desde o capítulo 2, que o ingrediente chave para calcular o preço de uma Opção é o cálculo do valor esperado do *payoff* da Opção tomado em relação à alguma medida de probabilidade.

No capítulo anterior, esse valor esperado foi calculado a partir da função massa de probabilidade gerada pela Árvore de Markov, com o auxílio de um algoritmo computacional. Embora seja bastante eficiente, este algoritmo está refém da capacidade de precisão da aritmética finita do computador, e esta carência fica evidente no cálculo dos fatoriais quando o número de passos da árvore cresce.

Neste sentido, é necessário encontrar uma função densidade de probabilidade que aproxime àquela gerada pela árvore, de modo a obter uma fórmula fechada para o cálculo do preço da Opção. Isso foi feito por Bhat e Kumar (2012), e será mostrado nas próximas seções.

8.2 Recursão

Primeiramente, escreve-se o processo discreto recursivamente:

$$l_u = \log u = -\log d \quad (111)$$

$$l_1 = \log v = -\log w \quad (112)$$

$$l_2 = \log x = -\log y \quad (113)$$

Seja $R(n, \tilde{s})$ a probabilidade de atingir o valor $\tilde{s}$ em n passos na direção positiva dos reais $\mathbb{R}$ no n -ésimo passo. Analogamente, seja $L(n, \tilde{s})$ a probabilidade de atingir o valor $\tilde{s}$ em n passos na direção negativa dos reais $\mathbb{R}$ no n -ésimo passo.

Sendo $\log v$ e $\log x$ os únicos passos positivos permitidos, $R(n, \tilde{s})$ é a probabilidade de alcançar o valor $\tilde{s}$ em n passos tomando $\log v$ e $\log x$ no n -ésimo passo. Se o no n -ésimo passo for $\log v$, então após $n-1$ passos o preço está em $\tilde{s} - l_1$, e o alcançou tomando $n-1$ passos para a direita. A probabilidade de atingir esta posição após $n-1$ passos é de $R(n-1, \tilde{s} - l_1)$. Da mesma maneira, se o n -ésimo passo for $\log x$, então após $n-1$ passos o preço está em $\tilde{s} - l_2$, e o alcançou tomando $n-1$ passos para a esquerda. A probabilidade de atingir esta posição após $n-1$ passos é de $L(n-1, \tilde{s} - l_2)$. Agrupando, obtém-se:

$$R(n, \tilde{s}) = q^+ R(n-1, \tilde{s} - l_1) + q^- L(n-1, \tilde{s} - l_2) \quad (114)$$

De forma análoga, é possível obter,

$$L(n, \tilde{s}) = (1 - q^+) R(n-1, \tilde{s} + l_1) + (1 - q^-) L(n-1, \tilde{s} - l_2) \quad (115)$$

8.3 Solução assintótica

Inicialmente, sejam:

$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(\tilde{s}) e^{-ik\tilde{s}} d\tilde{s} \quad (116)$$

$$f(\tilde{s}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ik\tilde{s}} dk \quad (117)$$

a Transformada e a Transformada inversa de Fourier, respectivamente, e:

$$M = \begin{bmatrix} q^+ e^{-ikl_1} & q^- e^{-ikl_2} \\ (1 - q^+) e^{-ikl_1} & (1 - q^-) e^{-ikl_2} \end{bmatrix} \quad (118)$$

Tomando a Transformada de Fourier de ambos os lados das Equações 102 e 103, obtém-se em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \hat{R}(n, k) \\ \hat{L}(n, k) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \hat{R}(n-1, k) \\ \hat{L}(n-1, k) \end{bmatrix} = M^{n-1} \begin{bmatrix} \hat{R}(1, k) \\ \hat{L}(1, k) \end{bmatrix} \quad (119)$$

Se $P(n, \tilde{s}) = R(n, \tilde{s}) + L(n, \tilde{s})$, é a função densidade de probabilidade da variável aleatória $\tilde{S}_n$, então $\hat{P}(n, k) = \hat{R}(n, k) + \hat{L}(n, k)$ é a sua Transformada de Fourier. Assim, pode-se calcular $\hat{P}(n, k)$:

$$\hat{P}(n, k) = \mathbf{1}^t M^{n-1} \begin{bmatrix} \hat{R}(1, k) \\ \hat{L}(1, k) \end{bmatrix} \quad (120)$$

Agora, usando Funções Geratrizes para derivar a aproximação assintótica para a função densidade de probabilidade, como em Rudnick e Gaspari (2004). Para $z \in \mathbb{C}$, sejam,

$$\rho(z, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{R}(n+1, k) z^n \quad (121)$$

$$\lambda(z, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{L}(n+1, k) z^n \quad (122)$$

as funções geratrizes para R e L, respectivamente. Usando 107, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \rho(z, k) \\ \lambda(z, k) \end{bmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} M^n z^n \begin{bmatrix} \hat{R}(1, k) \\ \hat{L}(1, k) \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{I} - Mz)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{R}(1, k) \\ \hat{L}(1, k) \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{I} - Mz)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{R}(1, k) \\ \hat{L}(1, k) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(1-zm_1)(1-zm_2)} \begin{bmatrix} 1 - (1-q^-)e^{ikl_2}z & q^- e^{-ikl_2}z \\ (1-q^+)e^{ikl_1}z & (1-q^+)e^{-ikl_1}z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{R}(1, k) \\ \hat{L}(1, k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (123)$$

Seja p a função geratriz de $\hat{P}$,

$$\begin{aligned} p(z, k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{P}(n+1, k) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{R}(n+1, k) + \hat{L}(n+1, k)) z^n \\ &= \mathbf{1}^t \begin{bmatrix} \rho(z, k) \\ \lambda(z, k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (124)$$

Substituindo a Eq. 112 em 111:

$$p(z, k) = \frac{\hat{P}(1, k)}{(1-zm_1)(1-zm_2)} + z \frac{\gamma}{(1-zm_1)(1-zm_2)} \quad (125)$$

onde $\gamma = \hat{R}(1, k)((1 - q^+)e^{ikl_1} - (1 - (1 - q^-)e^{ikl_2}) + \hat{L}(1, k)(q^-e^{-ikl_2} - q^+e^{-ikl_1})$ é independente de z .

A Eq. 133 fica assim:

$$\begin{aligned} p(z, k) &= \frac{\hat{P}(1, k)}{(m_1 - m_2)} \left(\frac{m_1}{1 - zm_1} - \frac{m_2}{1 - zm_2} \right) + z \frac{\gamma}{(m_1 - m_2)} \left(\frac{m_1}{1 - zm_1} - \frac{m_2}{1 - zm_2} \right) \\ &= \frac{\hat{P}(1, k)}{(m_1 - m_2)} (m_1 \sum_{n=0}^{\infty} m_1^n z^n - m_2 \sum_{n=0}^{\infty} m_2^n z^n) + z \frac{\gamma}{(m_1 - m_2)} (m_1 \sum_{n=0}^{\infty} m_1^n z^n - m_2 \sum_{n=0}^{\infty} m_2^n z^n) \\ &= \frac{1}{(m_1 - m_2)} \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{P}(1, k)(m_1^{n+1} - m_2^{n+1}) + \gamma(m_1^n - m_2^n)) z^n \end{aligned}$$

Por definição, $\hat{P}(n + 1, k)$ é dado pelos coeficientes de z^n na expansão de $p(z, k)$, e como os valores de m_1 , m_2 e $\hat{P}(1, k)$ são independentes de z , $\hat{P}(n + 1, k)$ pode ser tirado da Eq. 133, e pode ser visto que ele representa a Transformada de Fourier da probabilidade de se alcançar o valor $\tilde{s}$ em n passos, como na Eq. 108:

$$\hat{P}(n + 1, k) = \frac{1}{(m_1 - m_2)} (\hat{P}(1, k)(m_1^{n+1} - m_2^{n+1}) + \gamma(m_1^n - m_2^n)) \quad (126)$$

Como m_1 , m_2 (maior e menor autovalor de M em módulo, respectivamente) e γ dependem de k , é necessário expandir $\hat{P}(n + 1, k)$ em torno de $k = 0$ para encontrar a Transformada Inversa de Fourier desta função. Para mais detalhes, Bhat e Kumar (2012). O primeiro passo da árvore de Markov resulta em:

$$\begin{aligned} \hat{P}(1, k) &= \hat{R}(1, k) + \hat{L}(1, k) \\ &= qe^{-i(\tilde{s}_0 + l_u)k} + (1 - q)e^{-i(\tilde{s}_0 - l_u)k} \end{aligned} \quad (127)$$

Sejam as constantes:

$$F_1 = e^{-i(\tilde{s}_0 + l_u)k} \quad (128)$$

$$F_2 = e^{-i(\tilde{s}_0 - l_u)k} \quad (129)$$

$$\alpha = (1 - q^+)e^{ikl_1} - (1 - q^-)e^{ikl_2} \quad (118)$$

$$\beta = q^-e^{ikl_2} - q^+e^{ikl_1} \quad (130)$$

Assim, com $\gamma = qF_1\alpha + (1 - q)F_2\beta$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{P}(n + 1, k) &\sim \frac{1}{(m_1 - m_2)} (\hat{P}(1, k)(m_1^{n+1} + \gamma m_1^n) \\ &= \frac{1}{(m_1 - m_2)} (qF_1(m_1^{n+1} + \alpha m_1^n) + (1 - q)F_2(m_1^{n+1} + \beta m_1^n)) \\ &\sim m_1^{n-1} (qF_1(m_1 + \alpha) + (1 - q)F_2(m_1 + \beta)) \end{aligned} \quad (131)$$

Após realizada uma aproximação de terceira ordem no primeiro e no segundo termos, o resultado é o seguinte:

$$\hat{P}(n+1, k) \sim q e^{\left(-\mu_1 i k - \frac{\sigma_1^2}{2} k^2\right)} + (1-q) e^{\left(-\mu_2 i k - \frac{\sigma_2^2}{2} k^2\right)} \quad (132)$$

A aproximação da função densidade de probabilidade é conseguida tomando a Transformada inversa de Fourier da Eq. 121, assim finalmente,

$$\hat{P}(n+1, \tilde{s}) \sim f_{\tilde{s}}(\tilde{s}, n+1) := \frac{q}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{\left(\frac{-(\tilde{s}-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)} + \frac{(1-q)}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{\left(\frac{-(\tilde{s}-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)} \quad (133)$$

é a aproximação da distribuição de $\tilde{S}_{n+1}$ por uma Função de distribuição mista de duas normais, a primeira $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ponderada por q , e a segunda $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ponderada por $1-q$. Os coeficientes $\mu_{1,2}$ e $\sigma_{1,2}^2$ estão definidos em Bhat e Kumar (2012). Simplificando,

$$f_{\tilde{s}}(\tilde{s}, n+1) = q g_1(\tilde{s}, n+1) + (1-q) g_2(\tilde{s}, n+1) \quad (134)$$

8.4 Precificando a opção

Avaliar o preço de uma Opção de compra, como já visto, é descontar a valor presente o valor esperado $(s - K)$ do *payoff* da opção (onde K é o preço de exercício), no vencimento T , usando uma distribuição de probabilidade, neste caso $f_s(s, T)$:

$$C = e^{-rT} \int_K^\infty (s - K) f_s(s, T) ds \quad (135)$$

Para relacionar a densidade de $\tilde{S}_T$ com S_T , faz-se:

$$P(S_T \leq s) = P(\tilde{S}_T \leq \tilde{s}) = \int_{-\infty}^{\log s} f_{\tilde{s}}(\tilde{s}, n+1) d\tilde{s} \quad (136)$$

onde $\tilde{s} = \log s$. Derivando ambos os lados em relação a s ,

$$f_s(s, T) = \frac{1}{s} f_{\tilde{s}}(\tilde{s}, n+1) \quad (137)$$

pode-se prosseguir com a precificação:

$$\begin{aligned} C e^{rT} &= \int_K^\infty s \frac{1}{s} f_{\tilde{s}}(\tilde{s}, T) ds - \int_K^\infty K \frac{1}{s} f_{\tilde{s}}(\tilde{s}, T) ds \\ &= q \int_K^\infty g_1(\tilde{s}, T) ds + (1-q) \int_K^\infty g_2(\tilde{s}, T) ds - K q \int_K^\infty \frac{1}{s} g_1(\tilde{s}, T) ds - K(1-q) \int_K^\infty \frac{1}{s} g_2(\tilde{s}, T) ds \end{aligned} \quad (138)$$

Expressando o preço da Opção em função de $\mu_{1,2}$ e $\sigma_{1,2}^2$:

$$C e^{rT} = q e^{\left(\frac{\sigma_1^2}{2} + \mu_1\right)} N(x_1) + (1-q) e^{\left(\frac{\sigma_2^2}{2} + \mu_2\right)} N(x_2) - q K N(x_3) - (1-q) K N(x_4) \quad (139)$$

Onde:

$$x_1 = \frac{\mu_1 - \sigma_1^2 - \log K}{\sigma_1} \quad (140)$$

$$x_2 = \frac{\mu_2 - \sigma_2^2 - \log K}{\sigma_2} \quad (141)$$

$$x_3 = \frac{\mu_1 - \log K}{\sigma_1} \quad (142)$$

$$x_4 = \frac{\mu_2 - \log K}{\sigma_2} \quad (143)$$

9 Comparação dos resultados

Notou-se durante o trabalho que foram desenvolvidos dois métodos de precificação de Opções cambiais completamente distintos. Abaixo, serão feitas comparações dos preços teóricos da equação de Black-Scholes (Garman-Kohlhagen), do modelo com Árvore de Markov Discreta (DMT) e sua aproximação contínua (CMT), todas com valores hipotéticos.

Em todas as tabelas, será considerada a taxa de câmbio do dia 11 de outubro de 2012, igual a 2,0363BRL/USD como S_0 . Os Strikes serão denotados por K, e o prazo da Opção T. Todas as Opções são do tipo europeia, que só podem ser exercidas no vencimento.

Inicialmente, tem-se um prazo de 30 dias úteis para o vencimento da Opção:

Tabela 2: Simulação de Opções em câmbio (BRL/USD) com prazo de 1 mês

K	T	DMT	CMT	BS
R\$ 2,00	0,119	R\$ 0,059	R\$ 0,059	R\$ 0,067
R\$ 1,50	0,119	R\$ 0,548	R\$ 0,548	R\$ 0,549
R\$ 2,30	0,119	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00

Fonte: o autor

Percebe-se que para Strikes perto do preço, o local mais crítico à medida que o vencimento se aproxima, os modelos de Árvores de Markov possuem preços menores.

A simulação com um prazo de 6 meses apresentou uma diferença mais significativa na Opção com Strike R\$2,30, chamada de Opção *fora-do-dinheiro*. Isso se dá pelo fato de a volatilidade implícita ter o conhecido efeito *smile*, e esta calculada a partir do preço dos modelos com Árvore de Markov, resulta em 8.86%, diferente da volatilidade histórica de 12.2% inserida no modelo de BS. O modelo BS resulta em uma Opção mais cara do que, aparentemente é.

Tabela 3: Simulação de Opções em câmbio (BRL/USD) com prazo de 6 meses

K	T	DMT	CMT	BS
R\$ 2,00	0,5	R\$ 0,118	R\$ 0,118	R\$ 0,133

R\$ 1,50	0,5	R\$ 0,587	R\$ 0,587	R\$ 0,587
R\$ 2,30	0,5	R\$ 0,005	R\$ 0,005	R\$ 0,015

Fonte: o autor

A última simulação é com um vencimento de 3 meses. Neste caso são observadas discrepâncias dos modelos com Árvore de Markov para o Black-Scholes em todos os Strikes. Pelas mesmas razões apresentadas anteriormente, as maiores disparidades encontram-se nas duas Opções com strikes mais distantes do preço do ativo.

Tabela 4: Simulação de Opções em câmbio (BRL/USD) com prazo de 3 meses

K	T	DMT	CMT	BS
R\$ 1,90	0,25	R\$ 0,169	R\$ 0,170	R\$ 0,173
R\$ 2,05	0,25	R\$ 0,047	R\$ 0,047	R\$ 0,061
R\$ 2,15	0,25	R\$ 0,010	R\$ 0,010	R\$ 0,168

Fonte: o autor

Com os dados apresentados, é possível notar que os modelos DMT e CMT são realmente eficazes, necessitando apenas comparar seus resultados com preços de mercado, como fizeram Bhat e Kumar (2012) com Opções em ações, e mostraram a superioridade deste modelo frente ao Black-Scholes.

10 Conclusão

Nos últimos anos têm se discutido o quanto as premissas do modelo de Black-Scholes estão enviesadas. Boa parte dos trabalhos se concentra em modelar a volatilidade de forma estocástica, ou em buscar alguma relação desta com o ativo subjacente, como o CEV (Constant Elasticity of Variance).

Na primeira parte deste trabalho, foi desenvolvida a fórmula de Black-scholes de forma não convencional, através de mudanças na medida de probabilidade, utilizando a propriedade martingale. Partiu-se de uma fórmula que precifica Opções em ações não pagadoras de dividendos, e chegou-se a um modelo que calcula o preço de Opções em moeda estrangeira.

Após isto foram realizados testes com os retornos do objeto em estudo, a taxa de câmbio Real-Dólar. Chegou-se a conclusão que as hipóteses formuladas por Fisher Black e Myron Scholes não modelariam com rigor uma Opção que tivesse esse ativo subjacente.

Com o intuito de expandir ainda mais os conhecimentos sobre modelagem de ativos financeiros, desenvolveu-se um método para precificar Opções partindo de uma árvore de Markov. Viu-se que este modelo gera uma distribuição mista de duas normais e exclui a hipótese de independência entre os retornos do movimento browniano, sendo adequado à taxa de câmbio analisada.

O modelo desenvolvido por Bhat e Kumar (2012) para precificar Opções em ações, ganhou uma pequena modificação neste trabalho, de modo que tanto a versão discreta, quanto a aproximação de sua distribuição por função contínua pudessem ser usadas para calcular o preço de Opções em câmbio.

Foram feitas simulações com os três modelos no final do trabalho, e diferenças significativas foram encontradas em Opções *fora-do-dinheiro*, o que leva a crer que o efeito *smile* da volatilidade pode ser melhor capturado pelos modelos com Árvore de Markov.

Referências bibliográficas

BHAT, H. S., KUMAR, N. Markov Tree Options Pricing. In Proceedings of the Fourth SIAM Conference on Mathematics for Industry (MI09). SIAM Conference on Mathematics for Industry (MI 2009), 2010. (pp. 162-173)

BHAT, H. S. KUMAR, N. Options Pricing Under a Normal Mixture Distribution Derived from the Markov Tree Model. **European Journal of Operational Research**, 223 (3), 2012, pp. 762-774.

GARMAN, M. B.; KOHLHAGEN, S.W. Foreign Currency Option Values. **Journal of International Money and Finance**, 1983. p. 231-237.

HAUG, Espen G. **The complete guide to option pricing formulas**. 2nd ed. New York: McGraw-Hill. 200-?.

HENDERSON, Callum. Currency strategy. England: John Wiley & Son, 2002. p. 1.

HULL, John C. **Options, futures and other derivatives Securities**. 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 1993. p. 298.

HULL, John C. **Options, futures and other derivatives**. 5nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002. p. 317.

HULL, John C. **Options, futures and other derivatives**. 7th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2008. p. 277-285.

IORIO, Ubiratan Jorge. Ação, tempo e conhecimento: A Escola austríaca de economia. São Paulo: Instituto Ludwig Von Mises Brasil, 2011. p. 149-173.

JONDEAU, E. ROCKINGER, M. POON, S.H. **Financial modeling under non-gaussian distributions**. 2008. P. 18-19.

LEWIS, Nathan. What Happened to the Middle Class? Huffingtonpost, 21 jun. 2010. Disponível em: <http://www.huffingtonpost.com/nathan-lewis/what-happened-to-the-middle-class_b_619200.html>. Acesso em: 30 mai. 2012.

MARSHALL, John F; BANSAL, Vipul K. **Financial engineering**. Miami: Kolb Publishing, 1993. p. 23-24, 210.

MERTON, Robert C. **Continuous-time finance**. Revised edition. Cambridge: Blackwell, 1990. p. 268-276.

MIRHAYDARI, Anthony. Will Ron Paul-onomics beat Obama? Fourwinds10.net, 25 jan. 2012. <Disponível em: http://www.fourwinds10.net/siterun_data/government/elections/campaigning/news.php?q=1327771035>. Acesso em: 30 mai. 2012.

NEFTCI, Salih N. **An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives**. San Diego: Academic Press, 2000.

NORRIS, J.R. **Markov chains**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. P. 129.

RUDNICK, J. A. GASPARI, G. D. **Elements of the Random Walk: An Introduction for Advanced Students and Researchers**. Cambridge University Press. 2004

SMITHSON, Charles W. **Managing Financial risk. A guide to derivative products, financial engineering and value maximization**. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1998. p. 3.

TALEB, Nassim. **Dynamic hedging, Managing vanilla and exotic options**. New York: John Wiley & Sons, 1996.

Taxas de câmbio. <http://www4.bcb.gov.br/pec/taxas/port/ptaxnpesq.asp?id=txcotacao>. Acesso em: 01 dez. 2012.

WILMOTT, Paul. **Paul Wilmott on quantitative finance**. 2nd ed. John Wiley & Sons, 2006. p. 94.

ZHANG, Peter G. **Exotic options. A guide to second generation Options**. 2nd ed. World Scientific, 1998.

Abstract

This work presents the development of the Black-Scholes formula for exchange rate Options via the probability martingale measure, reaching the result of Garman e Kohlhagen. After study the BRL/USD returns in a certain interval and conclude that these returns are not independent and identically distributed and, it violates the Black-Scholes hypothesis, it was adapted a discrete computational model from a Markov-tree. It is shown that the Markov-tree resulting distributions is approximated by a mixture of two normal in the continuous-time. Comparing the models, we identify disparities between the out and in-the money option prices. The Markov-tree models performed better when there are smiles in the option prices comparing with the Black-Scholes model, as expected.

Palavras-Chave: Exchange rate options; Financial derivatives; Markov-trees.

Dados dos autores:

Nome completo: Allan Jonathan da Silva

Filiação institucional: Laboratório Nacional de Computação Científica

Departamento: Sistemas e Controle

Função ou cargo ocupado: Doutorando

Filiação institucional: CEFET/RJ

Departamento: Engenharia de Produção

Função ou cargo ocupado: Professor

Endereço completo para correspondência: Estr. Bernardo Coutinho, 10351. Araras. 25725-022. Petrópolis – RJ.

e-mail: allan.jonathan@cefet-rj.br ; allanjs@lncc.br ; allan.jonathan@gmail.com

Nome completo: Fabini H. Bargas Alvarez

Filiação institucional: Universidade Católica de Petrópolis

Departamento: Engenharia de Produção

Função ou cargo ocupado: Professor / Coordenador do Ciclo Básico de Engenharia

Endereço completo para correspondência: R. Benjamin Constant, Petrópolis - RJ

e-mail: fabini.alvarez@ucp.br